

سلسلة ملخصات شوم
نظريات ومسائل في

حساب النفاصل والنكامل

تأليف: فرانك آيرز

يحتوي الكتاب على أكثر من ١١٧٠ مسألة
محولة حلاً كاملاً

دار ماكجرو هيل للنشر

ملخصات شوم نظرياتي ومساائل في حساب النفاضل والتكامل

تأليف
الدكتور فرانك آيرز
أستاذ ورئيس قسم الرياضيات
كلية ديكنسون

نسخة نسخة النظام المترى
جاك أولت، ماجستير
محاضر في الرياضيات
جامعة ليستر

ترجمة
نخبة من الأساتذة المتخصصين

مراجعة
الدكتور محمود أبوزيد
جامعة المنصورة
قسم الطبعة - جمهورية مصر العربية


دار ماكجرو هيل للنشر

لندن . نيويورك . سانت لويس . سان فرانسيسكو . اوكلاند . بوجونا . دوسلدورف .
جوهانسبرج . مدريد . المكسيك . مونتريال . نيولهي . بنما . باريس . ساوباولو .
سنغافورة . سيدني . طوكيو . تورنتو .

المملكة العربية السعودية - الرياض - ص.ب ١٤٣٩



حقوق التأليف ١٩٦٤ ، ١٩٧٢ دار نشر كتب ماكجروهيل ، أنك . جميع
الحقوق محفوظة .

المملكة العربية السعودية — الرياض — ص.ب ١٤٣٩ 

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله
على أى نحو أو بأى طريقة ، سواء كانت اليكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير
أو بالتسجيل أو خلاف ذلك الا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدما .

مقدمة

إن الهدف من هذا الكتاب هو ، كما ذكرنا في مقدمة الطبعة الأولى أن يزود الطلاب المبتدئين في دراسة حساب التفاضل والتكامل الابتدائي بمجموعة من المسائل النموذجية المحلولة بعناية ، وبالإضافة إلى ذلك فإن هذا الكتاب يخدم طلاب العلوم والهندسة الذين يشعرون بحاجة إلى نظرة عامة في الدراسة النظرية الأساسية وإلى مسائل في هذا الموضوع . وبما أن هذه الطبعة قد اشتملت على براهين النظريات وطرق استنتاج التفاضل والتكامل ، وعلى العدد الوفير من المسائل الإضافية فإنه من الممكن استخدامه ككتاب مناسب لمقرر دراسي منهجي .

أما مخطط الكتاب فهو لا يختلف اختلافا جوهريا عن الطبعة السابقة ، فكل فصل منه يبدأ بسرد التعاريف والمبادئ والنظريات المتعلقة بالموضوع ، يلي ذلك مادة توضيحية ومسائل محلولة تم اختيارها بحيث لا تخدم في توسيع المادة النظرية فقط ، بل تزود الطالب بشكل عملي بما يساعده في صياغة المسائل وحلها واستعادة المبادئ الأساسية الضرورية من أجل تعليم مثمر ، ومن أجل مواجهة الصعوبات التي يلاقها المبتدئون عادة ، ومن أجل توضيح العديد من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل بالإضافة لذلك فلقد ضمنا المسائل المحلولة العديدة من براهين النظريات والنتائج الأساسية . إن استخدام هذا الكتاب سواء بشكل فعال أو باعتباره مرجعا إضافيا لكتاب مقرر ، يتطلب أكثر من دراسة معلة للمسائل المحلولة إذ ينبغي أن نتعلم من كل مسألة شيئا جديدا ، الأمر الذي يتم على وجه أفضل بإعادة حل المسائل خطوة خطوة فإذا ما فعلنا ذلك فإننا سوف لا نلاق صعوبة تذكر عند حل أغلب المسائل الإضافية .

إن الزيادة في حجم الطبعة والتي تبلغ خمسين في المائة عن الطبعة السابقة تقريبا تعود بوجه خاص إلى الإضافات التي ألقينا إليها . كذلك فإننا نلفت النظر إلى إضافات وتغييرات أخرى كالمعالجة الأكثر شولا لمفهوم النهاية واتصال الدوال والمتسلسلات غير المنتهية والمنتبة ، الموسعة نوعا ما والمتعلقة بالمتجهات المستوية أو الفراغية .

ولكى يمكن وضع الحساب الابتدائي في التكامل وحساب المساحات والحجوم إلخ ، بترتيب يختلف عن ترتيب هذا الكتاب ، فلقد صيغت هذه الفصول بحيث يمكن النظر في أقسام واسعة منها مباشرة بعد الفصل السادس . وهكذا فإن الذين يستخدمون هذا الكتاب كراجع إضافي سوف لا يجدون صعوبة في جعله ملائما لحاجاتهم .

وفي الختام يود المؤلف أن ينتهز هذه المناسبة ليعبر عن شكره لدارسثوم للنشر لما قدمته من عون في هذا الصدد .

فرانك آيرز

كارليل ، بنا
(مارس ١٩٦٤)

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساساً للحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وفروعه . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحدياً بأن تطوع لغتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذي تخلفت عنه زمناً طويلاً .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة في جامعاتنا العربية لا زالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير في إعداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المطلق ، استهلكت دار ماكجروهيل للنشر McGraw-Hill Book Company نشاطها بالشروع في إصدار الطبعة العربية من سلسلة شوم Schaum Series التي لقيت في طبعها الأصلية نجاحاً لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكن وراء سلسلة ملخصات شوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديداً جيداً ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية ، فيقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب شوم تصلح ككتب مدرسية ، أو مذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التثقيف والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

المحتويات

الصفحة	الفصل
٩- ١	الفصل الأول
٢٢- ١٠	الفصل الثاني
٢٧- ٢٣	الفصل الثالث
٣٤- ٢٨	الفصل الرابع
٤٢- ٣٥	الفصل الخامس
٤٥- ٤٣	الفصل السادس
٥٢- ٤٦	الفصل السابع
٦٢- ٥٣	الفصل الثامن
٦٧- ٦٣	الفصل التاسع
٧١- ٦٨	الفصل العاشر
٧٥- ٧٢	الفصل الحادى عشر
٨٢- ٧٦	الفصل الثانى عشر
٨٦- ٨٣	الفصل الثالث عشر
٩٣- ٨٧	الفصل الرابع عشر
٩٨- ٩٤	الفصل الخامس عشر
١٠١- ٩٩	الفصل السادس عشر
١٠٨-١٠٢	الفصل السابع عشر
١١٩-١٠٩	الفصل الثامن عشر
١٢٦-١٢٠	الفصل التاسع عشر
١٣٥-١٢٧	الفصل العشرون
١٤٢-١٣٦	الفصل الحادى والعشرون
١٤٨-١٤٣	الفصل الثانى والعشرون
١٥٣-١٤٩	الفصل الثالث والعشرون
١٦١-١٥٤	الفصل الرابع والعشرون
١٧١-١٦٢	الفصل الخامس والعشرون

الفصل

الصفحة

التكامل بالتجزئة	١٧٨-١٧٢	الفصل السادس والعشرون
التكاملات المثلثية	١٨٢-١٧٩	الفصل السابع والعشرون
التعويضات المثلثية	١٨٥-١٨٣	الفصل الثامن والعشرون
التكامل بالكسور الجزئية	١٩٠-١٨٦	الفصل التاسع والعشرون
تعويضات متنوعة	١٩٤-١٩١	الفصل الثلاثون
تكامل الدوال الزائدية	١٩٦-١٩٥	الفصل الحادى والثلاثون
تطبيقات على التكامل غير المحدد	٢٠١-١٩٧	الفصل الثانى والثلاثون
التكامل المحدد	٢١١-٢٠٢	الفصل الثالث والثلاثون
حساب المساحات المستوية بالتكامل	٢١٨-٢١٢	الفصل الرابع والثلاثون
حجوم أجسام دورانية	٢٢٣-٢١٩	الفصل الخامس والثلاثون
حجوم الأجسام ذات المقاطع المثلثية	٢٢٦-٢٢٤	الفصل السادس والثلاثون
المراكز المتوسطة للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة	٢٣٣-٢٢٧	الفصل السابع والثلاثون
عزوم القصور الذاتي للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة	٢٣٩-٢٣٤	الفصل الثامن والثلاثون
ضغط السائل	٢٤٤-٢٤٠	الفصل التاسع والثلاثون
الشغل	٢٤٨-٢٤٥	الفصل الأربعون
طول قوس	٢٥٢-٢٤٩	الفصل الحادى والأربعون
مساحة السطح الدورانى	٢٥٦-٢٥٣	الفصل الثانى والأربعون
المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتي لأقواس المنحنيات والسطوح الدورانية	٢٦٠-٢٥٧	الفصل الثالث والأربعون
مساحات السطوح المستوية ومراكزها المتوسطة فى الاحداثيات القطبية	٢٦٥-٢٦١	الفصل الرابع والأربعون
أطوال الأقواس ومراكزها المتوسطة. مساحات السطوح الدورانية. فى الاحداثيات القطبية	٢٧٠-٢٦٦	الفصل الخامس والأربعون
التكاملات المعتلة	٢٧٧-٢٧١	الفصل السادس والأربعون
المتواليات والمتسلسلات غير المنتهية (اللانهائية)	٢٨٣-٢٧٨	الفصل السابع والأربعون
اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الموجبة	٢٩١-٢٨٤	الفصل الثامن والأربعون
المتسلسلات ذات الحدود السالبة	٢٩٥-٢٩٢	الفصل التاسع والأربعون
الحساب بالمتسلسلات	٣٠١-٢٩٦	الفصل الخمسون
متسلسلات القوى	٣٠٨-٣٠٢	الفصل الحادى والخمسون
فك الدوال فى متسلسلات	٣١٥-٣٠٩	الفصل الثانى والخمسون
صيغ ماكلورين وتايلور مع البواقي	٣١٩-٣١٦	الفصل الثالث والخمسون
حسابات عددية باستخدام متسلسلات قوى	٣٢٣-٣٢٠	الفصل الرابع والخمسون
القيمة التقريبية للتكامل	٣٢٨-٣٢٤	الفصل الخامس والخمسون
المشتقات الجزئية	٣٣٥-٣٢٩	الفصل السادس والخمسون

الصفحة	الفصل
٣٤٤-٣٣٦	الفصل السابع والخمسون
٣٤٨-٣٤٥	الفصل الثامن والخمسون
٣٥٥-٣٤٩	الفصل التاسع والخمسون
٣٦٣-٣٥٦	الفصل الستون
٣٧٧-٣٦٤	الفصل الحادى والستون
٣٩١-٣٧٨	الفصل الثانى والستون
٣٩٩-٣٩٢	الفصل الثالث والستون
٤٠٥-٤٠٠	الفصل الرابع والستون
٤٠٩-٤٠٦	الفصل الخامس والستون
٤١٤-٤١٠	الفصل السادس والستون
٤٢٤-٤١٥	الفصل السابع والستون
٤٢٩-٤٢٥	الفصل الثامن والستون
٤٣٦-٤٣٠	الفصل التاسع والستون
٤٤١-٤٣٧	الفصل السبعون
٤٥٠-٢٤٢	المصطلحات
٤٥٤-٤٥١	الفهرس

الفصل الأول

« المتغيرات والدوال »

تتكون مجموعة الأعداد الحقيقية من الأعداد القياسية ، أى الأعداد الصحيحة (الموجبة والسالبة والصفر والكسور العادية a/b حيث a و b عدنان صحيحان) ومن الأعداد غير القياسية (الكسور العشرية غير المنتهية ، مثل $\pi = 3.141559\dots$ و $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ التى ليست نسباً بين أعداد صحيحة) .

لا تلعب الأعداد الجبرية التخيلية دوراً هنا واستعمالنا لهذا المصطلح فقط يرجع إلى أن هذه الأعداد غير متضمنة ، وحيث أنه لا مكان للالتباس فإن مصطلح العدد سيستعمل فيما يلى ليدل على عدد حقيقى .

تعرف القيمة المطلقة أو العددية ($|N|$) لعدد (حقيقى) N فإن :

$$\begin{aligned} |N| &= N & \text{إذا كان } N \text{ صفراً أو عدداً موجباً.} \\ |N| &= -N & \text{إذا كان } N \text{ عدداً سالباً.} \end{aligned}$$

$$\text{فمثلاً } |3| = |-3| = 3, |3-5| = |5-3| = 2$$

$$\begin{aligned} x \geq a & \quad \text{إذا كانت} & |x-a| &= x-a \\ x < a & \quad \text{إذا كانت} & |x-a| &= a-x \end{aligned}$$

وعموماً إذا كانا a و b أى عددين فإن

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

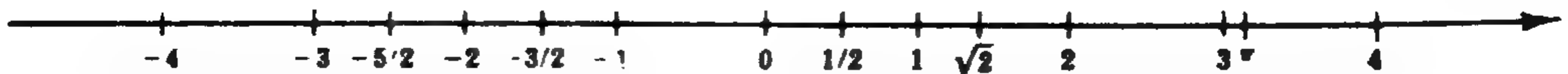
$$|a \pm b| = |b \pm a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0;$$

$$|a+b| \geq |a| - |b|; \quad |a-b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|; \quad |a-b| \geq |a| - |b|.$$

السلم العددي : هو تمثيل بياني للأعداد الحقيقية بواسطة نقط الخط المستقيم ، فكل عدد يقابل نقطة (ونقطة واحدة فقط) وبالعكس ، وعلى هذا فإن مصطلحى عدد ونقطة (على السلم العددي) يستعملان دون تمييز لأحدهما على الآخر .

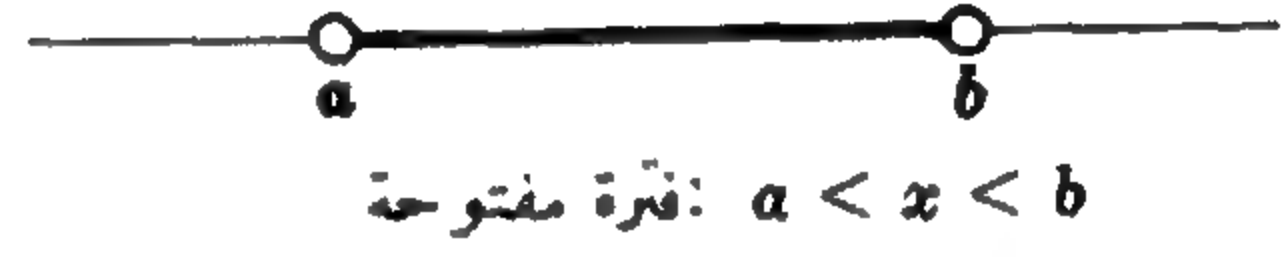
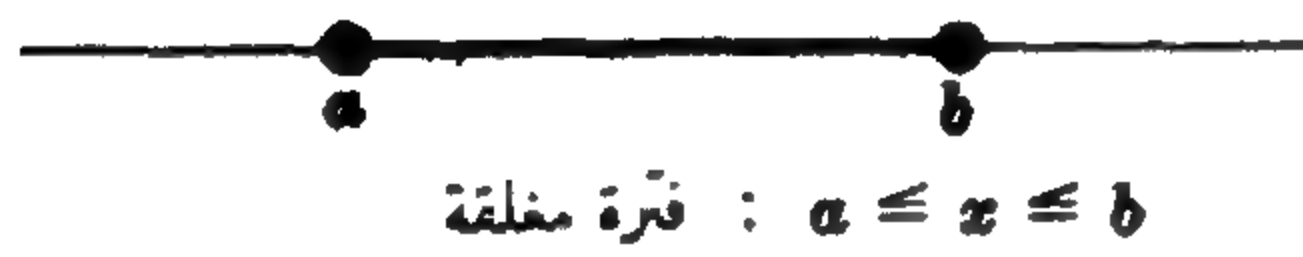
ولتمثيل سلم عددي على مستقيم مفروض (i) نختار نقطة ما من نقطة المستقيم كنقطة أصل (مقابلة للعدد 0) . (ii) نختار اتجاهًا نعتبره موجباً (نرمز له برأس سهم) . (iii) نحدد بالإستعانة بوحدة قياس مناسبة النقطة 1 + التى تبعد عن 0 بوحدة المسافة . عندئذ يكون العدنان (النقطتان) $-N$ و $+N$ على جهتين متقابلتين بالنسبة لـ 0 وتبعدان $|N|$ وحدة عنه .



إذا كان a و b عددين مختلفين ، عندئذ تعني $a < b$ أن a على يسار b في السلم بينما تعني $a > b$ أن a على يمين b .
وأما المسافة الموجهة من a إلى b فتعطي بـ $b - a$ وتكون سالبة إذا كان $a > b$ وموجبة إذا كان $a < b$ وفي كلا الحالتين تكون b على المسافة غير الموجهة $|a - b| = |b - a|$ من a .

الفترات المحددة : ليكن a و b عددين بحيث يكون $a < b$ تسمى مجموعة جميع الأعداد x بين a و b بالفترة المفتوحة من a إلى b وتكتب بالشكل $a < x < b$ ، وتسمى النقطتان a و b بنقطتي النهاية للفترة . والفترة المفتوحة لا تتضمن نقطتي نهايتها .

تسمى الفترة المفتوحة $a < x < b$ بالإضافة إلى نقطتي نهايتها a و b بالفترة المغلقة من a إلى b وتكتب $a \leq x \leq b$



الفترات غير المحددة : ليكن a عدداً ما . نسمى مجموعة جميع الأعداد x التي تحقق العلاقة $x < a$ بالفترات غير المحددة . يمكن تعريف فترات غير محددة أخرى بـ $x \leq a$ و $x > a$ و $x \geq a$. (أنظر المسألتين ١ - ٢)

الثابت والمتغير : نلاحظ في تعريف الفترة $a < x < b$ أن :

(i) كلا من الرمز a و b يمثل عدداً واحداً يسمى ثابتاً .

(ii) أما الرمز x فيمثل أي عدد من مجموعة من الأعداد ويسمى متغيراً . .

وتعبير مدى المتغير هو اسم آخر لهذه المجموعة من الأعداد التي يمثلها هذا المتغير ، مثال ذلك :

(١) x هو مجلد من مجموعة كتب من عشرة مجلدات ، إذن مدى x هو مجموعة الأعداد الصحيحة 1, 2, 3, ..., 10

(٢) x هو يوم من شهر يوليو (تموز) ، إذن مدى x هو المجموعة 1, 2, 3, ..., 31

(٣) x هي كمية الماء (بالليترات) التي يمكن سحبها من خزان مملوء سعة أربعون لتراً ، إذن مدى x هو الفترة

$$0 \leq x \leq 40$$

المتباينات : مثل $2x - 3 > 0$ و $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ وهي تحدد فترات على السلم العددي .

مثال ١ : حل المتباينة (أ) $2x - 3 > 0$ ، (ب) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$.

(أ) ضع $2x - 3 = 0$ فتحصل على $x = 3/2$ اعتبر بعد ذلك الفترتين $x < 3/2$ ، $x > 3/2$.

لأية قيمة لـ x في الفترة $x < 3/2$ ، $x = 0$ مثلاً ، نجد أن $2x - 3 < 0$ ولأية قيمة لـ x في الفترة $x > 3/2$ ،

$x = 3$ مثلاً ، نجد أن $2x - 3 > 0$ وعلى هذا فإن $2x - 3 > 0$ لجميع قيم x في الفترة $x > 3/2$.

(ب) ضع $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8) = 0$ ، فتحصل على $x = -3$ و $x = 8$ واعتبر الفترات

$x < -3$ ، $-3 < x < 8$ ، و $x > 8$ فنجد أن $x^2 - 5x - 24 > 0$ في الفترتين $x < -3$ و $x > 8$

في حين أن $x^2 - 5x - 24 < 0$ في الفترة $-3 < x < 8$. ولهذا يكون $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ في الفترة

$-3 \leq x \leq 8$.

أنظر المسألة ٣

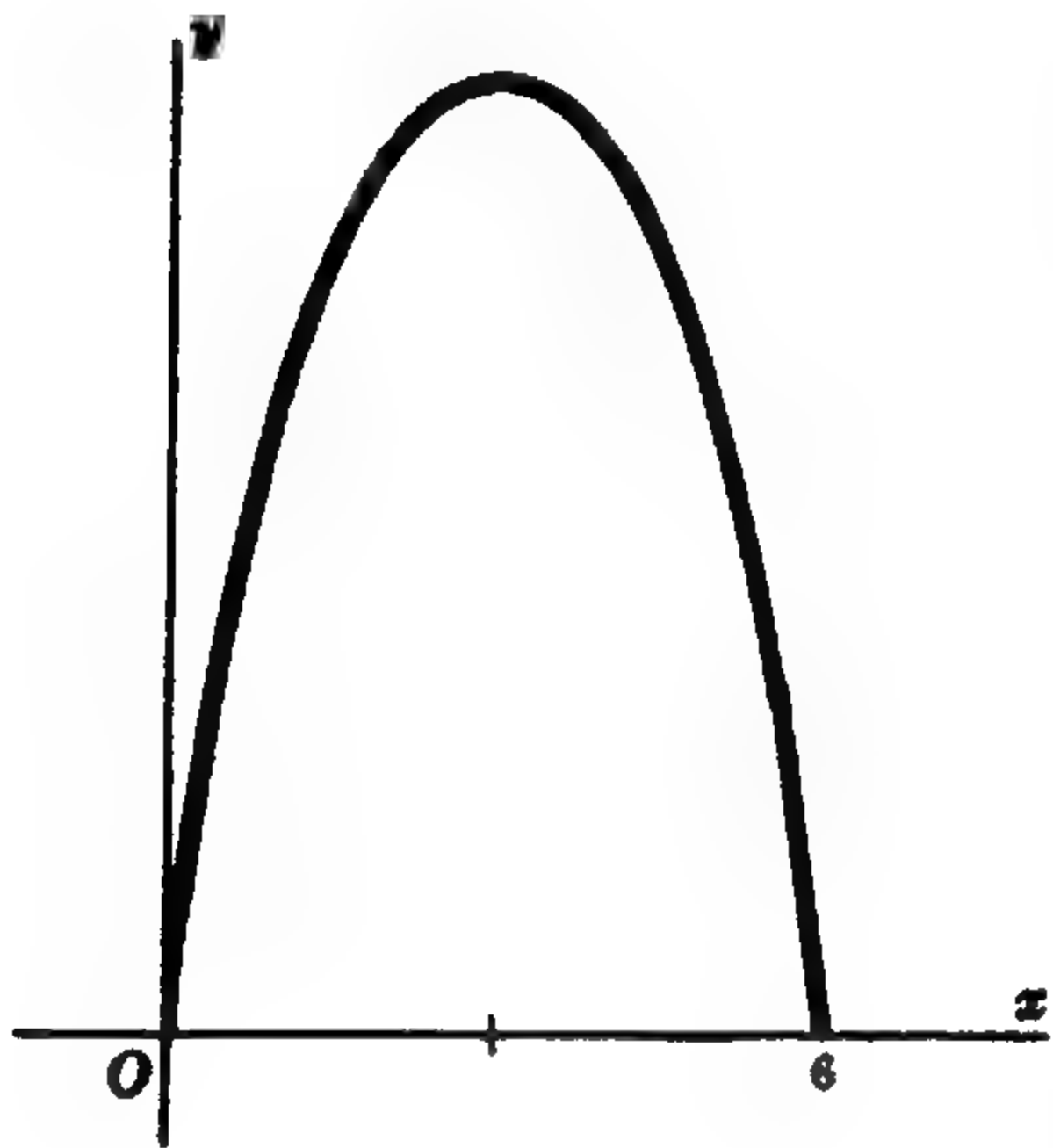
دالة المتغير : نقول عن متغير y إنه دالة لمتغير آخر x إذا أعطيت قاعدة أو وسيلة بحيث تقابل كل قيمة لـ x في مداها قيمة لـ y . يسمى المتغير y الذي تعتمد قيمته على القيمة التي نختارها لـ x ، متغيراً غير مستقل في حين يسمى x متغيراً مستقلاً. أما القاعدة أو الوسيلة فقد تكون جدولاً للقيمة المتقابلة (جدول اللوغاريتمات مثلاً) أو بياناً أو معادلة.

مثال ٢ : في المعادلة $y = 10 - x^2$ ، حيث x متغير مستقل، تقرر قيمة لـ y مع كل قيمة لـ x والدالة المعروفة هي $y = 10 - x^2$ ولنفس المعادلة إذا أخذنا y متغيراً مستقلاً، فإن قيمتين لـ x بوجه عام تقابل كل قيمة لـ y . وهذا يتعرف لدينا، دالتان لـ y هما $x = \sqrt{10 + y}$ و $x = -\sqrt{10 + y}$.

يعرف بعض المؤلفين y على أنها دالة لـ x عندما تقرر بكل قيمة لـ x في مداها قيمة واحدة أو أكثر لـ y عندئذ تسمى y في المثال ٢، دالة وحيدة القيمة في x بينما تسمى x دالة مضاعفة التقييم (بعبارة أدق، دالة ثنائية القيمة) في y وعلى كل فإنه في الحساب التفاضل والتكامل، علينا أن نعتبر أن الدالة المضاعفة القيمة مكونة من عدة دوال وحيدة القيمة. عندئذ يكون تعريفنا لمصطلح دالة معدلاً بحيث ينطوي على هذه الخاصية لوحدة (وحدانية) القيمة.

يستعمل الرمز $f(x)$ ، والذي يقرأ الدالة f لـ x أو f لـ x ولكنه لا يقرأ أبداً x مرة f ، ليشير إلى دالة مفروضة في x وإذا صادف أن تضمنت المسألة دالة أخرى لـ x فعندئذ ينبغي أن نستعمل رمزا آخر مثال $\theta(x), F(x), h(x), g(x)$ ومن الضروري عند دراسة الدالة $y = f(x)$ أن نعرف دوماً مدى المتغير المستقل والذي نسميه حينه (مجال) التعريف للدالة.

مثال ٣ :



(أ) الدالة $f(x) = 18x - 3x^2$ معرفة لكل عدد x ، أي أن $18x - 3x^2$ هو عدد حقيقي، بدون استثناء، طالما x عدد حقيقي، وعلى هذا فإن مدى x أو حيز التعريف للدالة هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية.

(ب) المساحة (y) لمستطيل مفروض طول أحد أضلاعه x هي $y = 18x - 3x^2$ هنا ينبغي أن يكون كل من $x, 18x - 3x^2$ موجبا.

ويتضح من الشكل المرافق أو من المسألة ٣ (أ) أن حيز التعريف هو الفترة $0 < x < 6$.

(ج) حيز التعريف للدالة $y = 10 - x^2$ في المثال (٢) هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. أما بالنسبة للدالتين $x = \sqrt{10 + y}$ و $x = -\sqrt{10 + y}$ فينبغي أن يكون $10 + y \geq 0$ ، وحيز التعريف، إذن، لكل منهما هو $y \geq -10$.

شكل ١ - ١

نقول عن دالة $f(x)$ إنها معرفة في فترة ما إذا كانت معرفة لكل نقطة من نقاط الفترة. وإذا كانت $f(x)$ دالة مفروضة لـ x وكانت a من حيز تعريفها فعندئذ نعي بـ $f(a)$ العدد الذي نحصل عليه باستبدال x بـ a في $f(x)$ أو القيمة التي تتخذها $f(x)$ عندما $x = a$.

مثال ٤ : إذا كان $f(x) = x^3 - 4x + 2$ ، فعندئذ يكون

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1,$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2,$$

$$f(a) = a^3 - 4a + 2, \text{ etc.}$$

أنظر المسائل (٤ - ١٣).

المتابعة (المتوالية) غير المنتهية : هي دالة لمتغير (نرمرله عادة بـ n) يقتصر مداه على مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة . فثلا إذا أعطينا n القيمة $1, 2, 3, 4, \dots$ على الترتيب فإن الدالة $\frac{1}{n+1}$ تعطي متتابعة أو متوالية الحدود $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ونقول عن المتوالية إنها متوالية لا نهائية لتعني بذلك أنه لا يوجد لها حد أخير .

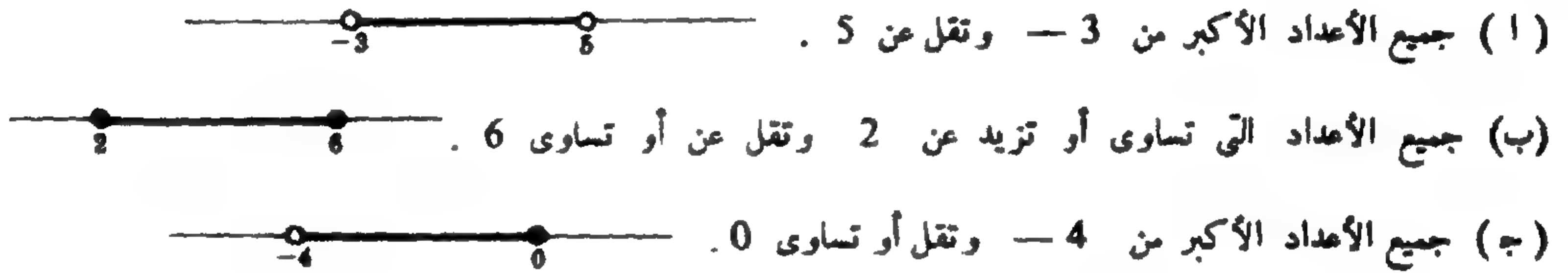
نسى الدالة ، مثل $\frac{1}{n+1}$ في الفقرة السابقة ، الحد العام أو الحد n للمتوالية ، ويشار للمتوالية غير المنتهية بوضع حدها العام بين قوسين مثل $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ أو بكتابة عدة حدود من المتوالية مثل $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+1}$.

انظر المسألتين ١٤ - ١٥

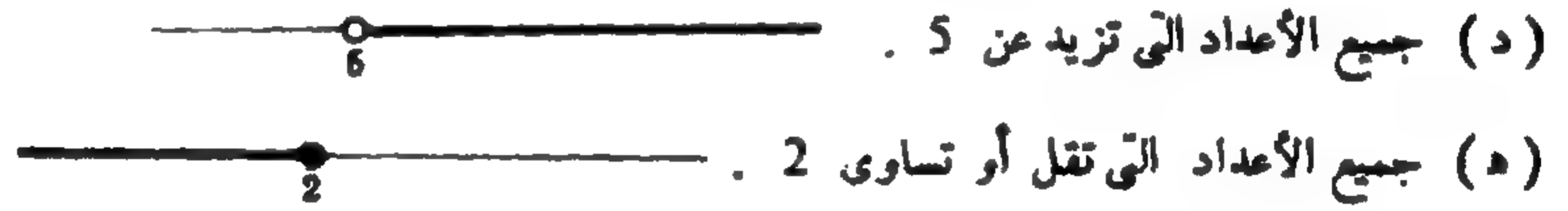
مسائل محلولة

١ - صف الفترات (أ) $-3 < x < 5$ ، (ب) $2 \leq x \leq 6$ ، (ج) $-4 < x \leq 0$ ، (د) $x > 5$ ، (هـ) $x \leq 2$.

وارسمها بيانيا



هذه الفترة المحددة تتضمن إحدى نقط النهاية فقط دون النقطة الأخرى ، وتدعى فترة نصف مفتوحة .



٢ - صف الفترات التالية وارسمها بيانيا :

(أ) $|x| < 2$ ؛ (ب) $|x| > 3$ ؛ (ج) $|x-3| < 1$ ؛ (د) $|x-2| < \delta, \delta > 0$ ؛ (هـ) $|x+3| < \delta, \delta > 0$.

(أ) هي الفترة المفتوحة . $-2 < x < 2$.

(ب) فترتان غير محددتين هما $x > 3$ و $x < -3$.

(ج) فترة مفتوحة حول النقطة 3 ولإيجاد نقطى نهايتها نضع $x-3 = 1$ فنجد أن $x = 4$ ونضع $x-3 = -1$ فنجد أن $x = 2$. تذكر أن $|x-3|$ تساوي $x-3$ أو $3-x$ على حسب قيمة x . وإذن نقطتا النهاية هما 2 ، 4 ، والفترة هي $2 < x < 4$. لاحظ أن هذه الفترة تتكون من جميع النقط التي يكون بعدها عن 3 أقل من 1 .



(د) لتصور δ عددا موجبا مفروضا ، عندئذ تتكون الفترة $2-\delta < x < 2+\delta$ من جميع النقط التي يكون بعدها عن 2 أقل من δ . وتسمى هذه الفترة δ - المجاورة للعدد 2 .



(أ) المتباينة $|x + 3| < \delta$ تعرف الفترة $-3 - \delta < x < -3 + \delta$ والتي تشمل العدد -3 والشرط الإضافي $|x + 3| < 0$ يتطلب أن تكون $x = -3$. وهكذا فإن مدى x يتكون من فترتين مفتوحتين هما $-3 - \delta < x < -3$ و $-3 < x < -3 + \delta$ وتشكل الفترتين جوار محنوف δ للعدد -3 .



٣- حل المتباينات : (أ) $18x - 3x^2 > 0$, (ب) $(x + 3)(x - 2)(x - 4) < 0$, (ج) $(x + 1)^2(x - 3) > 0$.

(أ) ضع $0 = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x)$ لنجد أن $x = 0$ و $x = 6$ ثم عين إشارة $18x - 3x^2$ في كل من الفترات $x < 0$ و $0 < x < 6$ و $x > 6$ فنجد أن المتباينة تتحقق لجميع قيم x في الفترة $0 < x < 6$.

(ب) بعد تحديد إشارة $(x + 3)(x - 2)(x - 4)$ في كل من الفترات $x < -3$, $-3 < x < 2$, $2 < x < 4$, و $x > 4$, نستنتج أن المتباينة تتحقق لجميع قيم x في الفترتين $x < -3$ و $2 < x < 4$.

(ج) الفترات التي ينبغي البحث فيها هي $x > 3$, $-1 < x < 3$, و $x < -1$. والمتباينة تتحقق عندما $x > 3$. لاحظ أن $(x + 1)^2 > 0$ مهما كانت x ولذلك يمكننا إهمال هذا المضروب. ترى هل يمكن كذلك إهمال المضروب $(x + 1)^3$ ؟

٤- لنفرض $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$ أوجد $f(x+h)$ و $f(1/x)$ و $f(2a)$ و $f(-1)$ و $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}, \quad f(-1) = \frac{-1-1}{1+2} = -\frac{2}{3}, \quad f(2a) = \frac{2a-1}{4a^2+2}$$

$$f(1/x) = \frac{1/x-1}{1/x^2+2} = \frac{x-x^3}{1+2x^3}, \quad f(x+h) = \frac{x+h-1}{(x+h)^2+2} = \frac{x+h-1}{x^2+2hx+h^2+2}$$

٥- إذا كان $f(x) = 2^x$ بين أن (أ) $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2}f(x)$ (ب) $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$.

$$\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \frac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = f(4) \quad (ب) \quad f(x+3) - f(x-1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x(2^3 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}f(x) \quad (أ)$$

٦- إذا كان $f(x) = \log_a 1/x$ فبين أن (أ) $f(a^3) = -3$ (ب) $f(a^{-1/2}) = 1/2$.

$$f(a^3) = \log_a 1/a^3 = \log_a a^{-3} = -3 \quad (أ) \quad f(a^{-1/2}) = \log_a 1/a^{-1/2} = \log_a a^{1/2} = 1/2 \quad (ب)$$

٧- إذا كان $f(x) = \log_a x$ و $F(x) = a^x$ فبين أن $F(f(x)) = f(F(x))$.

$$F(f(x)) = F(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = \log_a a^x = f(a^x) = f(F(x)).$$

٨- عين مدى المتغير المستقل بفرض :

$$(أ) y = \sqrt{4-x^2}, \quad (ب) y = \sqrt{x^2-16}, \quad (ج) y = \frac{1}{x-2}, \quad (د) y = \frac{1}{x^2-9}, \quad (هـ) y = \frac{x}{x^2+4}$$

(أ) بما أنه ينبغي أن تكون y حقيقية فإن $4 - x^2 \geq 0$ أو $x^2 \leq 4$ ومدى x هو الفترة $-2 \leq x \leq 2$ أو $|x| \leq 2$. وبعبارة أخرى فإن $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ معرفة على الفترة $-2 \leq x \leq 2$ وعلى هذه الفترة فقط.

(ب) يكون هنا $0 \leq x^2 - 16$ أو $x^2 \geq 16$ ويتكون مدى x من الفترتين $x < -4$ و $x \geq 4$ أو $|x| \geq 4$.

(ج) إن الدالة معرفة لجميع قيم x باستثناء $x = 2$ ويمكن أن يكون مدى x هو $x < 2$ أو $x > 2$ أو $x \neq 2$.

(د) الدالة معرفة من أجل $x \neq \pm 3$.

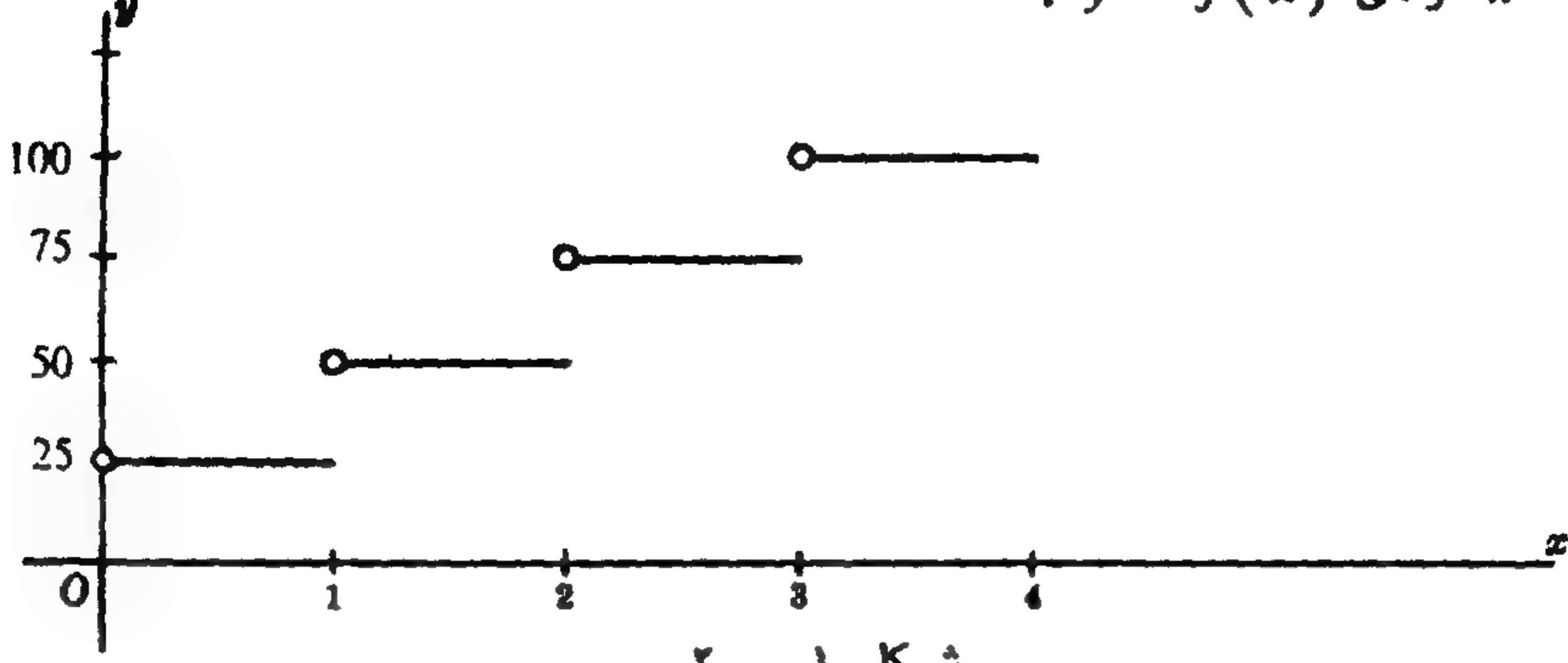
(هـ) بما أن $x^2 + 4 \neq 0$ لجميع قيم x فإن مدى x هو فئة الأعداد الحقيقية.

٩ - ارسم بيانيا الدالة المعرفة بالآتي :

$$f(x) = 5 \text{ عندما } 0 < x \leq 25 \quad . \quad f(x) = 10 \text{ عندما } 25 < x \leq 50$$

$$f(x) = 15 \text{ عندما } 50 < x \leq 75 \quad . \quad f(x) = 20 \text{ عندما } 75 < x \leq 100$$

وهكذا عين مدى x ومدى $y = f(x)$.

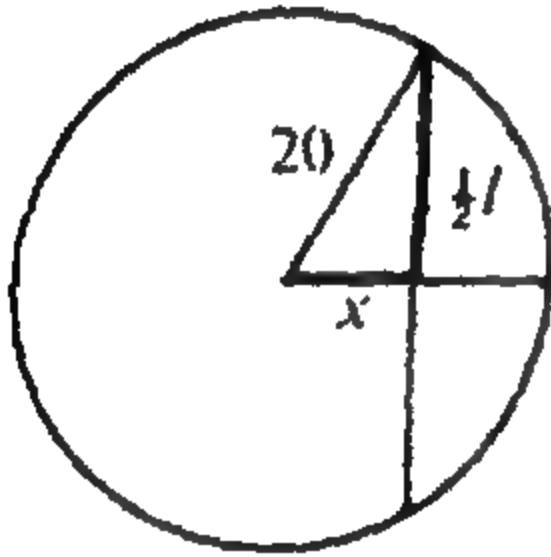


شكل ١ - ٢

تعبّر الدالة $f(x)$ عن التكلفة (مقدرة بالسنتات) للبريد الداخلى من الدرجة الأولى للرسالة (أو للطرء) التي وزنها x gm . إن مدى x هو الفترة $x > 0$ ومدى $y = f(x)$ هو مجموعة الأعداد الصحيحة 25, 50, 75, 100,

١٠ - يلزم لإحاطة قطعة أرض مستطيلة 600 m من السياج . فإذا كان أحد الأبعاد x m ، فعبّر عن المساحة y (m^2) كدالة لـ x . عين مدى x .

بما أن أحد الأبعاد x فإن البعد الآخر يكون $300 - x$. $\frac{1}{2}(600 - 2x) = 300 - x$.
وبذلك تكون المساحة $y = x(300 - x)$ ويكون مدى x : $0 < x < 300$.

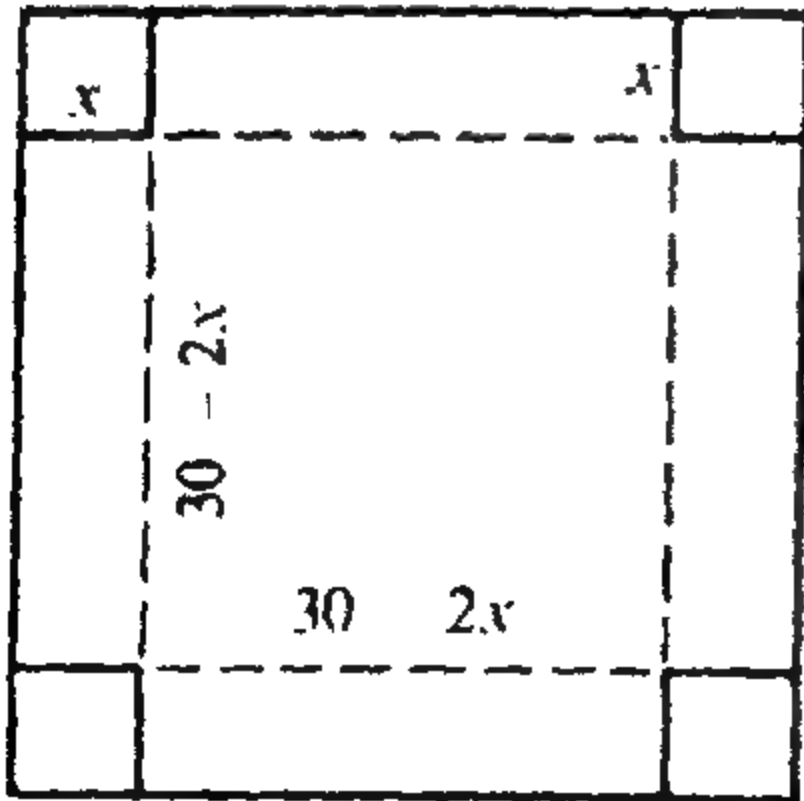


١١ - عبر عن الطول l لوتر دائرة نصف قطرها 20 cm كدالة لبعد الوتر عن مركز الدائرة وليكون x cm . عين مدى x .

من الشكل ١ - ٣ يتضح أن $\frac{1}{2}l = \sqrt{400 - x^2}$ و $l = 2\sqrt{400 - x^2}$.
ويكون مدى x هو الفترة $0 \leq x < 20$.

شكل ١ - ٣

١٢ - إذا قطع من كل ركن من أركان مربع من القصدير ، طول ضلعه 30 cm ؛
مربعا صغيرا طول ضلعه x cm ثم ثنيّا الحواف لتشكل علبة مفتوحة . عبر عن
الحجم V (m^3) كدالة لـ x ثم ابحث في مدى كل متغير .



إن قاعدة العلبة مربع طول ضلعه $(30 - 2x)$ cm وارتفاعها x cm إذن
حجمها : $V = x(30 - 2x)^2 = 4x(15 - x)^2$. ومدى x هو الفترة $0 < x < 15$.

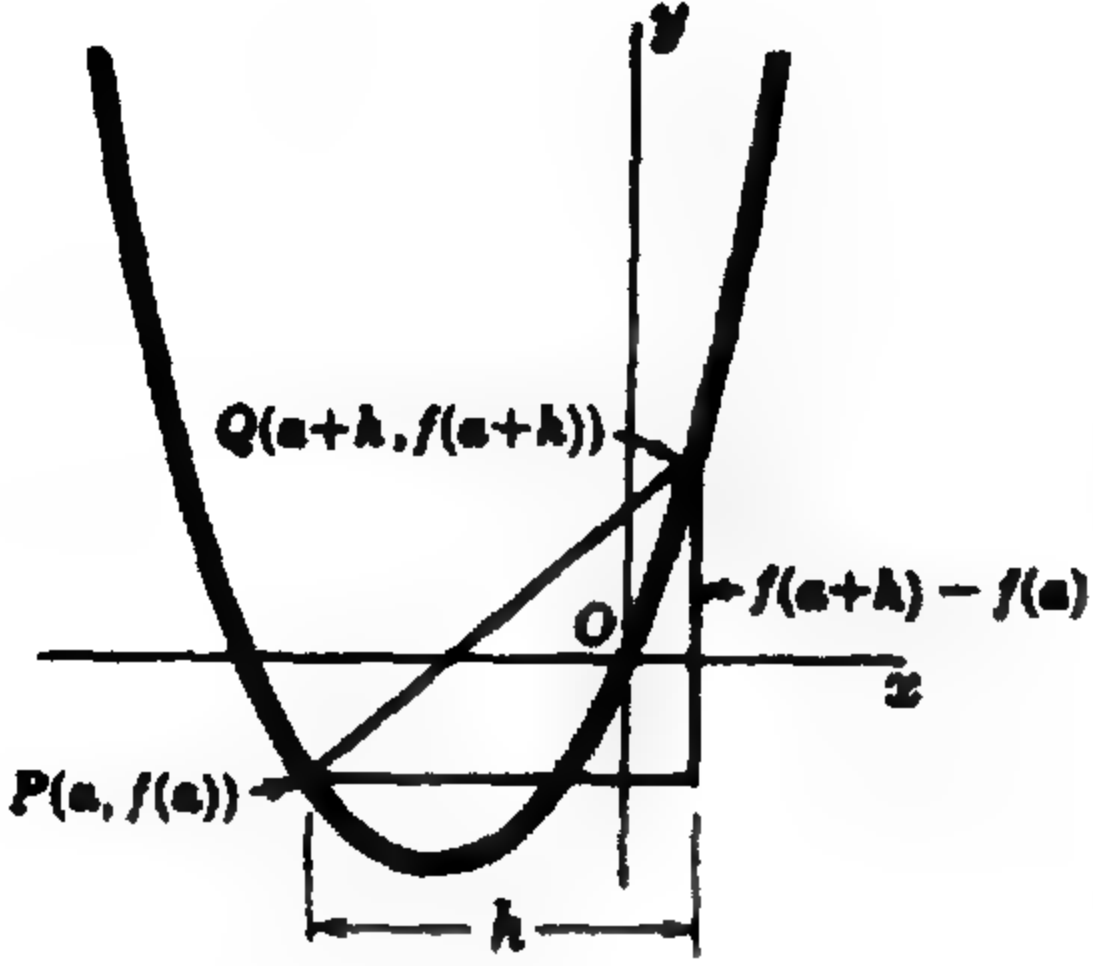
وعندما تزداد x في مداها فإن V تزداد لبرهة ثم تتناقص بعدها . على هذا
فإنه من بين العلب التي يمكن تصميمها توجد واحدة ذات أكبر حجم .

وليكن هذا الحجم M ، لتعيين M ينبغي أن نحدد بدقة النقطة (قيمة x) التي تقف
فيها V عن الزيادة وسوف ندرس هذه المسألة في فصل آخر .

شكل ١ - ٤

١٣ - إذا كان $f(x) = x^2 + 2x$ ، فأوجد $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ثم فسر النتيجة .

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h} \\ &= 2a + 2 + h \end{aligned}$$



حدد على بيان الدالة (شكل ١ - ٥) موضعى النقطتين P و Q .

الذين احداثيهما السينيان هما a ، $a+h$ على الترتيب .

والإحداثى الصادى لـ P هو $f(a)$ ولـ Q هو $f(a+h)$ عندئذ تكون :

$$\text{ميل } PQ = \frac{\text{فرق الإحداثى الصادى}}{\text{فرق الإحداثى السينى}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شكل ١ - ٥

١٤ - اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتوالات التالية :

$$(١) \quad \left\{ 1 - \frac{1}{2^n} \right\} . \text{ ضع } s_n = 1 - \frac{1}{2^n}; \text{ فتجد } s_1 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = 9/10, \quad s_3 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}, \quad s_4 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}, \quad s_5 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{7}{8},$$

والحدود المطلوبة هي $1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10$.

$$(ب) \quad \left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1} \right\} . \text{ هنا } s_1 = (-1)^2 \frac{1}{3 \cdot 1 - 1} = 1/2,$$

$$s_2 = (-1)^3 \frac{1}{3 \cdot 2 - 1} = -1/5, \quad s_3 = (-1)^4 \frac{1}{3 \cdot 3 - 1} = 1/8,$$

$$s_4 = -1/11, \quad s_5 = 1/14. \text{ والحدود المطلوبة هي } 1/2, -1/5, 1/8, -1/11, 1/14.$$

$$(ج) \quad \left\{ \frac{2n}{1+n^2} \right\} . \text{ الحدود هي } 1, 4/5, 3/5, 8/17, 5/13.$$

$$(د) \quad \left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \right\} . \text{ والحدود هي } \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{-2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{-4}{5 \cdot 6}, \frac{5}{6 \cdot 7}.$$

$$(هـ) \quad \left\{ \frac{1}{2} [(-1)^n + 1] \right\} . \text{ الحدود هي } 0, 1, 0, 1, 0.$$

١٥ - اكتب الحد العام لكل من المتوالات الآتية :

$$(١) \quad 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, \dots$$

الحدود هي مقلوبات الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة والحد العام هو $\frac{1}{2n-1}$.

$$(ب) \quad 1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, \dots$$

إن هذه الحدود ، بغض النظر عن الإشارة ، هي مقلوب الأعداد الصحيحة الموجبة والحد العام هو

$$(-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{أو} \quad (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$(ج) \quad 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \dots$$

أن هذه الحدود هي مقلوبات مربعات الأعداد الموجبة والحد العام هو $1/n^2$.

$$(د) \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} . \text{ والحد العام هو } \frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \dots$$

$$(٥) \quad 1/2, -4/9, 9/28, -16/65, \dots$$

إن البسط بغض النظر عن الإشارة ، هو مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة والمقامات هي مكعبات هذه الأعداد الصحيحة

بعد إضافة 1 لها ، والحد العام هو $(-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$.

$$١٦- \text{برهن أنه إذا كان } a \text{ و } b \text{ أي عددين فإن } |a+b| \leq |a| + |b|.$$

اعتبر الحالات الآتية (أ) كلا من a و b غير سالب (ب) كلا من a و b سالب (ج) أحد العددين a و b موجبا والآخر سالباً .

$$(١) \text{ بما أن } |a| = a, |b| = b \text{ فإن } a+b \text{ صفرا أو عددا موجبا وبالتالي فإن :}$$

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|$$

$$(ب) \text{ بما أن } |a| = -a, |b| = -b \text{ فإن } a+b \text{ عدد سالب وبالتالي فإن :}$$

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|$$

$$(ج) \text{ لنأخذ } a > 0, b < 0 \text{ فمتدئ يكون } |a| = a, |b| = -b$$

$$\text{فإذا كان } |a| > |b| \text{ فإن } |a+b| = a+b < a-b = |a| + |b|.$$

$$\text{وإذا كان } |a| < |b| \text{ فإن } |a+b| = -a-b < a-b = |a| + |b|.$$

$$\text{وإذا كان } |a| = |b| \text{ فإن } |a+b| = 0 < |a| + |b|.$$

$$\text{ومكذا إذا كان } a > 0 \text{ و } b < 0 \text{ أو إذا كان } a < 0 \text{ و } b > 0 \text{ فإن } |a+b| < |a| + |b|.$$

مسائل إضافية

١٧- ارسم بيان كل من الفترات الآتية :

$$(١) \quad -5 < x < 0 \quad (ب) \quad x \leq 0 \quad (ج) \quad -2 \leq x < 3 \quad (د) \quad x \geq 1$$

$$(٥) \quad |x| < 3 \quad (و) \quad |x| \geq 5 \quad (ز) \quad |x-2| < \frac{1}{2} \quad (ح) \quad |x+3| > 1$$

$$(ط) \quad 0 < |x-2| < 1 \quad (ى) \quad 0 < |x+3| < \frac{1}{4} \quad (ك) \quad |x-2| \geq 1$$

$$١٨- \text{إذا كان } f(x) = x^2 - 4x + 6 \text{ فأوجد (أ) } f(0), (ب) f(3), (ج) f(-2)$$

$$\text{ج : (أ) } 6, (ب) 3, (ج) 18 \text{ برهن أن } f(\frac{1}{2}) = f(7/2) \text{ و } f(2-h) = f(2+h).$$

$$١٩- \text{إذا كان } f(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ فأوجد (أ) } f(0), (ب) f(1), (ج) f(-2)$$

$$\text{ج : (أ) } -1, (ب) 0, (ج) 3.$$

$$\text{برهن أن } f(1/x) = -f(x) \text{ و } f(-1/x) = -1/f(x).$$

$$٢٠- \text{إذا كان } f(x) = x^2 - x \text{ فبرهن أن } f(x+1) = f(-x).$$

$$٢١- \text{إذا كان } f(x) = 1/x \text{ فبرهن أن } f(a) - f(b) = f\left(\frac{ab}{b-a}\right).$$

$$٢٢- \text{إذا كان } y = f(x) = (5x+3)/(4x-5), \text{ فبرهن أن } x = f(y).$$

٢٣ - عين حيز التعريف لكل من النوال الآتية :

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad (ج) \quad y = \frac{2x}{(x-2)(x+1)} \quad (أ) \quad y = \sqrt{x^2-4} \quad (د) \quad y = x^2+4 \quad (ب)$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \quad (أ) \quad y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \quad (د) \quad y = \frac{x}{x+3} \quad (ب) \quad y = \sqrt{x^2+4} \quad (ج)$$

ج : (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) جميع قيم x ، (ج) ، (د) $|x| \geq 2$ ، (أ) $x \neq -3$ ، (ب) $x \neq -1, 2$ ، (ج) $-3 < x < 3$ ، (أ) $0 \leq x < 2$

٢٤ - احسب $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ بفرض أن (أ) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما $a \neq 2$ ، $a+h \neq 2$ ، (ب) $f(x) = \sqrt{x-4}$ عندما $a \neq -1$ ، $a+h \neq -1$.

عندما $a \geq 4$ ، $a+h \geq 4$: (ج) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، (أ) $a \geq 4$ ، $a+h \geq 4$ ، (ب) $a \neq -1$ ، $a+h \neq -1$.

$$ج : (أ) : \frac{-1}{(a-2)(a+h-2)} \quad (ب) : \frac{1}{\sqrt{a+h-4} + \sqrt{a-4}} \quad (ج) : \frac{1}{(a+1)(a+h+1)}$$

٢٥ - اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متوالية مما يلي :

$$(أ) \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\} \quad (ج) \{a + (n-1)d\} \quad (أ) \left\{ \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \right\} \quad (ج) \{(-1)^{n+1} \frac{n!}{n^2}\}$$

$$(ب) \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\} \quad (د) \{(-1)^{n+1} ar^{n-1}\} \quad (ج) \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{n} \right\} \quad (أ) \left\{ \frac{(2n)!}{3^n 5^{n-1}} \right\}$$

$$(أ) 1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{5}, 3/\sqrt{10}, 4/\sqrt{17}, 5/\sqrt{26}$$

$$(أ) : 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5$$

$$(ج) \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 2/3, \frac{1}{3}\sqrt{5}, \sqrt{6}/5$$

$$(ب) 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30$$

$$(ج) 1, -1/2, 2/9, -3/32, 24/625$$

$$(ج) a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$$

$$(أ) \frac{2}{3}, \frac{2^2}{3 \cdot 5}, \frac{2^4}{3 \cdot 5}, \frac{7 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^2}, \frac{7 \cdot 2^9}{3 \cdot 5^2}$$

$$(د) a, -ar, ar^2, -ar^3, ar^4$$

٢٦ - عين الحد العام لكل متوالية :

$$(أ) 1/5^3, 3/5^3, 5/5^3, 7/5^3, 9/5^3, \dots$$

$$(أ) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \dots$$

$$(أ) 1/2!, -1/4!, 1/6!, -1/8!, 1/10!, \dots$$

$$(ب) 1/2, -1/6, 1/12, -1/20, 1/30, \dots$$

$$(ج) 1/2, 1/12, 1/30, 1/56, 1/90, \dots$$

$$ج : (أ) : \frac{n}{n+1}, (ب) : \frac{1}{n^2+n}, (ج) : \frac{1}{(2n-1)2n}, (د) : \frac{2n-1}{5^{2n+1}}, (أ) : \frac{1}{(2n)!} (-1)^{n+1}$$

٢٧ - كلما كان $|x-4| < 1$ فإن $|f(x)| > 1$ ، كلما كانت x بين 3 و 5 فإن $f(x)$ إما أن تكون

أصغر من 1 - أو أكبر من 1 + اشرح كلا مما يلي :

$$(أ) \text{ كلما كان } |x-1| < 2 \text{ فإن } |f(x)| < 10. \quad (ج) \text{ كلما كان } 0 < |x-6| < 1 \text{ فإن } |f(x)| > 0.$$

$$(ب) \text{ كلما كان } |x-5| < 2 \text{ فإن } |f(x)| > 0. \quad (د) \text{ كلما كان } |x-3| < 2 \text{ فإن } |f(x)-9| < 4.$$

٢٨ - اعتبر $y = f(x) = 6x - x^2$ ، ارسم المنحنى البياني وعين أى الفقرات من (أ) إلى (د) فى المسألة

٢٧ صحيحة وأياها خطأ . ج (ب) خطأ

٢٩ - إذا كان a و b أى عددين فين أن $|a+b| \leq |a| + |b|$ ، $|a-b| \geq |a| - |b|$ ، $|a| \cdot |b| = |ab|$ ، $|a/b| = |a|/|b|$ ، $b \neq 0$ ، $|a+b| = |b \pm a|$ ، $|a-b| \leq |a| + |b|$ ، $|a-b| \geq |a| - |b|$.

الفصل الثانى

النهايات

نهاية المتوالية : إذا وقعت النقط المتتالية التى تعطى بحدود المتوالية

(١)

$$1, 3/2, 5/3, 7/4, 9/5, \dots, 2 - 1/n, \dots$$

على السلم العددي فإننا نلاحظ أنها تتجمع حول النقطة 2 بطريقة ما بحيث أننا نجد نقطاً من المتوالية بعدها عن 2 أقل من أى عدد موجب محسوب مهما كان هذا العدد صغيراً .



فمثلاً النقطة 2001/1001 وجميع النقط التى تليها تكون على بعد أقل من 1/1000 عن 2 والنقطة 20000001/10000001 وجميع النقط التى تليها على بعد أقل من 1/1000000 عن 2 وهكذا . نشير إلى هذا الأمر بقولنا إن نهاية المتوالية هي العدد 2 .

وإذا كان x متغيراً ، مداه المتوالية (١) ، فإننا نقول أن x تقترب من 2 كنهاية لها أو أن x تؤول إلى 2 كنهاية لها وتكتب $x \rightarrow 2$.

إن المتوالية (١) لا تحتوى على نهايتها وهي العدد 2 كأحد حدودها أما المتوالية $1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1, \dots$ فإنها تؤول إلى 1 كنهاية لها وأن كل حد فردي يساوى 1 وبذا نرى أنه يمكن للمتوالية أن تبلغ نهايتها وقد لا يمكنها ذلك . غير أننا سنفهم فيما يلى من أن $x \rightarrow a$ تستلزم أن $x \neq a$ أى أنه ينبغى أن ندرك أن أى متوالية مفروضة اختيارية لا تحتوى نهايتها كأحد حدودها .

نهاية الدالة :

لنفترض أن $x \rightarrow 2$ على المتوالية (١) عندئذ $x^2 \rightarrow 4$ فعلى المتوالية $(2 - 1/n)^2, \dots$ لنجعل الآن $x \rightarrow 2$ على المتوالية

(٢)

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \dots, 2 + 1/10^n, \dots$$

فمئذ $x^2 \rightarrow 4$ على المتوالية $(2 + 1/10^n)^2, \dots$ ويبدو من المعقول أن نقبل أن x^2 تقترب من 4 كنهاية لها عندما تقترب x من 2 ونقول تحت هذه الفروض إن نهاية x^2 ، عندما تقترب x من 2 ، تساوى 4 وتكتب $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

أنظر المسألتين ١ - ٢

النهايتان اليسرى واليمنى :

إن قيمة x عندما $x \rightarrow 2$ على المتوالية (١) ، هي باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول x تقترب من 2 من اليسار وتكتب $x \rightarrow 2^-$ وبالمثل قيمة x عندما $x \rightarrow 2$ على المتوالية (٢) هي باستمرار أكبر من 2 . ونقول في مثل هذه الحالة إن x تقترب من اليمين وتكتب $x \rightarrow 2^+$. ومن الواضح أن وجود العبارة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تستلزم وجود تساوى كل من نهاية اليسار $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ونهاية اليمين $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ على أن وجود نهاية اليمين (اليسار) لا يستلزم وجود نهاية اليسار (اليمين) .

مثال ١ :

إن حين التعريف للدالة $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ هو الفترة $-3 \leq x \leq 3$ فإذا كان a أى عدد فى الفترة المفتوحة $-3 < x < 3$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوى $\sqrt{9-a^2}$ ، لنعتبر الآن $a = 3$ ولنجعل x تقترب من 3 من اليسار أولا فنجد أن $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$ أما إذا جعلنا x بعد ذلك تقترب من 3 من اليمين فإننا نجد أن $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة لأن $\sqrt{9-x^2}$ يكون تخيلا عندما $x > 3$ وهكذا نجد أن $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة .

بالمثل نجد أن $\lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9-x^2}$ موجودة ومساوية للصفر ولكن $\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{9-x^2}$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودتين .

نظريات النهايات :

فيما يلي نظريات النهايات التالية للرجوع إليها فيما بعد :

$$I. \text{ إذا كان } f(x) = C \text{ ، ثابتا ، فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

$$\text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ ، } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \text{ ، فإن}$$

$$II. \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = kA \text{ ، حيث } K \text{ أى ثابت}$$

$$III. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$IV. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$V. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ ، بفرض أن } B \neq 0$$

$$VI. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \text{ ، بفرض أن } \sqrt[n]{A} \text{ عدد حقيقى}$$

الانتهية :

نفرض أن مدى المتغير x هو المتولية $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_n, \dots$ إذن

(i) نقول عن x إنها أصبحت لانهاية موجبة $[x \rightarrow +\infty]$ إذا أصبحت في آخر الأمر أكبر من أى عدد موجب مفروض ، مهما كان كبيرا ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً مثال ذلك $x \rightarrow +\infty$ على المتولية $1, 2, 3, 4, \dots$

(ii) نقول عن x إنها أصبحت لانهاية سالبة $[x \rightarrow -\infty]$ إذا أصبحت في آخر الأمر أصغر من أى عدد سالب مفروض ، مهما كان صغيراً وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً . مثال ذلك $x \rightarrow -\infty$ على المتولية $-2, -4, -6, -8, \dots$

(iii) نقول عن x إنها أصبحت لانهاية $[x \rightarrow \infty]$ إذا كان $|x| \rightarrow \infty$ أى إذا كانت $x \rightarrow +\infty$ أو $x \rightarrow -\infty$.

نقول عن دالة $f(x)$ إنها أصبحت لانهاية موجبة عندما $x \rightarrow a$ ، $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \right]$ إذا أصبحت $f(x)$ في آخر الأمر ، عندما تقترب x من نهايتها a (دون أن تبلغ القيمة a) ، أكبر من أى عدد موجب مفروض ، مهما كان كبيرا ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً .

ونقول عن دالة $f(x)$ أنها أصبحت لانهاية سالبة عندما $x \rightarrow a$ $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \right]$ إذا أصبحت $f(x)$ في آخر الأمر ، عندما تقترب x من a (دون أن تبلغ القيمة a) أصغر من أى عدد سالب مفروض ، مهما كان صغيراً ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً .

نقول عن دالة $f(x)$ إنها أصبحت لانهاية عندما $x \rightarrow a$ ، $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \right]$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$.

مثال ٢ :

(أ) عندما $x \rightarrow 2$ على المتولية (١) فإن $f(x) = \frac{1}{2-x} \rightarrow +\infty$ على المتولية $1, 2, 3, 4, \dots$ وعموماً ، إذا

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty \text{ ونكتب } \frac{1}{2-x} \rightarrow +\infty \text{ إذن } x \rightarrow 2^-$$

(ب) عندما $x \rightarrow 2$ على المتولية (٢) فإن $f(x) = \frac{1}{2-x} \rightarrow -\infty$ على المتولية $-10, -100, -1000, -10000, \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty \text{ ونكتب } \frac{1}{2-x} \rightarrow -\infty \text{ إذن } x \rightarrow 2^+ \text{ وعموماً إذا كانت}$$

(ج) عندما $x \rightarrow 2$ على المتولية (١) و (٢) فإن $|f(x)| = \left| \frac{1}{2-x} \right| \rightarrow +\infty$ ونكتب $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2-x} = \infty$

ملاحظة : ليست الرموز $+\infty, -\infty, \infty$ أعداداً جديدة ينبغي أن تضاف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية إنما وضعت هذه الرموز لتدل على نمط خاص لسلوك المتغير أو الدالة . فعندما تزداد قيمة متغير أو دالة على نحو ثابت دون أن تتجاوز

أبدا عددا معيناً M فإن المتغير أو الدالة تقترب من M أو من عدد أصغر كنهاية لها. أما إذا لم يوجد عدد مثل M فإن المتغير أو الدالة تصبح لا نهائية وفي هذه الحالة الأخيرة لا توجد نهاية ويستعمل غالبا رمز نهاية للامته.

انظر المسائل ٣ - ١٢

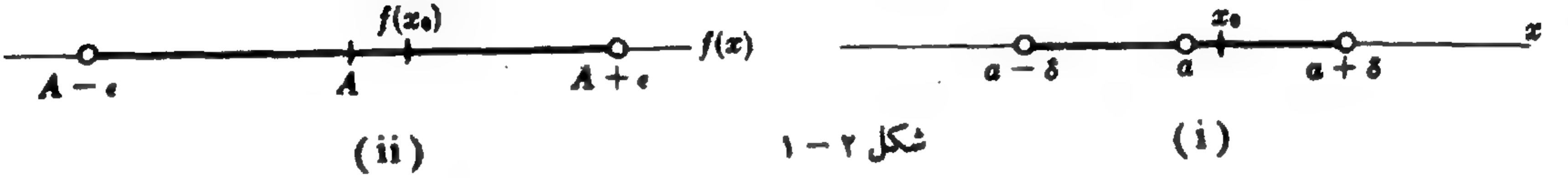
لقد أثبت التعبير : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ باختبار سلوك $f(x)$ عندما $x \rightarrow a$ على عدد من المتواليات.

فإذا سبق أن وجد أن $f(x) \rightarrow A$ في كل حالة عندئذ يكون قد استنتج أنه يمكن الحصول على نفس النتيجة لجميع المتواليات الأخرى (غير المختبرة) التي نهايتها a والآن إذا كانت $x \rightarrow a$ على عدة متواليات فإنه ينبغي على x أن تقترب في آخر الأمر من a والمعنى الأساسي لمفهوم النهاية هو أنه عندما تقترب x من a ولكنها تبقى مختلفة عنها فإن $f(x)$ تقترب من A ويمكن صياغة هذا المعنى بعبارة أدق على النحو التالي.

(١) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ إذا كان لأي عدد موجب صغير ϵ مهما كان صغيرا يوجد عددا موجبا δ بحيث

$$0 < |x - a| < \delta \text{ فإن } |f(x) - A| < \epsilon$$

وتحدد المتباينتين الفترتين :



وجوه التعريف هو أنه بعد اختيار ϵ [أي بعد أن نضع الفترة (ii)] يمكن إيجاد δ [أي يمكن تعيين الفترة (i)] بحيث طالما a يحسب x على المجال (i)، ولتكن عند x_0 مثلا، إذن $f(x)$ تبقى على الفترة (ii).

مثال ٣ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = 10.$$

لنفترض أننا اخترنا ϵ فنندد ينبغي أن نحصل على $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن $|x^2 + 3x - 10| < \epsilon$. ونلاحظ أولا أنه إذا كان $0 < |x - 2| < \lambda < 1$ إذن $|x - 2|^2 < \lambda$ مهما كان العدد الصحيح الموجب n عندئذ

$$|(x^2 + 3x) - 10| = |(x - 2)^2 + 7(x - 2)| \leq |x - 2|^2 + 7|x - 2| < \lambda + 7\lambda = 8\lambda$$

ولكن $\epsilon > 8\lambda$ تستلزم $\lambda < \epsilon/8$. وبالتالي فإن أي عدد موجب أصغر من كلا العددين 1 ، $\epsilon/8$ يمكن أن يلعب دور δ ونكون بذلك قد أوجدنا النهاية.

انظر المسائل ١٣ - ١٤

نماذج أخرى من النهايات

نمرف

(ب) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ إذا وجد أي عدد موجب M ، مهما كان كبيرا، عددا موجبا δ بحيث طالما

$$0 < |x - a| < \delta \text{ إذن } |f(x)| > M \text{ وعندما يكون } f(x) > M \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\text{وعندما يكون } f(x) < -M \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

(ج) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ إذا وجد أى عدد موجب ϵ مهما كان صغيرا ، عددا موجبا M بحيث طالما $|x| > M$

إذن $|f(x) - A| < \epsilon$.

(د) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ إذا وجد أى عدد موجب M ، مهما كان كبيرا ، عددا موجبا P بحيث طالما $|x| > P$

إذن $|f(x)| > M$

إذا وجدت النهايتان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ فإن نظريات النهايات التى مرت فى هذا الفصل تبقى صحيحة .

غير أنه لا يمكن استعمال هذه النظريات عندما $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ أو عندما $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ وعلى سبيل المثال ، فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$ بينما

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x^2) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+5) = +\infty$ كذلك أن $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} x(1+x) = 2$.
بينما $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{(x^2+5) + (2-x^2)\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7 = 7$.

مسائل محلولة

١ - عين نهاية كل من المتوالات الآتية :

(أ) $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \dots$ (ب) $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$ (ج) $2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, \dots$ (د) $1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \dots$ (و) $5, 4, 11/3, 7/2, 17/5, \dots$ (ز) $.9, .99, .999, .9999, .99999, \dots$

(أ) الحد العام هو $1/n$ وعندما نعطي لـ n القيم $1, 2, 3, 4, \dots$ على الترتيب فإن $1/n$ تتناقص ولكنها تبقى موجبة .
إذن النهاية تساوى 0 .

(ب) الحد العام هو $(1/n)^2$ والنهاية تساوى 0 .

(ج) الحد العام هو $3 - 1/n$ والنهاية تساوى 3 .

(د) الحد العام هو $3 + 2/n$ والنهاية تساوى 3 .

(هـ) الحد العام هو $1/2^n$ والنهاية تساوى 0 كافي الحالة (أ) .

(و) الحد العام هو $1 - 1/10^n$ والنهاية تساوى 1 .

٢ - وضح سلوك $y = x + 2$ عندما تتغير x بقيم كل متوالية فى التمرين ١ .

(أ) $y \rightarrow 2$ على المتوالية $3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, \dots, 2+1/n, \dots$
(ب) $y \rightarrow 2$ على المتوالية $3, 9/4, 19/9, 33/16, 51/25, \dots, 2+1/n^2, \dots$
(ج) $y \rightarrow 5$ على المتوالية $4, 9/2, 14/3, 19/4, 24/5, \dots, 5-1/n, \dots$
(د) $y \rightarrow 5$ على المتوالية $7, 6, 17/3, 11/2, 27/5, \dots, 5+2/n, \dots$

$$\begin{aligned} (أ) \quad y \rightarrow 2 \text{ على المتوالية } & 5/2, 9/4, 17/8, 33/16, 65/32, \dots, 2 + 1/2^n, \dots \\ (و) \quad y \rightarrow 3 \text{ على المتوالية } & 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999, \dots, 3 - \frac{1}{10^n}, \dots \end{aligned}$$

٣ - احسب

$$\begin{aligned} (أ) \quad \lim_{x \rightarrow 2} 5x &= 5 \lim_{x \rightarrow 2} x = 5 \cdot 2 = 10 \\ (ب) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\ &= 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ (ج) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 1) &= 4 - 8 + 1 = -3 \\ (د) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+2)} = \frac{1}{5} \\ (هـ) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+4} &= \frac{4-4}{4+4} = 0 \\ (و) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25-x^2} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (25-x^2)} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

ملاحظة : عدم التصور من هذه المسائل أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ هي على الدوام مساوية $f(a)$ والمقصود من $f(a)$ هو قيمة $f(x)$ عندما $x = a$ وكما اصطلاحنا في الصفحة ١١ أن x لا تساوى a أبدا عندما $x \rightarrow a$.

٤ - اختر سلوك $f(x) = (-1)^x$ عندما تتغير x بالمتواليتين :

$$(أ) \quad 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, \dots \quad (ب) \quad 2/3, 2/5, 2/7, 2/9, \dots$$

ماذا يمكن القول بخصوص $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^x$ و $f(0)$ ؟

$$\begin{aligned} (أ) \quad (-1)^x \rightarrow -1 \text{ على المتوالية } & -1, -1, -1, -1, \dots \\ (ب) \quad (-1)^x \rightarrow +1 \text{ على المتوالية } & +1, +1, +1, +1, \dots \end{aligned}$$

وحيث أن $(-1)^x$ تقترب من نهايتين مختلفتين على المتواليتين فإن $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^x$ غير موجودة ؛

$$f(0) = (-1)^0 = +1$$

٥ - احسب

$$(أ) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

إن عملية القسمة على $(x-4)$ ، قبل إجراء عملية النهاية ، صحيحة لأنه حسب الاصطلاح في الصفحة ١١ يكون $x \neq 4$ عندما $x \rightarrow 4$ وبالتالي فإن $x-4$ لا تساوى الصفر أبدا .

$$(ب) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}$$

$$(ج) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

إن h هنا ، وفي المسألتين v ، h كذلك ، متغير مما يجعلنا نناقش وكأننا في الحقيقة أمام دوال ذات متغيرين . ومع هذا ، معتمدين على أن x متغير لا يلعب أى دور في هذه المسائل فإنه يمكن اعتبار x ثابتا بشكل مؤقت ، كأن تأخذ x إحدى القيم في مداها .

وجوه هذه المسألة، كما سترى في الفصل ٤، هو أنه إذا كانت لـ x أية قيمة ولتكن $x = x_0$ ، في الحيز $y = x^2$ فإن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \text{ تساوى دائما ضعف القيمة التي اخترناها لـ } x.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2} \quad (د) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (3+\sqrt{x^2+5}) = 6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty; \quad (هـ).$$

ولا توجد نهاية

٦- احسب قيم ما يلي مبتدئا بقمم كل من البسط والمقام على أعلى قوة موجودة لـ x ثم استخدم $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3} \quad (أ)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6+2/x+1/x^2}{6-3/x+4/x^2} = \frac{6+0+0}{6-0+0} = 1 \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2}{4x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x+1/x^2-2/x^2}{4-1/x^2} = \frac{0}{4} = 0 \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1/x+1/x^2} = \infty; \quad (د)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ أوجد } f(x) = x^2 - 3x, \text{ بفرض } \quad \text{٧-}$$

$$\text{بما أن } f(x) = x^2 - 3x, \quad f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2+2hx+h^2-3x-3h)-(x^2-3x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx+h^2-3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h-3) = 2x-3 \end{aligned}$$

$$\text{٨- بفرض } f(x) = \sqrt{5x+1}, \text{ أوجد } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ عندما } x > -1/5.$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5x+5h+1) - (5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \end{aligned}$$

٩ - عين النقط $x = a$ التي يكون عندها المقام مساويا للصفر. اجث بعد ذلك في y عندها $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$

(١) $y = f(x) = 2/x$ ينعدم المقام عندها $x = 0$ فإذا كانت $x \rightarrow 0^-$ فإن $y \rightarrow -\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow 0^+$ فإن $y \rightarrow +\infty$.

(ب) $y = f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ ينعدم المقام عندها $x = -3$ و $x = 2$. فإذا كانت $x \rightarrow -3^-$ فإن $y \rightarrow -\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow -3^+$ فإن $y \rightarrow +\infty$. وإذا كانت $x \rightarrow 2^-$ فإن $y \rightarrow -\infty$ ؛ وإذا كانت $x \rightarrow 2^+$ فإن $y \rightarrow +\infty$.

(ج) $y = f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$ ينعدم المقام عندها تكون $x = -2$ و $x = 1$ وإذا كانت $x \rightarrow -2^-$ فإن $y \rightarrow -\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow -2^+$ فإن $y \rightarrow +\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow 1^-$ فإن $y \rightarrow +\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow 1^+$ فإن $y \rightarrow -\infty$.

(د) $y = f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ ينعدم المقام عندها $x = 3$ وإذا كانت $x \rightarrow 3^-$ فإن $y \rightarrow +\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow 3^+$ فإن $y \rightarrow +\infty$.

(هـ) $y = f(x) = \frac{(x+2)(1-x)}{x-3}$ ينعدم المقام عندها $x = 3$ فإذا كانت $x \rightarrow 3^-$ فإن $y \rightarrow +\infty$ وإذا كانت $x \rightarrow 3^+$ فإن $y \rightarrow -\infty$.

١٠ - اختبر النهايات : (١) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+2^{1/x}}$, (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$.

(١) افرض $x \rightarrow 0^-$ إذن $2^{1/x} \rightarrow 0$, $1/x \rightarrow -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3+2^{1/x}} = 1/3$.

ثم افرض $x \rightarrow 0^+$ إذن $2^{1/x} \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+2^{1/x}} = 0$.

وبالتالي فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+2^{1/x}}$ غير موجودة

(ب) افرض $x \rightarrow 0^-$ إذن $2^{1/x} \rightarrow 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \frac{1}{3}$.

ثم افرض $x \rightarrow 0^+$ عندها $x \neq 0$, $\frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \frac{2^{-1/x}+1}{3 \cdot 2^{-1/x}+1}$ وحيث أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-1/x} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{-1/x}+1}{3 \cdot 2^{-1/x}+1} = 1$. إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ غير موجودة.

١١ - اختبر y عندها $x \rightarrow -\infty$ وعندها $x \rightarrow +\infty$ لجميع دوال المسألة ٩.

(١) عندها يكون $|x|$ كبيرا يكون $|y|$ صغيرا.

عندما $x = -1000$ يكون $y < 0$ وعندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 0^-$ وعندما $x = +1000$ يكون $y > 0$ وعندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $y \rightarrow 0^+$.

(ب) ، (ج) ذات الأمر كافٍ (١)

(د) عندما يكون $|x|$ كبيرا يكون $|y|$ قريبا من 1 .

عندما $x = -1000$ يكون $y < 1$ وعندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 1^-$ وعندما $x = +1000$ يكون $y > 1$ وعندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $y \rightarrow 1^+$.

(هـ) عندما يكون $|x|$ كبيرا يكون $|y|$ كبيرا .

عندما $x = -1000$ يكون $y > 0$ وعندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow +\infty$ وعندما $x = +1000$ يكون $y < 0$ وعندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $y \rightarrow -\infty$.

١٢- اختر الدالة في المسألة ٩ من الفصل الأول عندما $x \rightarrow a^-$ وعندما $x \rightarrow a^+$ حيث a أى عدد صحيح موجب .
لنعتبر $a = 2$ فعندما $x \rightarrow 2^-$ على المتوالية (1) فإن $f(x) \rightarrow 10$ على المتوالية 5,10,10,10,... وعندما $x \rightarrow 2^+$ على المتوالية (2) فإن $f(x) \rightarrow 15$ وبهذا نجد أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وبالتالى $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غير موجودتين .

١٣- بين باستخدام التعريف النقيض أن

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3 \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 5, \quad (١)$$

(١) لنفرض أننا اخترنا ϵ فعندما $0 < |x - 1| < \lambda < 1$ فإن

$$\begin{aligned} |(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| &= |4(x-1)^3 + 15x^2 - 36x + 21| = |4(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 6(x-1)| \\ &\leq 4|x-1|^3 + 15|x-1|^2 + 6|x-1| \\ &< 4\lambda + 15\lambda + 6\lambda = 25\lambda \end{aligned}$$

والآن - إذا كان $\epsilon > 5$ فإن $|4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| < \epsilon$ عندما $\lambda < \epsilon/25$ ، إذن بالتالى فإن أى عدد موجب أصغر من كل من 1 و $\epsilon/25$ يصلح أن يكون δ وبذلك يثبت وجود النهاية .

(ب) لنفرض أننا اخترنا ϵ فإذا كان $0 < |x + 1| < \lambda < 1$ فإن

$$\begin{aligned} |(-2x^3 + 9x + 4) + 3| &= |-2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 3(x+1)| \\ &\leq 2|x+1|^3 + 6|x+1|^2 + 3|x+1| < 11\lambda \end{aligned}$$

وأى عدد موجب أصغر من كل من 1 و $\epsilon/11$ يصلح أن يكون δ وبذلك يثبت وجود النهاية .

١٤- نفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ أثبت أن

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = AB, \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = A + B, \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0 \quad (\text{ج})$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ، فينتج حسب التعريف السابق أنه للأعداد $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$

مهما كانا صغيرين، وجود عددين $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ بحيث تكون

$$(i) \quad \text{طالما } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ فإن } |f(x) - A| < \epsilon_1,$$

$$(ii) \quad \text{طالما } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ فإن } |g(x) - B| < \epsilon_2.$$

لنرمز بـ λ لأصغر العددين δ_1 و δ_2 فيكون

$$(iii) \quad \text{طالما } 0 < |x - a| < \lambda \text{ فإن } |f(x) - A| < \epsilon_1 \text{ و } |g(x) - B| < \epsilon_2.$$

(أ) لنفرض أننا اخترنا ϵ فنحن نريد أن يكون المطلوب إيجاد $\delta > 0$ بحيث

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \text{ فإن } |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon$$

$$\text{والآن } |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| = |\{f(x) - A\} + \{g(x) - B\}| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|.$$

ومن (iii) نجد أن $|f(x) - A| < \epsilon_1$ طالما $0 < |x - a| < \delta$ ويكون $|g(x) - B| < \epsilon_2$ طالما $0 < |x - a| < \lambda$ حيث λ أصغر العددين δ_1 و δ_2 .

$$\text{إذن } 0 < |x - a| < \lambda \text{ طالما } |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

بأخذ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon$ و $\delta = \lambda$ وبهذا الاختيار لـ ϵ_1 و ϵ_2 عندئذ يكون

$$0 < |x - a| < \delta \text{ طالما } |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

(ب) لنفرض أننا اخترنا ϵ فنحن نريد أن يكون المطلوب إيجاد $\delta > 0$ بحيث

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \text{ فإن } |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon$$

$$\text{والآن } |f(x) \cdot g(x) - AB| = |\{f(x) - A\} \cdot \{g(x) - B\} + B\{f(x) - A\} + A\{g(x) - B\}| \\ \leq |f(x) - A| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| + |A| \cdot |g(x) - B|$$

$$\text{ومن (iii) و } |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon_1 \epsilon_2 + |B| \epsilon_1 + |A| \epsilon_2 \text{ طالما } 0 < |x - a| < \lambda.$$

لنأخذ ϵ_1 و ϵ_2 بحيث يتحقق $\epsilon_1 < \frac{1}{3} \frac{\epsilon}{|B|}$ و $\epsilon_1 \epsilon_2 < \frac{1}{3} \epsilon$ و $\epsilon_2 < \frac{1}{3} \frac{\epsilon}{|A|}$ في آن واحد ولنأخذ $\delta = \lambda$ وبهذا الاختيار لـ ϵ_1 و ϵ_2 فنحن نريد أن يكون

$$0 < |x - a| < \delta \text{ طالما } |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

(ج) بما أن $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ فإن النظرية الناتجة من (ب) تمكننا من برهنة أن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ ، $B \neq 0$.

لنفرض أننا اخترنا ϵ فنحن نريد أن يكون المطلوب إيجاد $\delta > 0$ بحيث

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \text{ فإن } \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \epsilon$$

$$\text{والآن } \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{B \cdot g(x)} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|} = \frac{|g(x) - B|}{|B|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}.$$

ومن (ii)

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ طالما } |g(x) - B| < \epsilon_2$$

وبما أننا نبحث أيضا في $\frac{1}{g(x)}$ فإنه ينبغي التأكد من أن δ_2 صغيرة بقدر يكفي لاجل الفترة $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$ لا تحوى جذر $g(x) = 0$ لنفرض أن $\delta_2 \leq \delta_3$ تحقق هذا الطلب بحيث $|g(x) - B| < \epsilon_2$ و $|g(x)| > 0$ طالما $0 < |x - a| < \delta_3$ وحيث أن $|g(x)| > 0$ في الفترة يقتضى أن $|g(x)| > b > 0$ و $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{b}$ في الفترة ، فإننا نحصل على

$$0 < |x - a| < \delta_3 \quad \text{طالما} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\epsilon_2}{|B|} \cdot \frac{1}{b}$$

لنأخذ $\epsilon_2 < \epsilon b |B|$ إذن $\frac{\epsilon_2}{|B| \cdot b} < \epsilon$ ويكون $\delta = \delta_3$ لهذا الاختيار ϵ_2

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{طالما} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty. \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1, \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty. \quad (ا)$$

(ا) لنفرض أننا اخترنا M لجميع قيم x التى تحقق العلاقة $|x-2| < \delta$ و $\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$.

$$\text{فإن } \left| \frac{1}{(x-2)^3} \right| > \frac{1}{\delta^3} \text{ وبالتالى } \left| \frac{1}{(x-2)^3} \right| > M \text{ عندما } \frac{1}{\delta^3} > M \text{ أو } \delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}.$$

$$(ب) لنفرض أننا اخترنا ϵ لجميع قيم x التى تحقق العلاقة $\frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{|x|-1} < \frac{1}{M-1}$$$

$$|x| > M, \quad \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \epsilon \text{ وبالتالى } \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \epsilon \text{ عندما } \frac{1}{M-1} < \epsilon \text{ أو } M > 1 + \frac{1}{\epsilon}.$$

(ج) لنفرض أننا اخترنا M كبيرة بقدر كاف لجميع قيم x التى تحقق العلاقة $|x| > P > 1$

$$\text{فإن } \left| \frac{x^2}{x-1} \right| \geq \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P. \text{ وبالتالى } \left| \frac{x^2}{x-1} \right| > M \text{ عندما } P > 2M.$$

مسائل اضافية

١٦ - صف سلوك $y = 2x + 1$ عندما تتغير x على كل متوالية من متوالات المسألة ١.

ج . (ا) $y \rightarrow 1$ (ب) $y \rightarrow 1$ (ج) $y \rightarrow 7$ (د) $y \rightarrow 7$ (هـ) $y \rightarrow 1$ (و) $y \rightarrow 3$

١٧ - احسب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \quad (ط) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (هـ) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x) \quad (ا)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} \quad (ى) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} \quad (و) \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4) \quad (ب)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (\text{ك}) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} \quad (\text{ز}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^2} \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \quad (\text{ل}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} \quad (\text{ح}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (\text{د})$$

ج : (أ) -4 ; (ب) 0 ; (ج) 0 ; (د) $\frac{1}{2}$; (هـ) 0 ; (و) $\frac{1}{3}$; (ز) -4 ; (ح) $\frac{1}{2}$; (ط) $\frac{1}{4}$; (ي) ∞ ، لا توجد نهاية (ك) $3x^2$ (ل) 2 .

١٨ - احسب :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (\text{ز}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2+5x+6} \quad (\text{أ}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+5} \quad (\text{ج}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{4x-5} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (\text{و}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1} \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2} \quad (\text{ب})$$

ج : (أ) $\frac{1}{2}$ ، (ب) $\frac{2}{3}$ ، (ج) 0 ، (د) ∞ ، لا توجد نهاية (هـ) 0 ، (و) 1 (ز) -1

١٩ - أوجد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ لكل دالة من دوال المسألة ٢٤ في الفصل الأول

$$\text{ج : (أ) } \frac{-1}{(a-2)^2}, \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{2\sqrt{a-4}}, \quad (\text{ج}) \quad \frac{1}{(a+1)^2}$$

٢٠ - ماذا يمكن قوله حول $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$ ، حيث $a_0 b_0 \neq 0$ وحيث m, n عددان صحيحان موجبان عندما

$$m < n? \quad (\text{ج}) \quad m = n, \quad (\text{ب}) \quad m > n, \quad (\text{أ})$$

ج : (أ) لا توجد نهاية (ب) a_0/b_0 (ج) 0

٢١ - ابحث في سلوك $f(x) = |x|$ عندما $x \rightarrow 0$ ارسم المنحنى .

$$\text{إرشاد : اختر } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{ج : } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

٢٢ - ابحث في سلوك $\begin{cases} f(x) = x, & x > 0 \\ f(x) = x+1, & x \leq 0 \end{cases}$ عندما $x \rightarrow 0$ ارسم المنحنى .

ج : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة .

٢٣ - (أ) استخدم النظرية IV والاستقراء الرياضي لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح موجب .}$$

(ب) استخدم النظرية III والاستقراء الرياضي لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

٢٤ - استخدم النظرية II وتتبع المسألة ٢٣ لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a), \quad \text{حيث } P(x) \text{ متعددة الحدود في } x.$$

٢٥ - بفرض $f(x) = 5x - 6$ أوجد $\delta > 0$ عندما يكون $0 < |x - 4| < \delta$ طالما $|f(x) - 14| < \epsilon$

وذلك عندما (أ) $\epsilon = \frac{1}{2}$, (ب) $\epsilon = 0.001$, ج : (أ) $1/10$, (ب) 0.0002

٢٦ - استخدم التعريف الدقيق لإثبات أن :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5) = 3, \quad (\text{ج}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4, \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 3} 5x = 15, \quad (\text{أ})$$

٢٧ - استخدم التعريف الدقيق لإثبات أن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty, \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad (\text{ج}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = \infty, \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad (\text{أ})$$

$$\text{ج : (أ) } \delta < 1/M, \quad (\text{ب}) \quad \delta < \frac{1}{M+1}, \quad (\text{ج}) \quad M > 1 + \frac{1}{\epsilon}, \quad (\text{د}) \quad P > 2M$$

٢٨ - أثبت أنه إذا كانت $f(x)$ معرفة لجميع قيم x القريبة من $x = a$ وكان لها نهاية عندما $x \rightarrow a$ فإن هذه النهاية وحيدة.

إرشاد : افرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ وأن $B \neq A$. اختر $\epsilon_1, \epsilon_2 < \frac{1}{2}|A - B|$ عين

بعد ذلك δ_1, δ_2 النهائيين وتأخذ δ أصغر المدين δ_1, δ_2 بين بعد ذلك أن $|A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$ وهذا تناقض.

٢٩ - نفرض $f(x), g(x), h(x)$ بحيث يكون (i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ لجميع قيم x القريبة من $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \quad \text{بين أن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A. \quad (\text{ii})$$

إرشاد : بفرض $\epsilon > 0$ مهما كانت صغيرة ، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x - a| < \delta$

$$A - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \epsilon. \quad \text{أو } |h(x) - A| < \epsilon \quad \text{و } |f(x) - A| < \epsilon$$

٣٠ - أثبت أنه إذا كان $f(x) \leq M$ لجميع قيم x وإذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ فإن $A \leq M$.

إرشاد : افرض $A > M$ ثم اختر $\epsilon = \frac{1}{2}(A - M)$ فتصل إلى تناقض.

الفصل الثالث

الاستمرار (الاتصال)

نقول عن دالة $f(x)$ إنها مستمرة (متصلة) عند $x = x_0$ إذا كان (i) $f(x_0)$ معرفة (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ موجودة (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

فمثلا $f(x) = x^2 + 1$ مستمرة عند $x = 2$ لأن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$ ويستلزم الشرط (i) إن الدالة يمكن أن تكون مستمرة فقط وعند نقط حيز التعريف لها. فالدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ليست مستمرة عند $x = 3$ لأن (3) f تخيل أى أنه غير معرف.

يقال عن الدالة المستمرة عند كل نقطة من نقط فترتها المفتوحة أو المغلقة إنها مستمرة في تلك الفترة. ويقال عن دالة $f(x)$ إنها مستمرة إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من حيز التعريف لها. فالدالة $f(x) = x^2 + 1$ مستمرة في جميع الدوال متعددة الحدود في x دوال مستمرة. والدوال $e^x, \sin x, \cos x$ أمثلة أخرى على ذلك.

إذا كان حيز التعريف لدالة هو فترة مغلقة $a \leq x \leq b$ فنحن لا نتحقق الشرط (ii) عند نقطتي النهاية a و b وسنقول عن دالة مثل هذه إنها مستمرة إذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة $a < x < b$ وكان $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ فالدالة $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ يمكن أن يقال عنها إنها دالة مستمرة. (انظر المثال ١ من الفصل الثاني). إن دوال حساب التفاضل والتكامل الابتدائي مستمرة في حيز تعريفها مع احتمال استثناء عدد من النقط المنزلة.

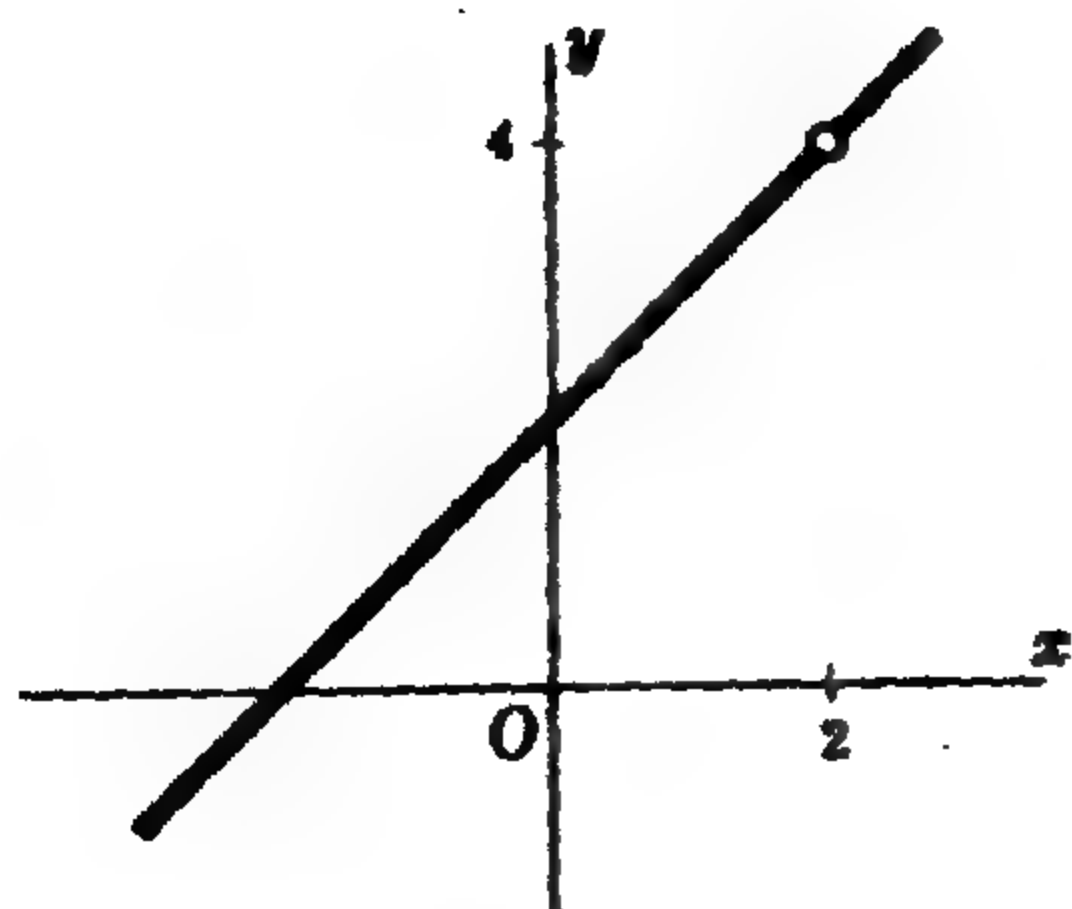
نقول عن دالة $f(x)$ إنها متقطعة (غير مستمرة) ، عند $x = x_0$ إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من شروط الاستمرار السابقة. سنوضح عن طريق أمثلة الأنماط المختلفة للدوال الغير مستمرة.

(١) الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ متقطعة عند $x = 2$ لأن

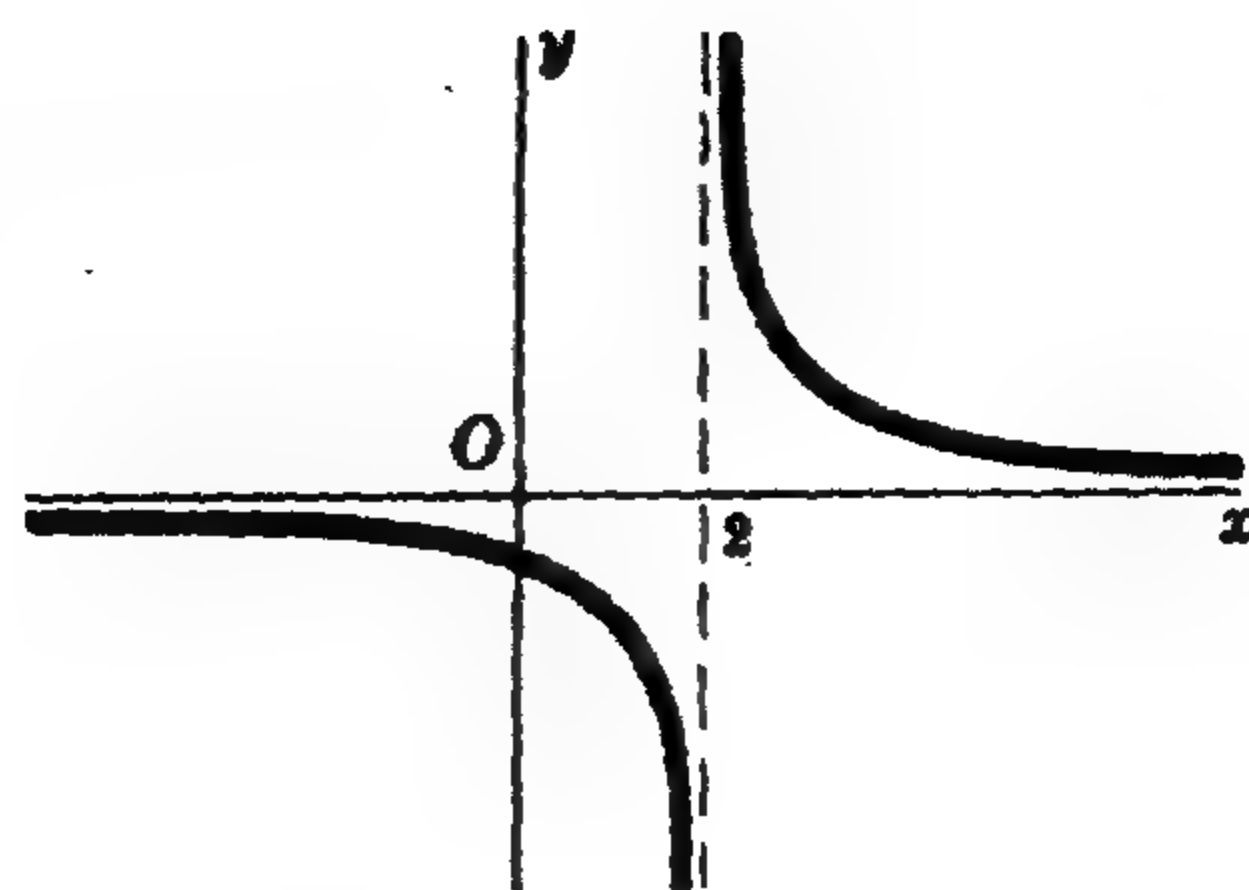
(i) f غير معرف (لانعدام المقام)

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غير موجودة (تساوى ∞)

والدالة مستمرة في أى موضع باستثناء عند $x = 2$ حيث يقال عنها إنها ذات انقطاع لانهاى. انظر الشكل ٣ - ١



شكل ٢ - ٢



شكل ٢ - ١

$$(ب) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{منقطعة عند } x = 2 \text{ لأن}$$

(i) $f(2)$ غير معرفة (كل من البسط والمقام معلوم)

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

يوصف الانقطاع هنا بأنه قابل للإزالة حيث يمكن التخلص منه بأن نعيد تعريف الدالة على أنها $f(2) = 4$ ، $x \neq 2$;

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2},$$

(لاحظ أنه لا يمكن إزالة الانقطاع في (١) لأن النهاية غير موجودة) والمنحنيين $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

و $g(x) = x + 2$ متطابقين باستثناء النقطة $x = 2$ حيث يوجد للأول « ثقب » ، وإزالة الانقطاع ، ببساطة ، ليس إلا ملء هذا الثقب بشكل مناسب.

$$(ج) \quad \text{إن الدالة } f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \quad x \neq 3; f(3) = 9 \quad \text{منقطعة عند } x = 3 \text{ لأن } (i) \quad f(3) = 9$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 27, \quad (iii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

ولكن يمكن إزالة الانقطاع بإعادة تعريف الدالة على أنها $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}, x \neq 3; f(3) = 27$.

(د) إن دالة المسألة ٩ من الفصل الأول معرفة لجميع قيم $x > 0$ ولكنها ذات انقطاع عند $x = 1, 2, 3, \dots$ (انظر المسألة ١٢ من الفصل الثاني) ناشئ من كون :

$$(حيث s أي عدد صحيح موجب) \quad \lim_{x \rightarrow s^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow s^+} f(x)$$

وتوصف هذه بأنها انقطاعات مفاجئة

انظر المسألتين ١ - ٢

خواص الدوال المستمرة : تقودنا نظريات النهايات في الفصل الثاني إلى نظريات الدوال المستمرة مباشرة ، وبوجه خاص ، إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين عند $x = a$ فإن الدوال $f(x)/g(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$ مستمرة على أن يكون $g(a) \neq 0$ في الدالة الأخيرة . وهكذا نجد أن متعددات الحدود في x مستمرة دوماً في حين تكون الدوال الجذرية في x مستمرة عند كل نقطة باستثناء النقط التي ينعدم عندها المقام .

ولابد أن يكون القارئ قد استخدم بعض خواص الدوال المستمرة عند دراسة الجبر .

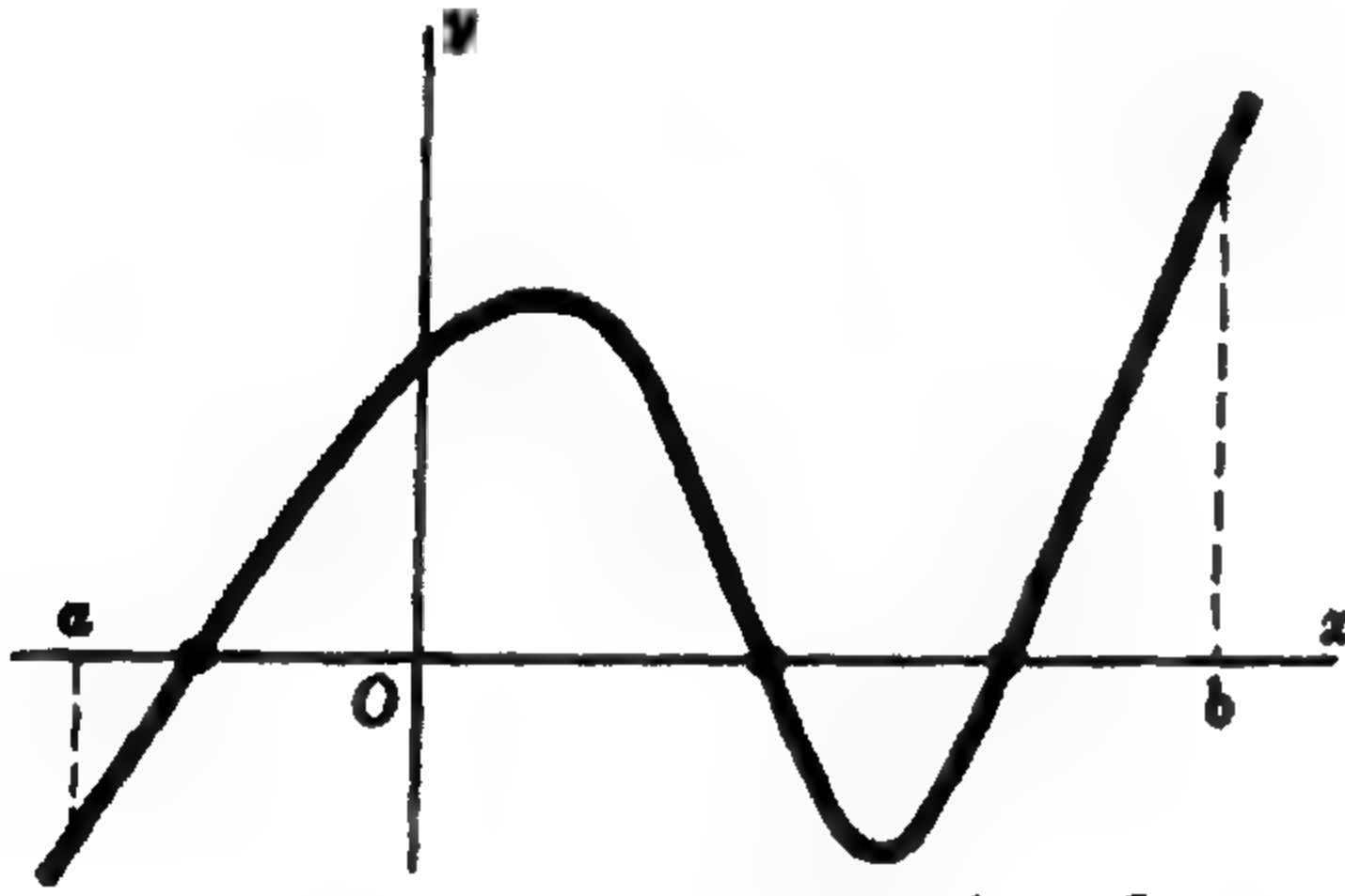
(١) عند رسم منحنى متعددة الحدود $y = f(x)$ لقد تم توصيل أى نقطتين $[a, f(a)]$ و $[b, f(b)]$ بقوس متصل

(ب) إذا كان $f(a)$ و $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان ، فإن منحنى $y = f(x)$ يقطع محور السينات في نقطة واحدة على الأقل ويكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد على الأقل بين $x = a$ و $x = b$.

وخاصة الدوال المستمرة المستعملة هنا هي :

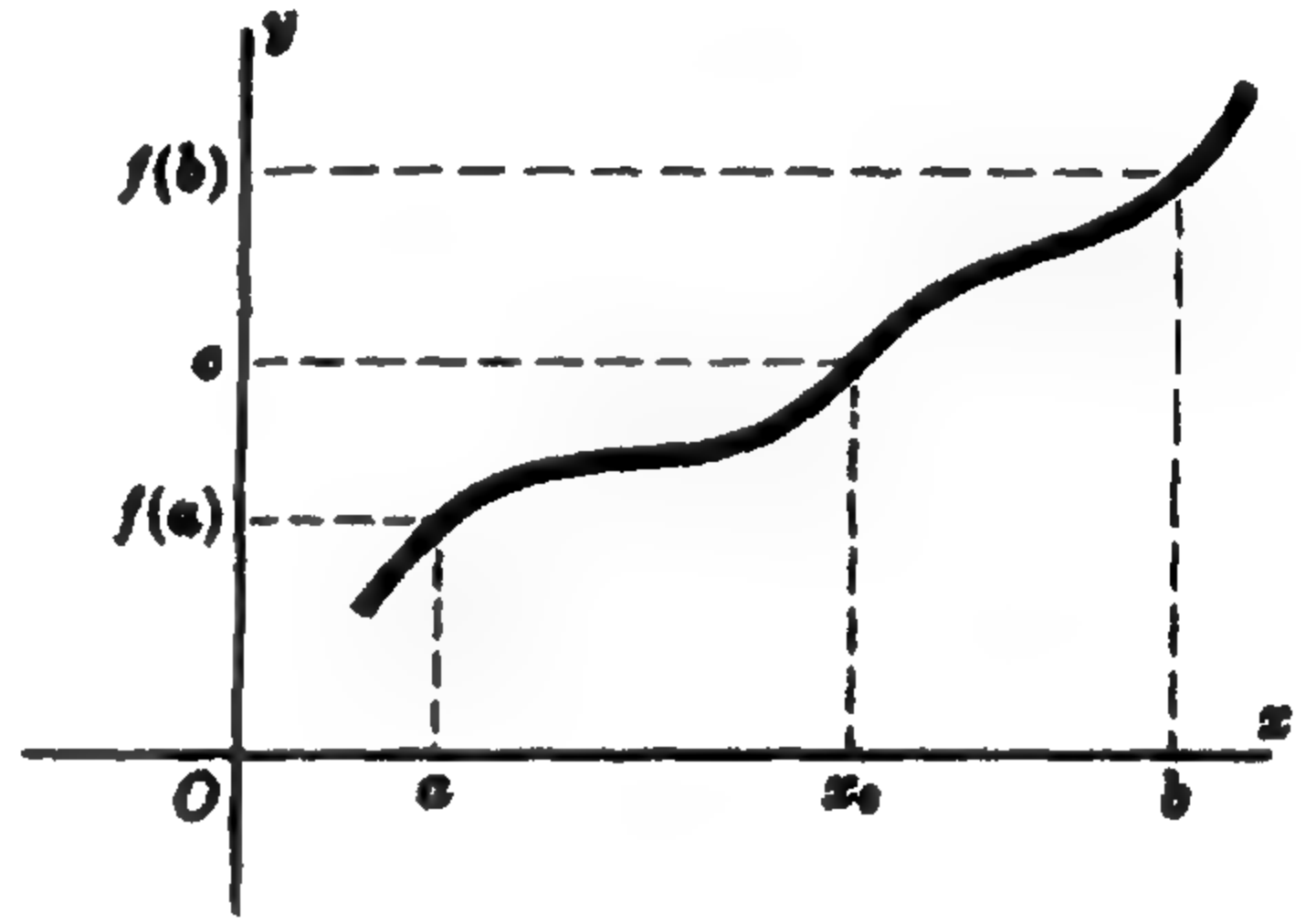
I - إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكان $f(a) \neq f(b)$ إذن لأي عدد c بين $f(a)$ و $f(b)$ توجد على الأقل قيمة واحدة لـ x مثل $x = x_0$ بحيث يكون $f(x_0) = c$.

يوضح الشكلان ١٣ - ٣ و ١٤ - ٣ ب تطبيق هذه الخاصية بينما يبين لنا الشكلان ١٤ - ٣ و ١٥ - ٣ ب كيف أن الاستمرار على طول الفترة أمر ضروري .

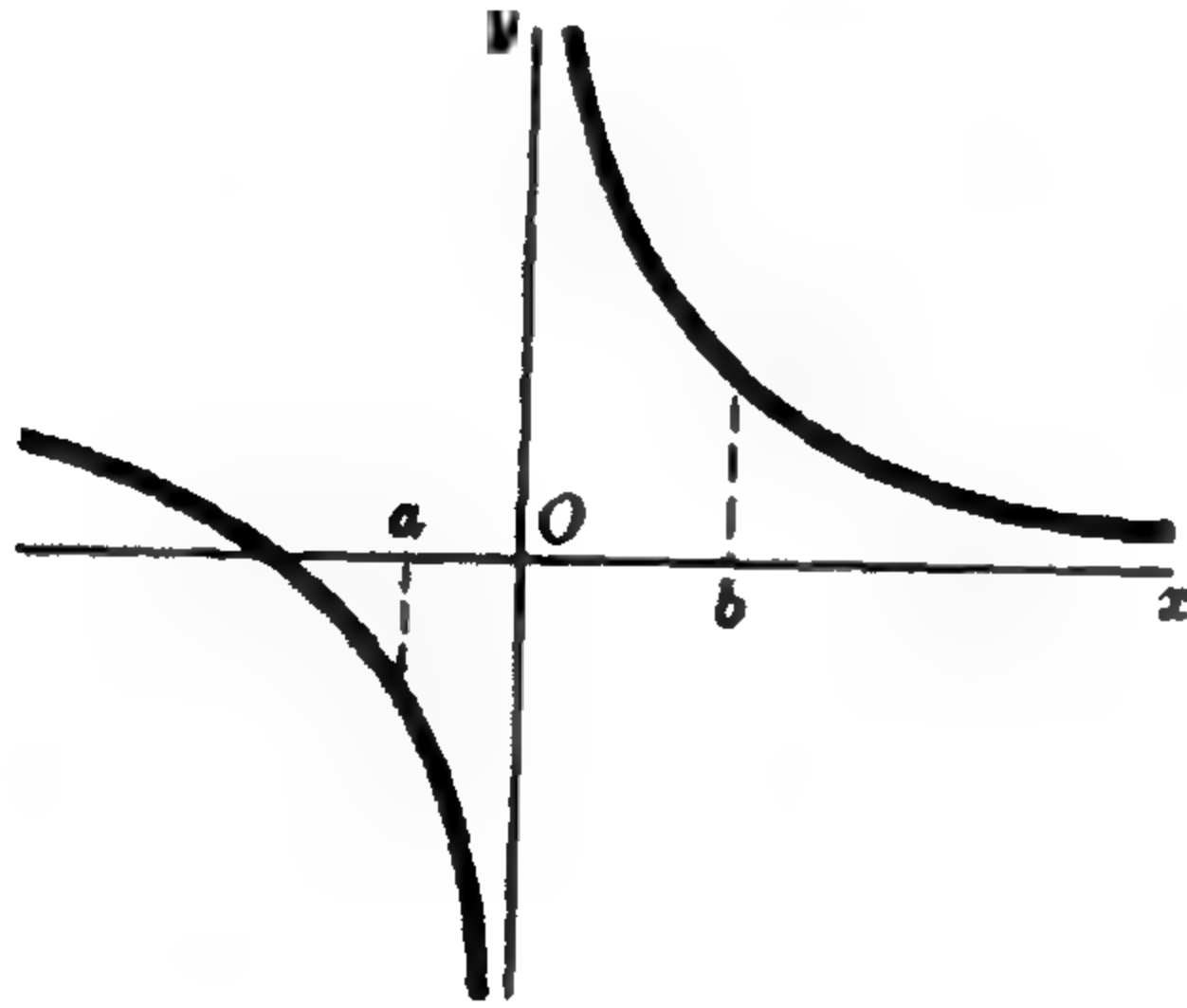


لها ثلاثة جذور بين
 $f(x) = 0$
 $x = b$ و $x = a$

شكل ١٣ - ٣ ب

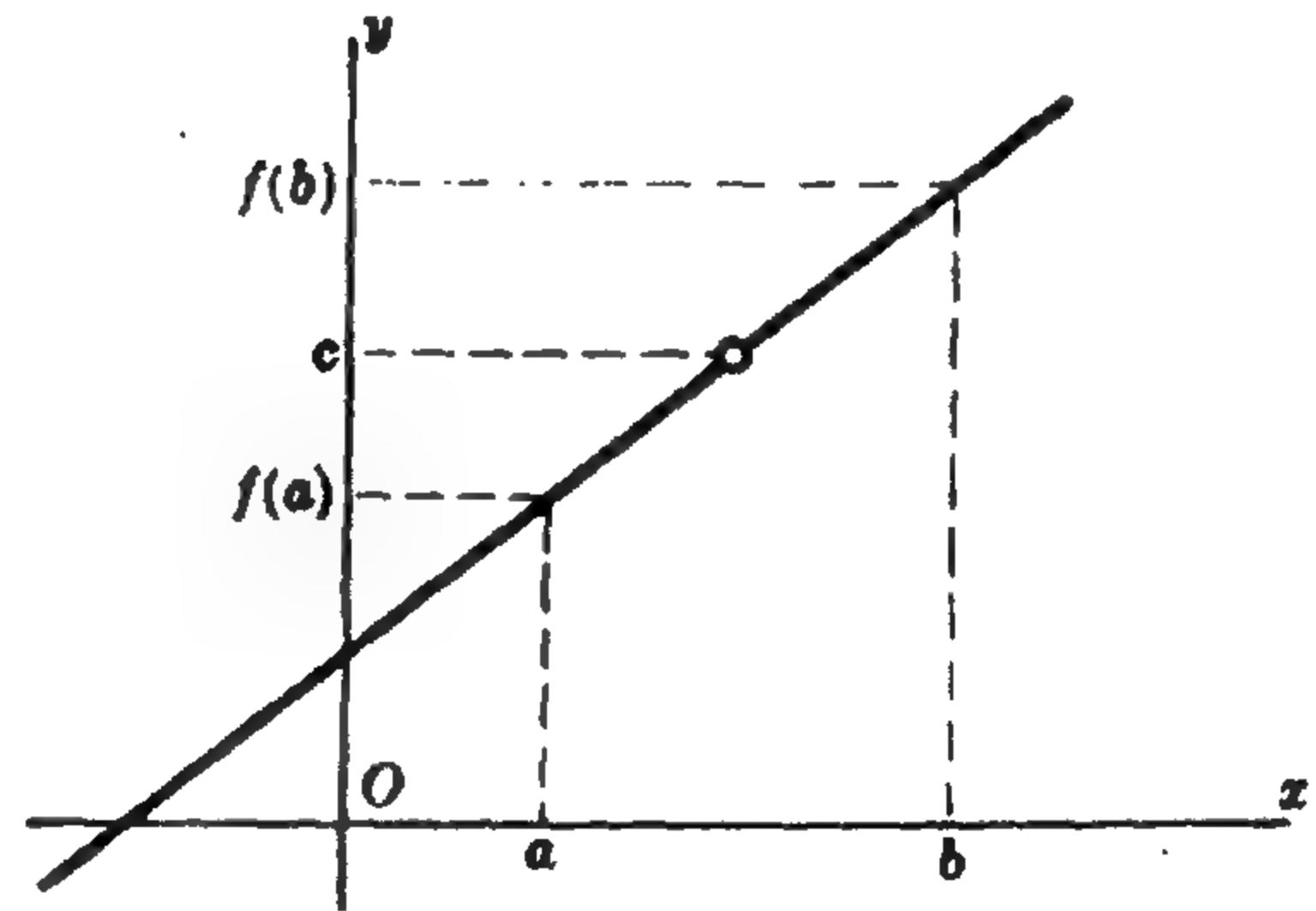


شكل ١٣ - ٣ ب



لا يوجد لها جذور بين
 $f(x) = 0$
 $x = b$ و $x = a$

شكل ١٤ - ٣ ب



شكل ١٤ - ٣ ب

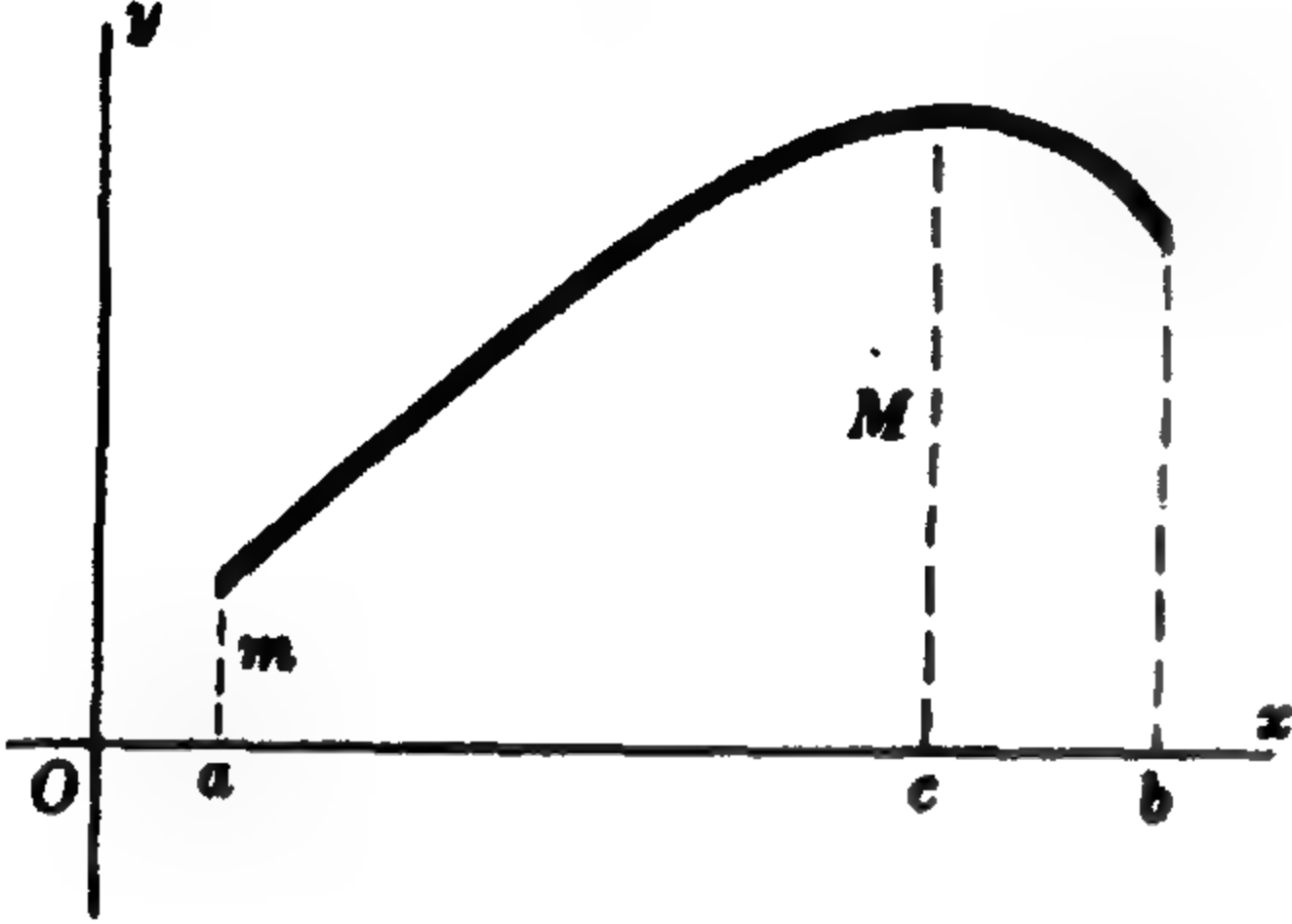
وسنذكر فيما يلي خواص أخرى للدوال المستمرة :

II - إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $a \leq x \leq b$ فنحن نأخذ الدالة $f(x)$ في هذه الفترة قيمة صغرى m وقيمة عظمى M .

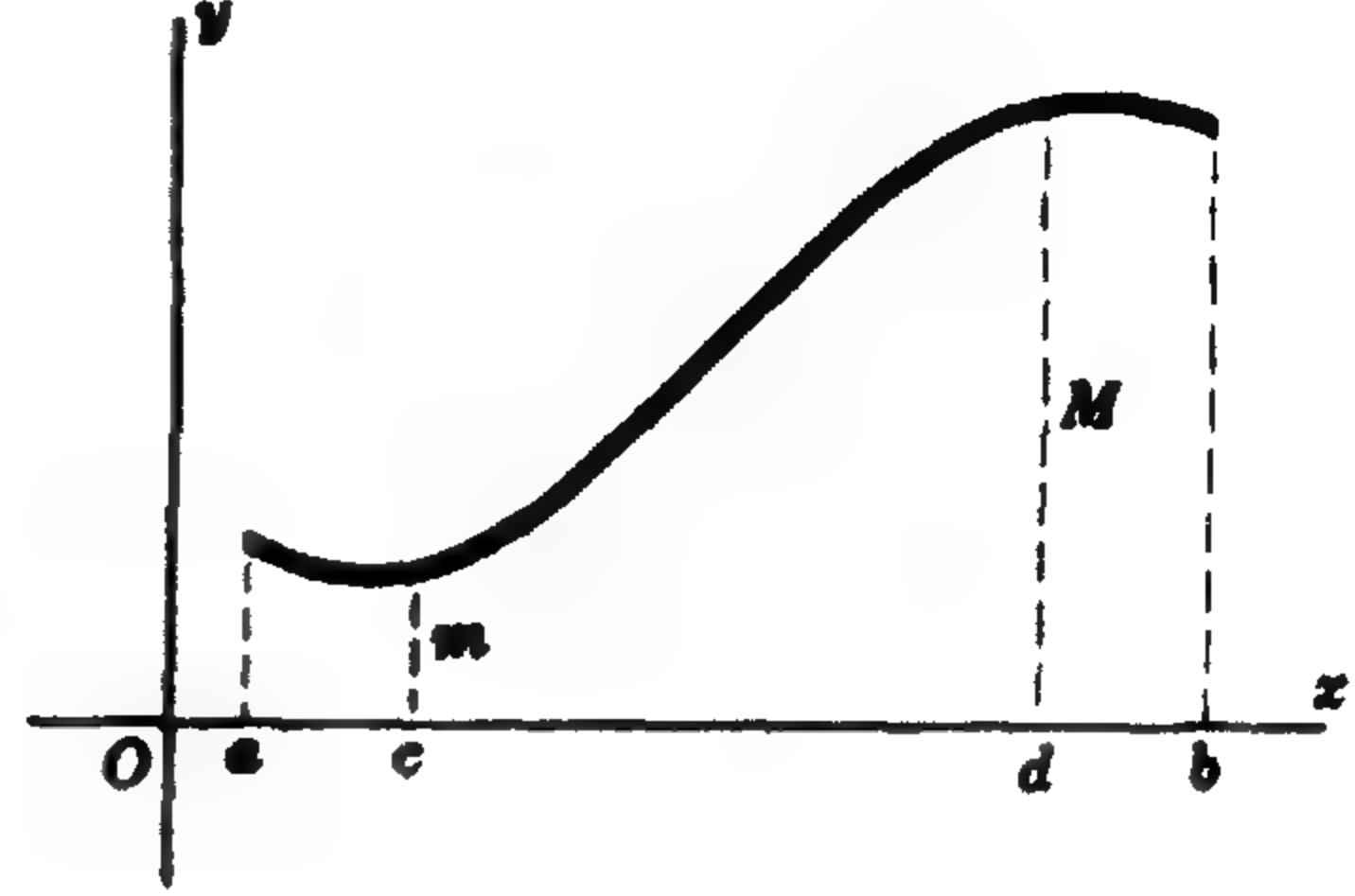
وعلى الرغم من أن برهان الخاصية II خارج عن نطاق هذا الكتاب فإننا سنستخدم هذه الخاصية دون قيد في فصول قادمة .

الأشكال التالية هي لمجرد توضيح بلهجة الخاصية ، فن الشكل ١٥ - ٣ ب الدالة مستمرة عند $a \leq x \leq b$ وتأخذ الدالة

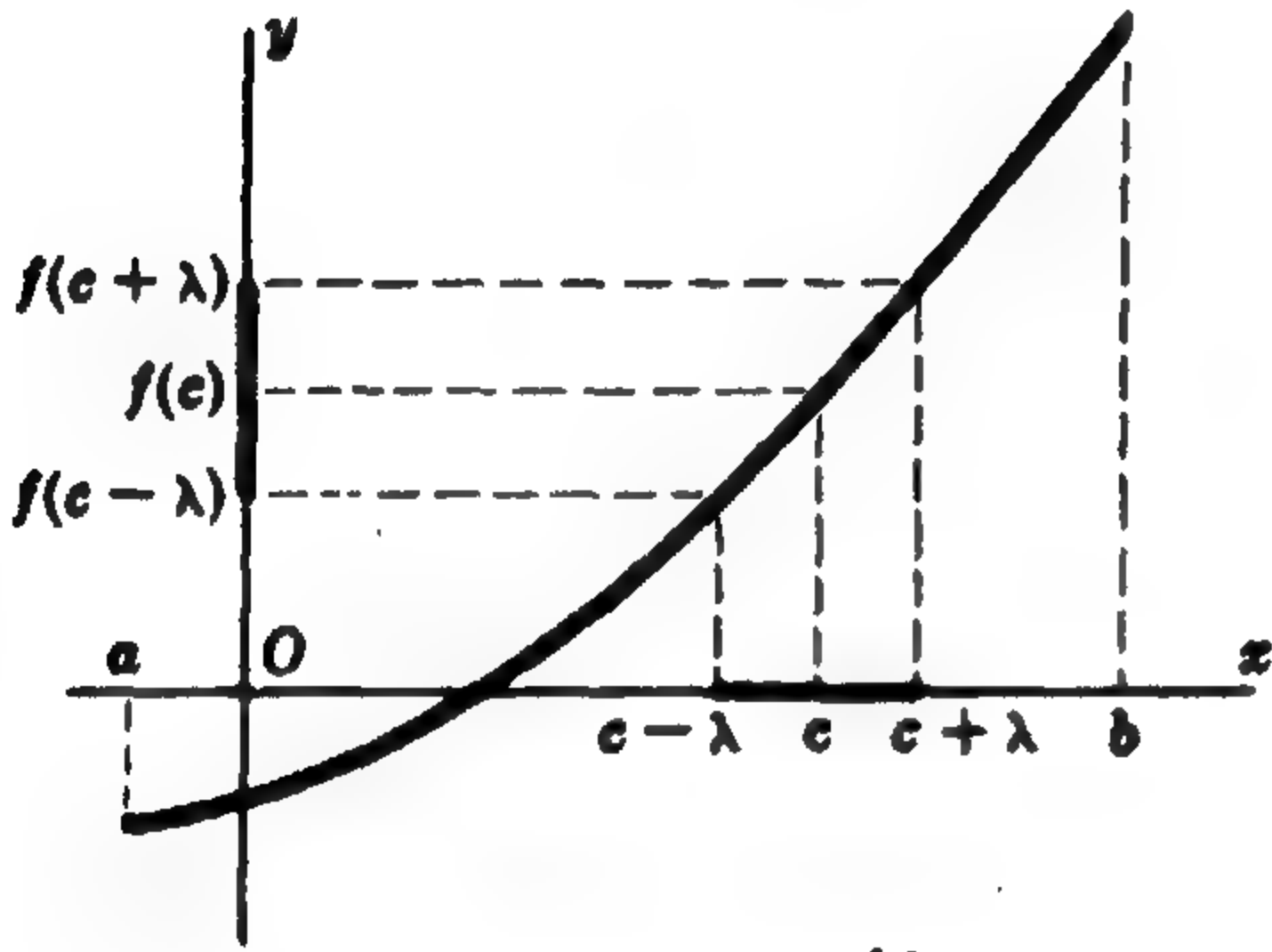
قيمها الصغرى m عند النقطة c وقيمها العظمى M عند النقطة $x = c$ و $x = d$ وكلا النقطتين داخل الفترة . وفي الشكل ٣ - ٥ ب فالدالة مستمرة عند $a \leq x \leq b$ وتأخذ الدالة قيمها الصغرى m عند الطرف $x = a$ وقيمها العظمى M عند $x = c$ داخل الفترة ، أما في الشكل ٣ - ٥ ج فيوجد انقطاع عند $x = c$ حيث $a < c < b$ والدالة قيمة صغرى عند $x = a$ ولكن ليس لها قيمة عظمى .



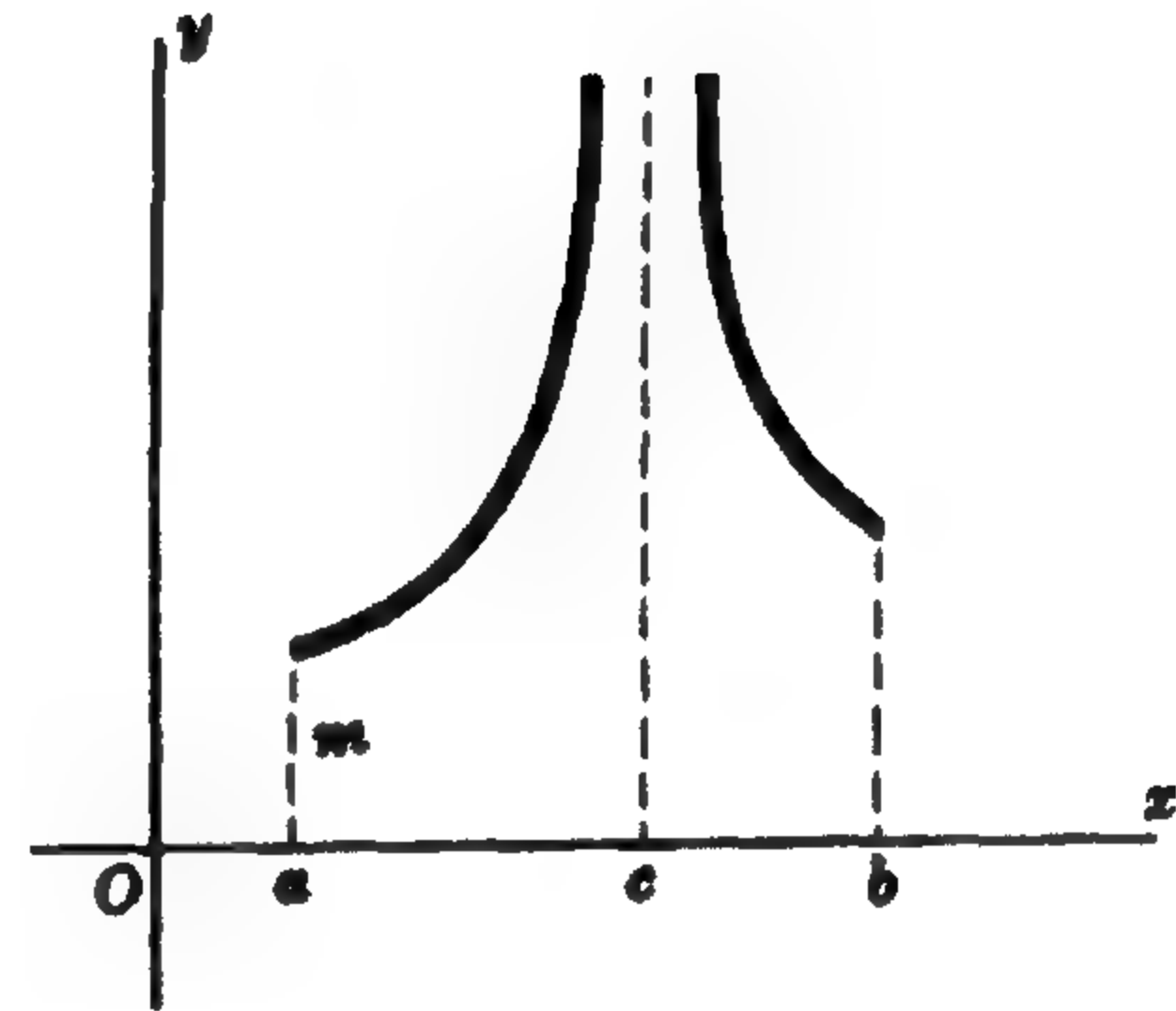
شكل ٣ - ٥ ب



شكل ٣ - ٥ ج



شكل ٣ - ٦



شكل ٣ - ٧

III إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكان c أى عدد بين a, b و $f(c) > 0$ فنحن نوجد عدد $\lambda > 0$ بحيث إذا كان $c - \lambda < x < c + \lambda$ فإن $f(x) > 0$. إن هذه الخاصية موضحة في الشكل ٣ - ٦ . ومن أجل البرهان انظر المسألة ٤ .

مسائل محلولة

١ - ينتج من المسألة ٩ الفصل الثاني أن :

(أ) الدالة $f(x) = 2/x$ تعانى انقطاعا لانهايا عند $x = 0$.

(ب) الدالة $f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ تعانى انقطاعا لانهايا عند $x = -3$ و $x = 2$.

(ج) الدالة $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ تعانى انقطاعا لانهايا عند $x = 3$.

٢ - ينتج من المسألة ٥ في الفصل الثاني أن :

(أ) للدالة $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ انقطاعا قابلا للإزالة عند $x = 3$ كذلك يوجد انقطاع لا نهائي عند $x = -3$.

(ب) للدالة $f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ انقطاعا قابلا للإزالة عند $x = 2$ كذلك يوجد انقطاع قابل للإزالة عند $x = -2$.

(ج) للدالة $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$ انقطاعا لا نهائيا عند $x = 1$.

٣ - بين أن وجود $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ يقتضى أن تكون $f(x)$ مستمرة عند $x = a$.

إن وجود النهاية يقتضى أن $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$ عندما $h \rightarrow 0$ وهكذا فإن $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ والدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = a$.

٤ - برهن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكان c أى عدد بين a و b و $f(c) > 0$ فعندهذا يوجد عدد $\lambda > 0$ بحيث إذا كان $c - \lambda < x < c + \lambda$ فإن $f(x) > 0$.

بما أن $f(x)$ مستمرة عند $x = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ وهما كان $\epsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه

(i) طالما $0 < |x - c| < \delta$ فإن $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

ويكون الآن $f(x) > 0$ لجميع نقاط الفترة $c - \delta < x < c + \delta$ التى يكون عندها $f(x) \geq f(c)$ أما في بقية نقاط الفترة فيكون $f(x) < f(c)$ وبالتالى $|f(x) - f(c)| = f(c) - f(x) < \epsilon$ و $f(x) > f(c) - \epsilon$.

وهذا يعنى أن $f(x) > 0$ عند هذه النقط ما لم يكن $f(c) \geq \epsilon$ وعلى هذا ينبغي ، كى نعين فترة تحقق جميع ما تطلبه النظرية ، أن نختار $\epsilon < f(c)$ ونعين δ بحيث يتحقق (1) وتأخذ $\delta < \lambda$. انظر المسألة ١٠ من أجل النظرية المرافقة .

مسائل إضافية

٥ - اختبر دوال المسألة ١٧ (أ) - (ح) من الفصل الثاني ، لنقط الانقطاع ج : (أ) ، (ب) ، (د) لا يوجد (ج) $x = -1$ (هـ) $x = \pm 1$ (و) $x = 2, 3$ (ز) $x = -1, -3$ (ح) $x = \pm 2$.

٦ - بين أن $f(x) = |x|$ مستمرة عند كل نقطة

٧ - بين أن للدالة $f(x) = \frac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}}$ انقطاعا مفاجئا عند $x = 0$

٨ - بين أنه عند $x = 0$ يكون (أ) للدالة $f(x) = \frac{1}{3^{1/x} + 1}$ انقطاع مفاجئ (ب) والدالة $f(x) = \frac{x}{3^{1/x} + 1}$ انقطاع قابل للإزالة .

٩ - في الشكل ٢ - ٤ امنحني $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 7}$ خذ $a = 3$ و $b = 11$ وبين أن $c = 10$.

١٠ - برهن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكان c أى عدد بين a و b و $f(c) < 0$ فعندهذا يوجد عدد $\lambda > 0$ بحيث إذا كان $c - \lambda < x < c + \lambda$ فإن $f(x) < 0$.

الفصل الرابع

المشتقة

المتزايدات : إن التزايد Δx للمتغير x هو التغير الذي يطرأ على x عندما تتزايد أو تتناقص من قيمة ما مثل $x = x_0$ إلى قيمة أخرى مثل $x = x_1$ ضمن مدى x . وعلى هذا فإن $\Delta x = x_1 - x_0$ وبالتالي يمكننا أن نكتب $x_1 = x_0 + \Delta x$. إذا أعطى المتغير x تزايداً Δx من $x = x_0$ (أى إذا تغيرت x من $x = x_0$ إلى $x = x_0 + \Delta x$) وننتج عن ذلك أن دالة $y = f(x)$ حصلت على التزايد $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ من $y = f(x_0)$ فإننا نسمى النسبة

$$\frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بمعدل متوسط التغير للدالة في الفترة بين $x = x_0$ و $x = x_0 + \Delta x$.

مثال ١ :

إذا أعطينا المتغير x التزايد $\Delta x = 0.5$ من $x_0 = 1$ فإن التزايد الذي يطرأ على الدالة $y = f(x) = x^2 + 2x$ هو $\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$. وعلى هذا فإن معدل متوسط التغير لـ y في الفترة بين $x = 1$ و $x = 1.5$ هو $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5$.

انظر المسألتين ١ - ٢

تعرف مشتقة الدالة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x عند النقطة $x = x_0$ على أنها

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

شرطية أن توجد النهاية. تسمى هذه النهاية أيضاً بمعدل التغير اللحظي (أو بشكل أبسط ، معدل التغير) في y بالنسبة لـ x عند $x = x_0$.

مثال ٢ :

أوجد مشتقة $y = f(x) = x^2 + 3x$ بالنسبة لـ x عند $x = x_0$ استخدم ذلك لحساب قيمة المشتقة عند (١) $x_0 = 2$ (ب) $x_0 = -4$.

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \\ y_0 + \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x \\ \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x \end{aligned}$$

وتكون المشتقة عند $x = x_0$ هي

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3$$

(أ) قيمة المشتقة عند $x_0 = 2$ هي $2 \cdot 2 + 3 = 7$.

(ب) قيمة المشتقة عند $x_0 = -4$ هي $2(-4) + 3 = -5$.

وجرت العادة عند حساب المشتقات أن نسطر الدليل 0 ونحصل على مشتقة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x مثل

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

انظر الملاحظة التي على المسألة ٥ (ج) من الفصل الثاني.

ويمكن الإشارة إلى مشتقة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \text{أو} \quad \frac{d}{dx} y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad D_x y, \quad y', \quad f'(x),$$

انظر المسائل ٣ - ٨

مسائل محلولة

١- إذا كان $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$ فأوجد Δy و $\Delta y / \Delta x$ عندما تتغير x :

(أ) من $x_0 = 1$ إلى $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$ (ب) من $x_0 = 1$ إلى $x_1 = 0.8$.

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2 \quad (أ)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2 \quad \text{وبالتالي} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = -0.56 - (-2) = 1.44$$

$$\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2 \quad (ب)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1.36}{-0.2} = 6.8 \quad \text{وبالتالي} \quad \Delta y = f(0.8) - f(1) = -3.36 - (-2) = -1.36$$

ومن الناحية الهندسية فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تمثل في (أ) ميل القاطع للقطع المكافئ $y = x^2 + 5x - 8$ الذي يصل النقطتين

(1, -2) و (1.2, -0.56) وتمثل في (ب) ميل القاطع لنفس القطع والذي يصل النقطتين (0.8, -3.36) و (1, -2)

٢- إذا كانت s (m) تمثل المسافة التقريبية التي يقطعها جسم يسقط من السكون سقوطاً حراً بالأمتار خلال زمن قدره t (ثانية) وكانت $s = 4.9t^2$ فأوجد $\Delta s / \Delta t$ عندما تتغير t من t_0 إلى $t_0 + \Delta t$ استخدم ذلك لإيجاد $\Delta s / \Delta t$ عندما تتغير t .

(أ) من 3 إلى 3.5 ، (ب) من 3.2 (ج) من 3 إلى 3.1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + \Delta t)^2 - 4.9t_0^2}{\Delta t} = \frac{9.8t_0 \cdot \Delta t + 4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9.8t_0 + 4.9\Delta t$$

$$\Delta s / \Delta t = 9.8(3) + 4.9(0.5) = 31.85 \text{ ms}^{-1} \quad \text{(أ) هنا } t_0 = 3, \Delta t = 0.5, \text{ وبالتالي}$$

$$\Delta s / \Delta t = 9.8(3) + 4.9(0.2) = 30.38 \text{ ms}^{-1} \quad \text{(ب) هنا } t_0 = 3, \Delta t = 0.2, \text{ وبالتالي}$$

(ج) هنا $t_0 = 3, \Delta t = 0.1$ وبالتالي $\Delta s / \Delta t = 29.89 \text{ ms}^{-1}$

وبما أن Δs إزاحة الجسم من زمن قدره $t = t_0$ إلى زمن قدره $t = t_0 + \Delta t$ فإن $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن}}$ السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية .

٣- أوجد dy/dx إذا كان $y = x^3 - x^2 - 4$ أوجد كذلك قيمة dy/dx عندما (أ) $x = 4$ ، (ب) $x = 0$ ، (ج) $x = -1$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4$$

$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4 \quad (١)$$

$$\Delta y = (3x^2 - 2x) \cdot \Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{3x^2 - 2x + (3x - 1) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\} = 3x^2 - 2x \quad (٤)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5 \quad (ج) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0, \quad (ب) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40 \quad (أ)$$

٤- أوجد مشتقة $y = x^2 + 3x + 5$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5 \quad (١)$$

$$\Delta y = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2 \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + 3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3 \quad (٤)$$

٥- أوجد مشتقة $y = \frac{1}{x-2}$ عند $x = 1$ و $x = 3$ بين أن المشتقة غير موجود عند $x = 2$ حيث تكون الدالة غير مستمرة .

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} \quad (١)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2} = \frac{(x - 2) - (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-\Delta x}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2} \quad (٤)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(3 - 2)^2} = -1. \quad \text{عند } x = 3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1 - 2)^2} = -1, \quad \text{عند } x = 1$$

أما عند $x = 2$ فإن $\frac{dy}{dx}$ غير موجود لانعدام المقام .

٦- أوجد مشتقة $f(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$. افحص المشتقة عند $x = -4/3$ حيث تكون الدالة غير مستمرة .

$$f(x + \Delta x) = \frac{2(x + \Delta x) - 3}{3(x + \Delta x) + 4} \quad (١)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{2x + 2\Delta x - 3}{3x + 3\Delta x + 4} - \frac{2x - 3}{3x + 4} \quad (٢)$$

$$= \frac{(3x + 4)[(2x - 3) + 2\Delta x] - (2x - 3)[(3x + 4) + 3\Delta x]}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

$$= \frac{(6x + 8 - 6x - 9)\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \frac{17\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} \quad (٣)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{17}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \frac{17}{(3x + 4)^2} \quad (٤)$$

وعند النقطة $x = -4/3$ لا توجد مشتقة لانعدام المقام . وعموما فإنه لا توجد مشتقة للدالة عند نقطة انقطاعها .

٧- أوجد مشتقة $y = \sqrt{2x + 1}$.

$$y + \Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} \quad (١)$$

$$\Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{1/2} \quad (٢)$$

$$= [(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{1/2}] \frac{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2x + 2\Delta x + 1) - (2x + 1)}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x + 1)^{1/2}} \quad (٤)$$

ونلاحظ بالنسبة للدالة $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ أن $f(-\frac{1}{2}) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$ بينما $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x)$ غير موجودة ،

فالدالة مستمرة من اليمين عند $x = -\frac{1}{2}$ والمشتقة عند $x = -\frac{1}{2}$ لا نهائية .

٨- أوجد مشتقة $f(x) = x^{1/3}$ انحصر $f'(0)$.

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{1/3} \quad (١)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3} \quad (٢)$$

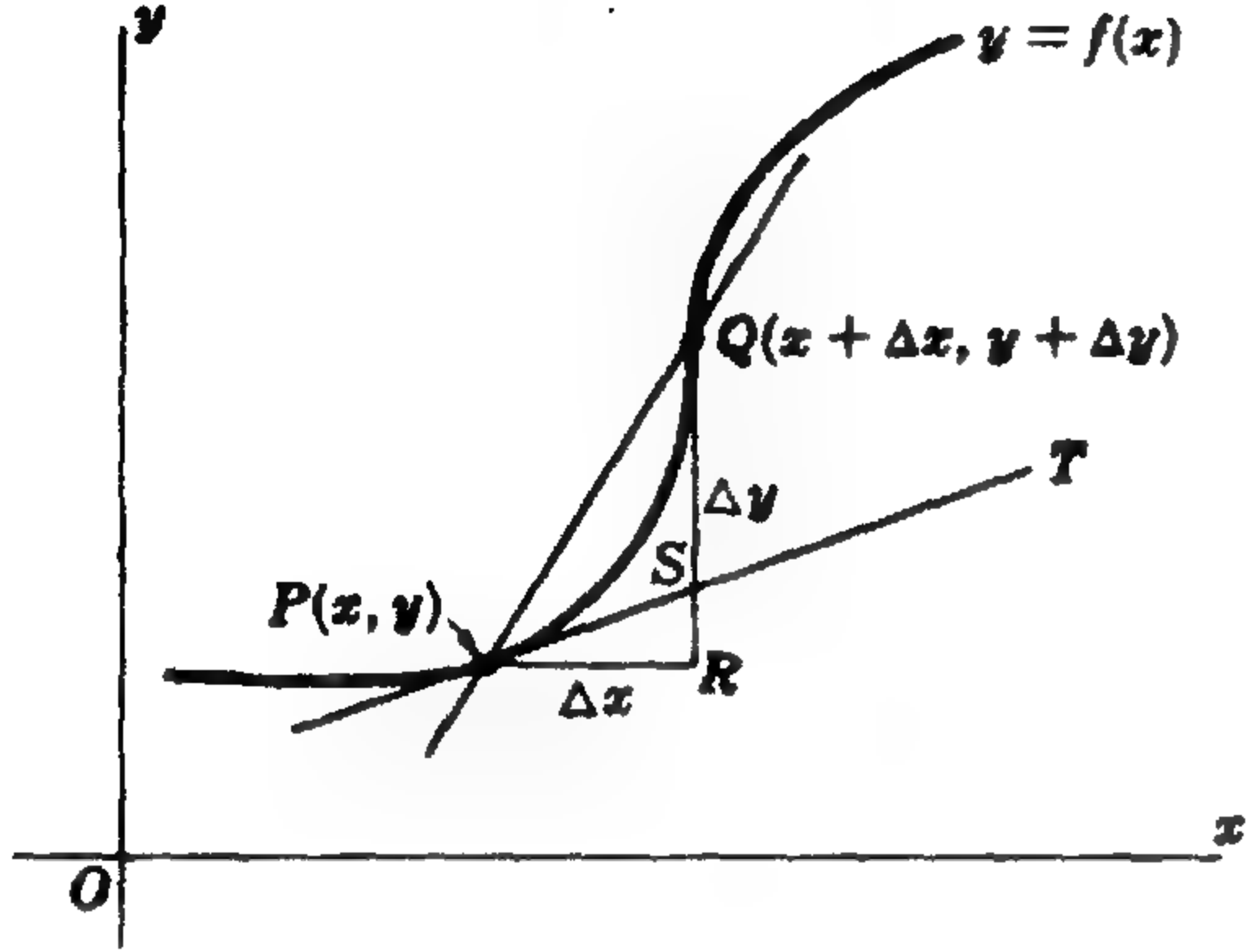
$$= \frac{[(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} \quad (٣)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad (٤)$$

والمشتقة غير موجودة عند $x = 0$ لانعدام المقام . ومن الملاحظ أن الدالة مستمرة عند $x = 0$ هذا بالإضافة إلى الملاحظة التي مرت في نهاية المسألة ٧ يتضح لنا أنه : إذا وجدت مشتقة دالة عند نقطة $x = a$ فالدالة مستمرة عند هذه النقطة وليس العكس .



شكل ٤ - ١

٩ - فسر dy/dx هندسياً .

نرى من الشكل ٤ - ١ أن $\Delta y / \Delta x$ تمثل ميل القاطع التي يصل نقطة اختيارية ثابتة مثل $P(x, y)$ على المنحنى بنقطة مجاورة $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ قريبة منها على نفس المنحنى . وعندما $\Delta x \rightarrow 0$ تقل PQ ثابتة في حين تتحرك Q على متجهة نحو P ويدور بذلك المستقيم PQ حول P في اتجاه موضع نهائي وهو المماس PT للمنحنى عند P . وعلى هذا نجد أن dy/dx هو ميل المماس عند P للمنحنى $y = f(x)$.

وعلى سبيل المثال نرى من المسألة ٣ أن ميل المنحنى المكعب $y = x^3 - x^2 - 4$ عند النقطة $x = 4$ هو

$m = 40$ وعند النقطة $x = 0$ هو $m = 0$ وعند النقطة $x = -1$ هو $m = 5$.

١٠ - أوجد ds/dt لدالة المسألة (٧) وفسر النتيجة .

$$\text{نجد هنا أن } \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9.8t_0 + 4.9\Delta t) = 9.8t_0 \quad \text{و} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = 9.8t_0 + 4.9\Delta t$$

وعندما $\Delta t \rightarrow 0$ فإن $\Delta s / \Delta t$ تعطي السرعة المتوسطة للجسم في فترة زمنية أقصر وأقصر Δt .

وتعرف ds/dt على أنها السرعة اللحظية v للجسم عند زمن $t = t_0$. فعلى سبيل المثال يكون $v = 9.8(3) = 29.4 \text{ ms}^{-1}$ عندما $t = 3$.

١١ - إذا كان $f(x) = |x|$ فأوجد $f'(x)$

الدالة مستمرة لجميع قيم x ، وعند $x < 0$ فإن $f(x) = -x$ و $f'(x) = -1$ أما عند $x > 0$ فإن $f(x) = x$ و $f'(x) = 1$.

$$\text{أما عند } x = 0 \text{ فإن } f(x) = 0 \text{ و } f'(x) = 0 \text{ .} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\text{وعندما } \Delta x \rightarrow 0^- \text{ نجد أن } \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \rightarrow -1 \text{ في حين عندما } \Delta x \rightarrow 0^+ \text{ نجد } \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \rightarrow 1$$

وبالتالي فإن المشتقة غير موجودة عند $x = 0$.

١٢ - احسب $\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}$ لدالة (١) في المسألة ٣ و (ب) في المسألة ٥ . حقق أن $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\epsilon = \{3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2\} - \{3x^2 - 2x\} = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x. \quad (١)$$

$$\epsilon = \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} - \frac{-1}{(x - 2)^2} = \frac{-(x - 2) + (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)^2(x + \Delta x - 2)} = \frac{1}{(x - 2)^2(x + \Delta x - 2)} \Delta x \quad (ب)$$

$$١٣ - \text{فرض هنا} \Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$$

من الشكل في المسألة ٩ نجد أن $\Delta y = RQ$ و $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = PR \cdot \tan \angle TPR = RS$ ؛ إذن $\Delta x = SQ$ والتغير $\epsilon \cdot \Delta x$ في x من $P(x, y)$ يقابله تغير Δy في y على المنحنى بينما يكون $\frac{dy}{dx} \Delta x$ التغير المقابل في y على المستقيم المماس PT وبما أن الفرق $\epsilon \cdot \Delta x = (\dots) (\Delta x)^2 \rightarrow 0$ أسرع من Δx فإننا سنستخدم $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$ الوارد في الفصل ٢٢ كتقريب لـ Δy عندما يكون $|\Delta x|$ صغيراً .

مسائل إضافية

١٤- أوجد Δy و $\Delta y / \Delta x$ إذا كان :

$$(أ) \quad y = 2x - 3 \quad \text{و} \quad x \text{ تتغير من } 3.3 \text{ إلى } 3.5 .$$

$$(ب) \quad y = x^2 + 4x \quad \text{و} \quad x \text{ تتغير من } 0.7 \text{ إلى } 0.85 .$$

$$(ج) \quad y = 2/x \quad \text{و} \quad x \text{ تتغير من } 0.75 \text{ إلى } 0.5 .$$

$$\text{ج : } (أ) \quad 2; 0.4 \quad (ب) \quad 5.55; 0.8325 \quad (ج) \quad -16/3; 4/3$$

١٥- أوجد Δy إذا كان $x = 5$, $y = x^3 - 3x + 5$, و $\Delta x = -0.01$. ماذا ستكون قيمة y عندما $x = 4.99$ ؟

$$\text{ج : } y = 14.9301; \Delta y = -0.0699$$

١٦- أوجد السرعة المتوسطة عندما :

$$(أ) \quad s = (3t^2 + 5) \text{ m} \quad \text{و} \quad t \text{ تتغير من } 2s \text{ إلى } 3s .$$

$$(ب) \quad s = (2t^2 + 5t - 3) \text{ m} \quad \text{و} \quad t \text{ تتغير من } 2s \text{ إلى } 5s .$$

$$\text{ج : } (أ) \quad 15 \text{ ms}^{-1} \quad (ب) \quad 19 \text{ ms}^{-1}$$

١٧- أوجد الزيادة في حجم بالون كروي عندما يزداد نصف قطره (أ) من r إلى $r + \Delta r$

$$(ب) \quad \text{من } 5 \text{ إلى } 8 \text{ cm}$$

$$\text{ج : } (أ) \quad \frac{4\pi}{3} (3r^2 + 3r \cdot \Delta r + \Delta r^2) \cdot \Delta r \text{ cm}^3 \quad (ب) \quad \frac{524\pi}{3} \text{ cm}^3$$

١٨- أوجد مشتقة كل من الدوال :

$$(أ) \quad y = 4x - 3 \quad (ب) \quad y = 1/x^3 \quad (ج) \quad y = \sqrt{x} \quad (د) \quad y = \sqrt{1+2x}$$

$$(أ) \quad y = 4 - 3x \quad (ب) \quad y = (2x-1)/(2x+1) \quad (ج) \quad y = 1/\sqrt{x} \quad (د) \quad y = 1/\sqrt{2+x}$$

$$(أ) \quad y = x^3 + 2x - 3 \quad (ب) \quad y = (1+2x)/(1-2x)$$

$$\text{ج : } (أ) \quad \frac{4}{-3} \quad (ب) \quad \frac{4}{(2x+1)^4} \quad (ج) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (د) \quad \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$(أ) \quad \frac{2(x+1)}{-2/x^3} \quad (ب) \quad \frac{4}{(1-2x)^2} \quad (ج) \quad -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (د) \quad -\frac{1}{2(2+x)^{3/2}}$$

١٩- أوجد ميل المنحنيات التالية عند النقطة $x = 1$:

(١) $y = 8 - 5x^2$, (ب) $y = \frac{4}{x+1}$, (ج) $y = \frac{2}{x+3}$, (د)

ج : (١) -10 (ب) -1 (ج) $-1/8$

٢٠- أوجد إحداثيات رأس القطع المكافئ $y = x^2 - 4x + 1$ مستقيماً من كون ميل المماس عند الرأس مسلوياً للصفر .

ج : $V(2, -3)$

٢١- أوجد ميل مماسات القطع المكافئ $y = -x^2 + 5x - 6$ عند نقط تقاطعه مع المحور السيني .

ج : $m = 1$ عند $x = 2$ و $m = -1$ عند $x = 3$

٢٢- إذا كانت s مقاسة بالأمتار (m) و t بالثواني (s) فأوجد سرعة الحركات التالية عند الزمن $t = 2$.

(١) $s = t^2 + 3t$ (ب) $s = t^3 - 3t^2$ (ج) $s = \sqrt{t+2}$

ج : (أ) 7 ms^{-1} (ب) 0 ms^{-1} (ج) $1/4 \text{ ms}^{-1}$

٢٣- بين أن معدل التغير الخطي لحجم مكعب بالنسبة لفضله x (cm) هو 75 cm^3 لكل cm وذلك عندما تكون $x = 5 \text{ cm}$.

الفصل الخامس

مشتقات الدوال الجبرية

نقول عن دالة إنها قابلة للاشتقاق عند $x = x_0$ إذا كان لها مشتقة هناك . ونقول عن دالة إنها قابلة للاشتقاق في فترة ما إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة .

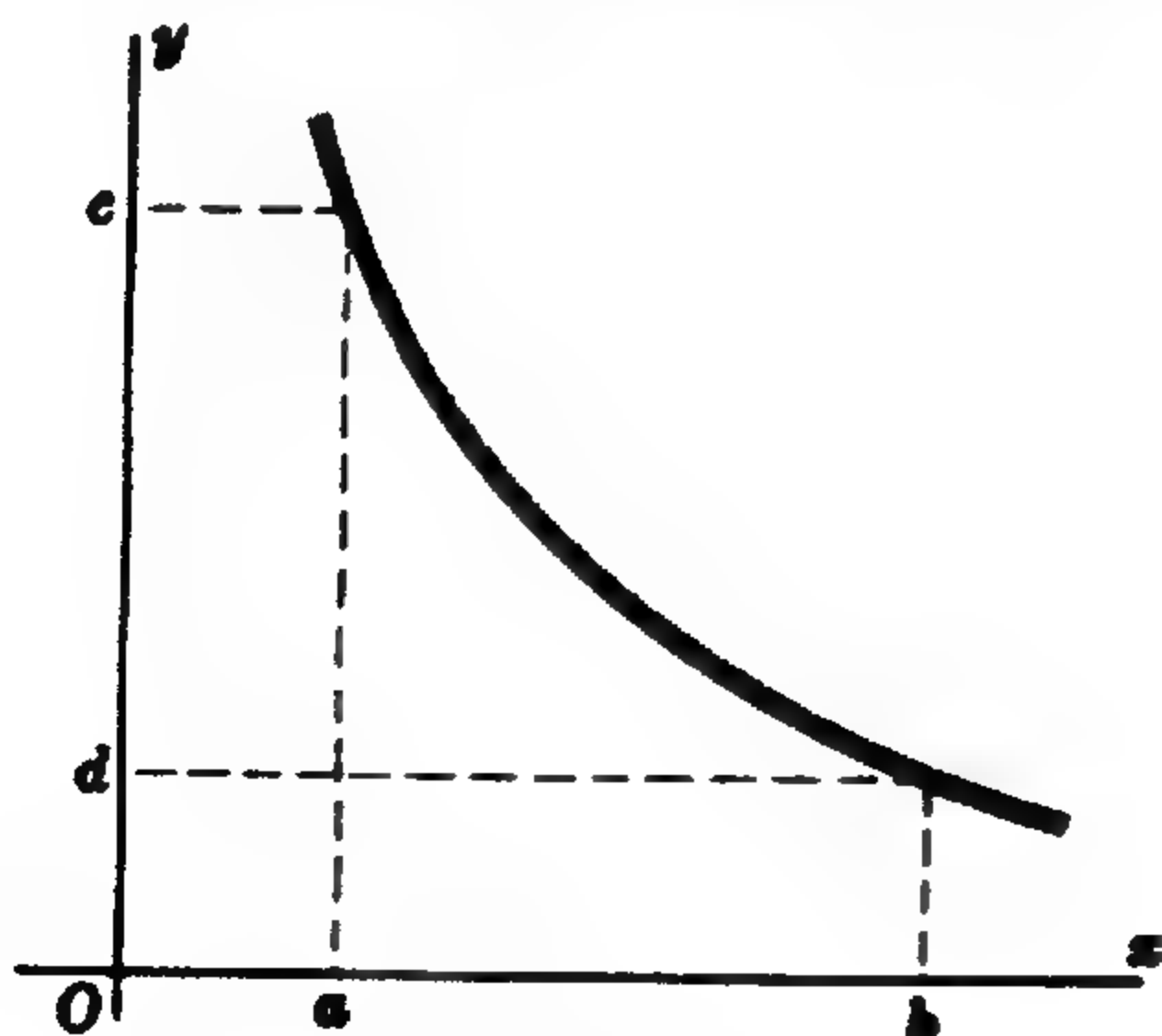
إن دوال حساب التفاضل والتكامل الابتدائية قابلة للاشتقاق في فترات تعريفها باستثناء على الأكثر ، بعض النقاط المنزلة في هذه الفترات .

صيغ الاشتقاق : نعتبر الدوال u, v, w في الصيغ التالية قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x :

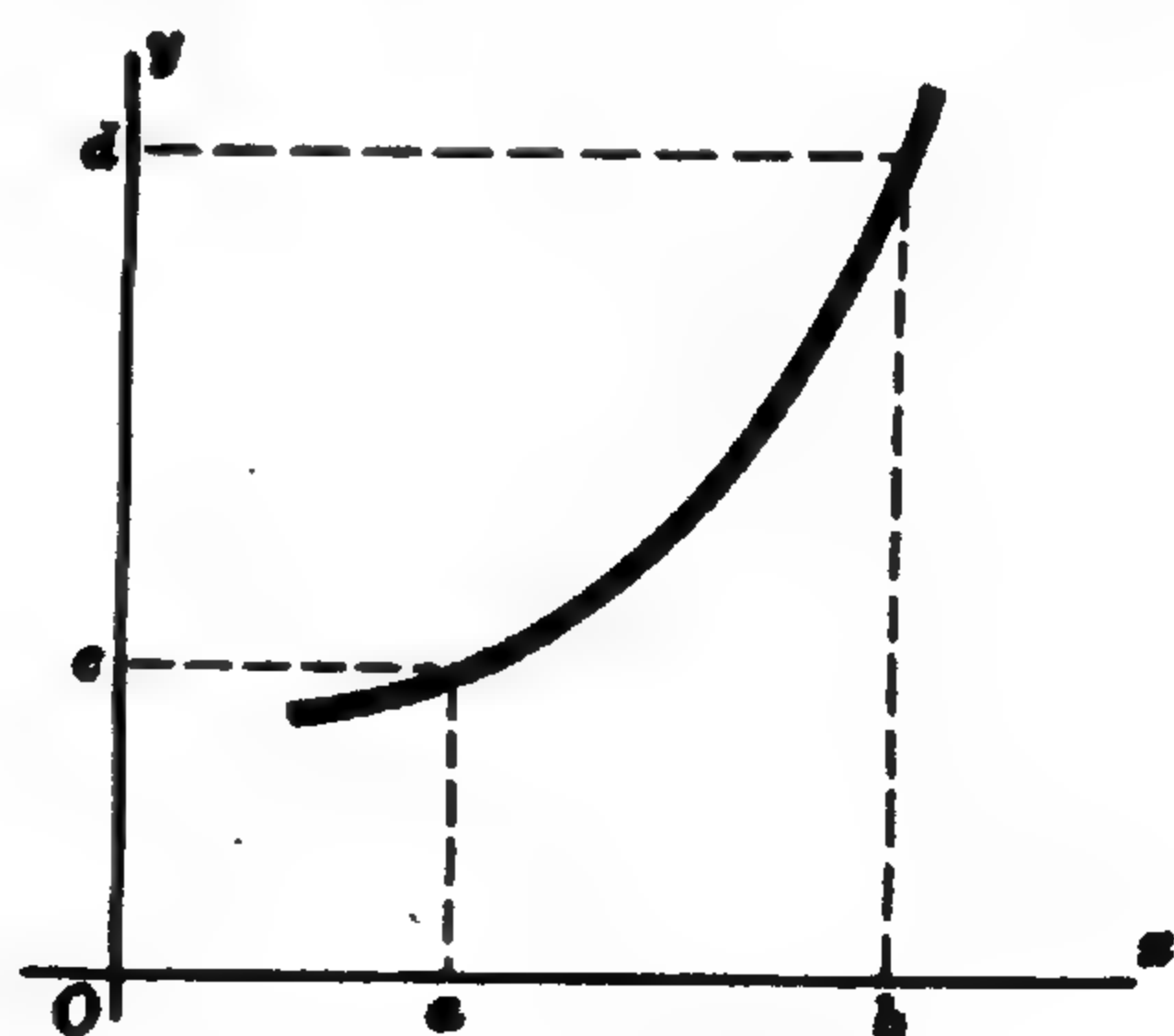
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(c) &= 0, -1 & \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) &= \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx}(u), \quad c \neq 0 - 7 \\ \frac{d}{dx}(x) &= 1 - 2 & \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) &= c \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2} \cdot \frac{d}{dx}(u), \quad u \neq 0 - 8 \\ \frac{d}{dx}(u+v+\dots) &= \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \dots - 3 & \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0 - 9 \\ \frac{d}{dx}(cu) &= c \frac{d}{dx}(u) - 4 & \frac{d}{dx}(x^m) &= mx^{m-1} - 10 \\ \frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u) - 5 & \frac{d}{dx}(u^m) &= mu^{m-1} \frac{d}{dx}(u) - 11 \\ \frac{d}{dx}(uvw) &= uv \frac{d}{dx}(w) + uw \frac{d}{dx}(v) + vw \frac{d}{dx}(u) - 6 \end{aligned}$$

أنظر المسائل ١ - ١٢

الدوال العكسية : لتكن الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق في الفترة $a \leq x \leq b$ ولنفرض أن dy/dx لا يغير إشارته في هذه الفترة . عندئذ يبدو من الشكلين ١ - (أ) و ١ - (ب) أن الدالة تأخذ قيمة واحدة وقيمة فقط بين $f(a) = c$ و $f(b) = d$ وعلى هذا فكل قيمة لـ y تقابلها الفترة الميمنة قيمة لـ x وقيمة واحدة فقط وبالتالي فإن x دالة لـ y ولتكن $x = g(y)$ والدالتين $y = f(x)$ و $x = g(y)$ تعرفان بالدوال العكسية .



شكل ١ - (ب)



شكل ١ - (أ)

مثال ١ :

$$(١) \quad y = f(x) = 3x + 2 \quad \text{و} \quad x = g(y) = 1/3(y - 2) \quad \text{دالتان عكسيتان.}$$

$$(ب) \quad \text{إن الدالتين} \quad y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{و} \quad x = 2 - \sqrt{y+1} \quad \text{عكسيتان عندما} \quad x \leq 2 \quad \text{و} \quad y \geq -1$$

$$\text{و الدالتين} \quad y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{و} \quad x = 2 + \sqrt{y+1} \quad \text{عكسيتان عندما} \quad x \geq 2 \quad \text{و} \quad y \geq -1.$$

$$\text{لإيجاد} \quad dy/dx \quad \text{عندما نعطي} \quad x = g(y) :$$

$$(١) \quad \text{حل المعادلة بالنسبة لـ} \quad y, \quad \text{إذا كان ذلك ممكناً, ثم اشتق بالنسبة لـ} \quad x \quad \text{أو}$$

$$(ب) \quad \text{اشتق} \quad x = g(y) \quad \text{بالنسبة لـ} \quad y \quad \text{ثم نستخدم العلاقة ١٢}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad - \quad ١٢$$

مثال ٢ :

$$\text{أوجد} \quad dy/dx \quad \text{إذا كان} \quad x = \sqrt{y+5}.$$

$$\text{باستخدام (١) نجد أن} \quad y = (x-5)^2 \quad \text{و} \quad dy/dx = 2(x-5).$$

$$\text{باستخدام (ب) } \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2(x-5)} \quad \text{و بالتالي} \quad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x-5).$$

أنظر المسائل ١٤ - ١٥

اشتقاق دالة الدالة :

إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فنحن نريد أن يكون $y = f\{g(x)\}$ دالة لـ x وإذا كانت y دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ u و u كانت دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإن $y = f\{g(x)\}$ تكون دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x ويمكن الحصول على المشتقة dy/dx باتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

(١) عبر عن y صريحة في x ثم اشتق.

مثال ٣

$$\text{إذا كانت} \quad y = u^2 + 3 \quad \text{و} \quad u = 2x + 1 \quad \text{فنحن نريد} \quad y = (2x+1)^2 + 3 \quad \text{و} \quad dy/dx = 8x + 4$$

$$(ب) \quad \text{اشتق كلا من الدالتين بالنسبة للمتغير المستقل واستخدم العلاقة التالية (قاعدة السلسلة).}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad - \quad ١٣$$

مثال ٤ :

$$\text{إذا كان} \quad y = u^2 + 3 \quad \text{و} \quad u = 2x + 1 \quad \text{فإن} \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad \frac{dy}{du} = 2u = 4x + 4. \quad \text{ومن ثم} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u = 8x + 4.$$

أنظر المسائل ١٦ - ٢٠

المشتقات العليا :

لتكن $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق لـ x ولنفرض أن مشتقتها تسمى المشتقة الأولى للدالة. فإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثانية للدالة (الأصلية) ونرمز لها بإحدى الرموز التالية

وبالتالى فإن مشتقة المشتقة الثانية تسمى المشتقة الثالثة للدالة ونرمز لها بإحدى الرموز التالية .

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \quad |y''', \quad |f'''(x)$$

ملاحظة : لا توجد مشتقة من رتبة معينة عند نقطة ما لم تكن الدالة وجميع مشتقاتها الأدنى فى الرتبة قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة .

أنظر المسائل ٢١ - ٢٢

مسائل محلولة

$$١ - \text{أثبت أن : (١) } \frac{d}{dx}(c) = 0 \text{ حيث } c \text{ أى ثابت (ب) } \frac{d}{dx}(x) = 1 \text{ (ج) } \frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\text{حيث } c \text{ أى ثابت (د) } \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \text{ عندما يكون } n \text{ عددا صحيحا موجبا .}$$

$$\text{بما أن } \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ فإن}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (١)$$

$$\frac{d}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad (ب)$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c(x+\Delta x) - cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c = c \quad (ج)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left\{ x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \right\} - x^n}{\Delta x} \quad (د)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right\} = nx^{n-1}$$

$$٧ - \text{إذا كانت } u \text{ و } v \text{ دالتين قابليتين للاشتقاق بالنسبة لـ } x \text{ فأثبت أن (١) } \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0 \quad (ج) \quad \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dx}(u) \quad (ب)$$

$$(١) \text{ لنفرض أن } f(x) = u + v = u(x) + v(x); \text{ إذن :}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$\text{وبأخذ النهاية عندما } \Delta x \rightarrow 0 \text{ نجد أن } \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v).$$

$$(ب) \text{ لنفرض أنه } f(x) = u \cdot v = u(x) \cdot v(x); \text{ إذن } \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - v(x) \cdot u(x+\Delta x)] + [v(x) \cdot u(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x) \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\text{ومن ثم } \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u(x) \frac{d}{dx}v(x) + v(x) \frac{d}{dx}u(x) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u).$$

$$(ج) \text{ لنفرض أن } f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}; \text{ إذن}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{\Delta x \{v(x) \cdot v(x + \Delta x)\}} \\
 &= \frac{[u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)] - [u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x \{v(x) \cdot v(x + \Delta x)\}} \\
 &= \frac{v(x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)} \\
 \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v(x) \frac{d}{dx} u(x) - u(x) \frac{d}{dx} v(x)}{\{v(x)\}^2} = \frac{v \frac{d}{dx} (u) - u \frac{d}{dx} (v)}{v^2} \quad \text{ومن هنا}
 \end{aligned}$$

اشتق كلا من الدوال التالية :

$$\begin{aligned}
 y &= 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5 - 7 \\
 \frac{dy}{dx} &= 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3} - 8 \\
 \frac{dy}{dx} &= -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2} - 8 \\
 \frac{dy}{dx} &= 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4} - 9 \\
 \frac{dy}{dx} &= 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right) \\
 &= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2} - 9 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3} \cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2} \cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= (t^2 - 3)^4 - 8 \\
 \frac{dz}{dt} &= 4(t^2 - 3)^3 (2t) = 8t(t^2 - 3)^3 \\
 z &= \frac{3}{(a^2 - y^2)^2} = 3(a^2 - y^2)^{-2} - 9 \\
 \frac{dz}{dy} &= 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3} \cdot \frac{d}{dy} (a^2 - y^2) = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3} (-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2} \quad ١٠$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}(2x + 6) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

$$y = (x^2 + 4)^3 (2x^3 - 1)^2 \quad ١١$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 4)^3 \cdot \frac{d}{dx}(2x^3 - 1)^2 + (2x^3 - 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4)^3 \\ &= (x^2 + 4)^3 \cdot 3(2x^3 - 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x^3 - 1) + (2x^3 - 1)^2 \cdot 2(x^2 + 4)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4) \\ &= (x^2 + 4)^3 \cdot 3(2x^3 - 1)^2 \cdot 6x^2 + (2x^3 - 1)^2 \cdot 2(x^2 + 4)^2 \cdot 2x = 2x(x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^2(13x^3 + 36x - 2) \end{aligned}$$

$$y = \frac{3 - 2x}{3 + 2x} \quad ١٢$$

$$y' = \frac{(3 + 2x) \cdot \frac{d}{dx}(3 - 2x) - (3 - 2x) \cdot \frac{d}{dx}(3 + 2x)}{(3 + 2x)^2} = \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)(2)}{(3 + 2x)^2} = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

$$y = \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{x^3}{(4 - x^2)^{1/2}} \quad ١٣$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(4 - x^2)^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \cdot \frac{d}{dx}(4 - x^2)^{1/2}}{4 - x^2} = \frac{(4 - x^2)^{1/2}(2x) - x^3 \cdot \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)}{4 - x^2} \\ &= \frac{(4 - x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4 - x^2)^{-1/2}}{4 - x^2} \cdot \frac{(4 - x^2)^{1/2}}{(4 - x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4 - x^2) + x^3}{(4 - x^2)^{3/2}} = \frac{8x - x^3}{(4 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$١٤ - \text{إذا كان } x = y\sqrt{1 - y^2} \text{ فلوجد } dy/dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 - 2y^2} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dy} = (1 - y^2)^{1/2} + \frac{1}{2}y(1 - y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{1 - 2y^2}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$١٥ - \text{أوجد ميل المنحنى } x = y^2 - 4y \text{ عند نقط تقاطعه مع المحور } y$$

$$\text{إن نقطى التقاطع هما النقطتان } (0, 4) \text{ و } (0, 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2y - 4} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dy} = 2y - 4$$

$$\text{والميل عند النقطة } (0, 0) \text{ هو } 1/4 - \text{عند النقطة } (0, 4) \text{ يكون الميل } 1/4$$

قاعدة السلسلة :

$$١٦ - \text{استنتج قاعدة السلسلة} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ليكن Δu , Δy التزايدين اللذين يطرآن على u و y على التوالي عندما تعطى x تزايداً مقداره Δx فإذا فرضنا الآن أن $\Delta u \neq 0$ فإن

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وبفرض $\Delta u \neq 0$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ وهو المطلوب .

يعتبر القيد الذي فرضناه على Δu محققاً إذا انتصرت $|\Delta x|$ على قيم صغيرة بقدر كاف . أما إذا كان هذا الأمر مستحيلاً فنعتمد يمكن برهان قاعدة السلسلة على النحو التالي :

لنضع $\Delta y = \frac{dy}{du} \Delta u + \epsilon \cdot \Delta u$ حيث $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$

(أنظر المألة ١٣ من الفصل الرابع)

عندئذ يكون

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + 0 \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ كما سبق .

١٧- أوجد dy/dx بفرض أن $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ و $u = \sqrt[3]{x^2+2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{2x}{3u^2} \quad , \quad \frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \quad \text{أن}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \cdot \frac{2x}{3u^2} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2} \quad \text{وبالتالى}$$

١٨- تتحرك نقطة على المنحنى $y = x^3 - 3x + 5$ بحيث تكون $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ حيث t هو الزمن . بأى

معدل تتغير y عندما تكون $t = 4$ ؟

ينبى أن نجد قيمة dy/dt عندما $t = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2-1), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2-1)}{4\sqrt{t}}$$

وعندما $t = 4$ تكون $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$ و $\frac{dy}{dt} = \frac{3(16-1)}{4 \cdot 2} = \frac{45}{8}$ أى $45/8$ وحدة فى كل وحدة زمن .

١٩- تتحرك نقطة على المستوى وفق القانون $x = t^3 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$. أوجد dy/dx عندما $t = 0, 2, 5$.

بما أنه يمكن حل العلاقة الأولى بالنسبة لـ t والتعويض بالنتيجة عن t في العلاقة الثانية فإنه يتضح أن y دالة لـ x .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 6(t^2-1) \cdot \frac{1}{2(t+1)} = 3(t-1) \quad \text{ومن} \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2-6, \quad \frac{dx}{dt} = 2t+2, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t+2},$$

والقيمة المطلوبة لـ dy/dx هي -3 عندما $t = 0$ و 3 عندما $t = 2$ و 12 عندما $t = 5$.

٢٠- إذا كان $y = x^2 - 4x$ و $x = \sqrt{2t^2+1}$ فأوجد dy/dt عندما $t = \sqrt{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}(5-2\sqrt{5}). \quad \text{و} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{فإن} \quad t = \sqrt{2}$$

٢١- بين أن لدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ مشتقات من جميع الرتب عندما $x = a$

$$f'(a) = 3a^2 + 6a - 8 \quad , \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 8$$

$$f''(a) = 6a + 6 \quad , \quad f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(a) = 6 \quad , \quad f'''(x) = 6$$

وجميع المشتقات ذات الرتب الأعلى تساوى صفر .

٢٢- ابحث في المشتقات المتتالية لـ $f(x) = x^{4/3}$ عندما $x = 0$

$$f'(0) = 0 \quad , \quad f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$$

$$f''(0) \text{ غير موجودة} \quad , \quad f''(x) = \frac{4}{9x^{2/3}}$$

وهكذا فالمشتقة الأولى موجودة عندما $x = 0$ دون سواها من المشتقات ذات الرتبة الأعلى .

٢٣- إذا فرضنا $f(x) = \frac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$ ، فأوجد $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x) = 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2 \cdot 1! (1-x)^{-2} \quad \text{نجد :}$$

$$f''(x) = 2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2 \cdot 2! (1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2 \cdot 3! (1-x)^{-4}$$

وهذا يوضح لنا أن $f^{(n)}(x) = 2 \cdot n! (1-x)^{-(n+1)}$.

ولبرهان ذلك يمكن اللجوء إلى الاستقراء الرياضي وثبت أنه إذا كان $f^{(k)}(x) = 2 \cdot k! (1-x)^{-(k+1)}$ ،

$$\text{فإن } f^{(k+1)}(x) = -2 \cdot k! (k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2 \cdot (k+1)! (1-x)^{-(k+2)}$$

مسائل إضافية

٢٤- برهن الصيغة ١٠ بفرض $m = -1/n$ حيث n عدد صحيح موجب مستخدماً الصيغة ٩ لحساب $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^n} \right)$.

(أنظر المسألة ٤ من الفصل السادس لحالة $m = p/q$ حيث p و q عدنان صحيحان).

أوجد المشتقة في كل من المسائل ٢٥ - ٤٣.

$$dy/dx = 5x(x^3 + 4x^2 - 4) \quad \text{ج}$$

$$y = x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 6 \quad \text{٢٥ -}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{ج}$$

$$y = 3x^{1/3} - x^{2/3} + 2x^{-1/3} \quad \text{٢٦ -}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^{5/2}} \quad \text{ج}$$

$$y = \frac{1}{2x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-3} + 4x^{-1/2} \quad \text{٢٧ -}$$

$$y' = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2x}} \quad \text{ج}$$

$$y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x} \quad \text{٢٨ -}$$

$$f'(t) = -\frac{t^{1/2} + 2t^{3/2}}{t^3} \quad \text{ج}$$

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}} \quad \text{٢٩ -}$$

$$y' = -30(1 - 5x)^5 \quad \text{ج}$$

$$y = (1 - 5x)^6 \quad \text{٣٠ -}$$

$$f'(x) = 12(1 - x^3)(3x - x^3 + 1)^3 \quad \text{ج}$$

$$f(x) = (3x - x^3 + 1)^4 \quad \text{٣١ -}$$

$$y' = \frac{2-x}{y} \quad \text{ج}$$

$$y = (3 + 4x - x^2)^{1/3} \quad \text{٣٢ -}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{5}{(2r+3)^2} \quad \text{ج}$$

$$\theta = \frac{3r+2}{2r+3} \quad \text{٣٣ -}$$

$$y' = \frac{5x^4}{(1+x)^6} \quad \text{ج}$$

$$y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^5 \quad \text{٣٤ -}$$

$$y' = \frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}} \quad \text{ج}$$

$$y = 2x^2\sqrt{2-x} \quad \text{٣٥ -}$$

$$f'(x) = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}} \quad \text{ج}$$

$$f(x) = x\sqrt{3-2x^2} \quad \text{٣٦ -}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - 4x + 3}{\sqrt{x^3 - 2x + 2}} \quad \text{ج}$$

$$y = (x-1)\sqrt{x^3 - 2x + 2} \quad \text{٣٧ -}$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{(1-4w^2)^{3/2}} \quad \text{ج}$$

$$z = \sqrt{1-4w^2} \quad \text{٣٨ -}$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}} \quad \text{ج}$$

$$y = \sqrt{1+\sqrt{x}} \quad \text{٣٩ -}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} : \text{ج}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - ٤٠$$

$$y' = 2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20) : \text{ج}$$

$$y = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3 - ٤١$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{10t}{(3-t^2)^2} : \text{ج}$$

$$s = \frac{t^2+2}{3-t^2} - ٤٢$$

$$y' = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^4} : \text{ج}$$

$$y = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4 - ٤٣$$

٤٤- احسب dy/dx بطريقتين مختلفتين وتحقق من عدم اختلاف النتائج :

$$x = 1/(2+y), \quad (ب) \quad x = (1+2y)^3, \quad (١)$$

استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد dy/dx في المسائل ٤٥ - ٤٨

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} : \text{ج}$$

$$y = \frac{u-1}{u+1}, \quad u = \sqrt{x} - ٤٥$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2(x+2)^3(x+1) : \text{ج}$$

$$y = u^3+4, \quad u = x^2+2x - ٤٦$$

ج : أنظر المسألة ٣٩ .

$$y = \sqrt{1+u}, \quad u = \sqrt{x} - ٤٧$$

أنظر المسألة ٣٩

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} : \text{إرشاد} \quad y = \sqrt{u}, \quad u = v(3-2v), \quad v = x^2 - ٤٨$$

أوجد في كل من المسائل ٤٩ - ٥٢ المشتقة المبينة إلى جانب كل مسألة

$$y''' = 72x : \text{ج}$$

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x - 5; \quad y''' - ٤٩$$

$$y^{(iv)} = \frac{105}{16x^{9/2}} : \text{ج}$$

$$y = 1/\sqrt{x}; \quad y^{(iv)} - ٥٠$$

$$f''(x) = \frac{-6}{(2-3x^2)^{3/2}} : \text{ج}$$

$$f(x) = \sqrt{2-3x^2}; \quad f''(x) - ٥١$$

$$y'' = \frac{4-x}{4(x-1)^{5/2}} : \text{ج}$$

$$y = x/\sqrt{x-1}, \quad y'' - ٥٢$$

أوجد المشتق من المرتبة n في كل من المسائل ٥٣ - ٥٤

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}} : \text{ج}$$

$$y = 1/x^2 - ٥٣$$

$$f^n(x) = (-1)^n \frac{3^n \cdot n!}{(3x+2)^{n+1}} : \text{ج}$$

$$f(x) = 1/(3x+2) - ٥٤$$

٥٥ - إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فبين أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + 3 \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^2y}{du^3} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \quad (ب) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \quad (١)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^3}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3} \quad \text{استنتج} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \quad \text{من العلاقة} - ٥٦$$

الفصل السادس

الاشتقاق الضمني

الدوال الضمنية : نقول من معادلة $f(x, y) = 0$ الشكل $f(x, y) = 0$ على مدين معين وقد يكونان مقيدين المتغيرين ، أنها تعرف y دالة x بشكل ضمني .

مثال ١ :

(١) تعرف المعادلة $xy + x - 2y - 1 = 0$ عندما $x \neq 2$ الدالة $y = \frac{1-x}{x-2}$

(ب) تعرف المعادلة $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ الدالة $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ عندما $y \geq 0, |x| \leq 3$ والدالة $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ عندما $y \leq 0, |x| \leq 3$. لاحظ أن القطع الناقص يمكن اعتباره على أنه مكون من قوسين متصلين عند القطبين $(-3, 0)$ و $(3, 0)$.

ويمكن الحصول على المشتق y' باتباع إحدى الطريقتين :

(١) حل المعادلة بالنسبة لـ y إن كان الأمر ممكناً ثم اشتق بالنسبة لـ x ولكن ينبغي أن نتوقع ضرورة تفادي هذه الطريقة في المعادلات البسيطة جداً .

(ب) اعتبر y دالة لـ x واشتق المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x ثم حل العلاقة الناتجة بالنسبة لـ y' . تعرف طريقة الاشتقاق هذه بالاشتقاق الضمني .

مثال ٢ :

(١) أوجد y' إذا كان $xy + x - 2y - 1 = 0$.

لدينا $x \cdot \frac{d}{dx}(y) + y \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x) - 2 \cdot \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$

أو $xy' + y + 1 - 2y' = 0$; إذن $y' = \frac{1+y}{2-x}$.

(ب) إذا كان $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. فأوجد y' عندما $x = \sqrt{5}$

لدينا $4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 9 \cdot \frac{d}{dx}(y^2) = 8x + 9 \cdot \frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} = 8x + 18yy' = 0$ ومنه $y' = -\frac{4x}{9y}$.

وعندما $x = \sqrt{5}$ يكون $y = \pm 4/3$ ويكون عند النقطة $(\sqrt{5}, 4/3)$ على القوس العلوي من القطع الناقص $y' = -\sqrt{5}/3$ ويكون عند النقطة $(\sqrt{5}, -4/3)$ على القوس السفلي $y' = \sqrt{5}/3$.

يمكن الحصول على المشتقات ذات الرتب الأعلى باتباع إحدى الطريقتين :
(١) اشتق ضمناً المشتقة من رتبة أدنى بواحد وعوض عن y' بقيمتها من العلاقة التي سبق أن وجدتها .

مثال ٣ :

لدينا من المثال ٢ (١) $y' = \frac{1+y}{2-x}$ إذن :

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' + 1+y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\frac{1+y}{2-x}\right) + 1+y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

(ب) اشتق المعادلة المفروضة ضمناً العدد الضروري من المرات كي تحصل على المشتقة المطلوبة ثم احذف جميع المشتقات من الرتب الأصغر . وتفضل هذه الطريقة فقط إذا كان المطلوب الحصول على مشتقة من رتبة عليا عند نقطة مفروضة .

مثال ٤ :

أوجد قيمة y'' عند النقطة $(-1, 1)$ على المنحنى $x^2y + 3y - 4 = 0$ بالاشتقاق الضمني مرتين بالنسبة لـ x نجد أن :

$$x^2y' + 2xy + 3y' = 0 \quad \text{ومنه} \quad x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$$

وبالتعويض عن $x = -1$ نجد $y = 1$ من العلاقة الأولى . إذن $y' = 1/2$
بالتعويض عن $x = -1$ و $y = 1$ و $y' = 1/2$ في العلاقة الثانية إذن $y'' = 0$

مسائل محلولة

١- إذا كان $x^2y - xy^2 + x^3 + y^3 = 0$ فأوجد y'

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 0 \\ x^2 \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(x^2) - x \frac{d}{dx}(y^2) - y^2 \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 0 \\ x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' &= 0 \end{aligned}$$

٢- إذا كان $x^3 - xy + y^3 = 3$ فأوجد y' و y''

$$\begin{aligned} \text{وبالتالي} \quad y' &= \frac{2x-y}{x-2y} \quad \text{ومن} \quad \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^3) = 2x - xy' - y + 2yy' = 0 \\ y'' &= \frac{(x-2y) \frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y) \frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2} \\ &= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^2} = \frac{18}{(x-2y)^2} \end{aligned}$$

٣- إذا كان $x^2y + xy^2 = 2$ فأوجد y' و y'' عندما $x = 1$

$$x^2y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

$$x^2y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0 \quad \text{و}$$

وعندما $x = 1$ يكون $y = 1$ بالتعويض في علاقة المشتقة الأولى نجد أن $y' = -1$

وبالتعويض عن $x = 1, y = 1, y' = -1$ في العلاقة الثانية نجد أن $y'' = 0$

مسائل إضافية

٤- استنتج الصيغة ١٠ من الفصل الخامس عندما $m = p/q$ حيث p, q عدنان صحيحان وذلك بكتابة $y = x^{p/q}$ بالشكل $y^q = x^p$ ثم بالاشتقاق بالنسبة لـ x .

٥- أوجد y'' بفرض (أ) $x + xy + y = 2$ (ب) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

$$y'' = -\frac{4xy}{(y^2 - x)^2} \quad (\text{ب}) \quad y'' = \frac{2(1+y)}{(1+x)^2}, \quad (\text{أ}) \quad \text{ج}$$

٦- أوجد y', y'', y''' عند (أ) النقطة $(2, 1)$ على المنحنى $x^2 - y^2 - x = 1$ (ب) النقطة $(1, 1)$ على المنحنى $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ ج: (أ) $3/2, -5/4, 45/8$; (ب) $1, 0, 0$

٧- أوجد الميل عند النقطة (x_0, y_0) لـ (أ) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (ب) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (ج) $x^2 + y^2 - 6x^2y = 0$.

$$\frac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2} \quad (\text{ج}) \quad \frac{b^2x_0}{a^2y_0}, \quad (\text{ب}) \quad -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}, \quad (\text{أ}): \text{ج}$$

٨- أثبت أن المنحنيين $5y - 2x + y^2 - x^2y = 0$ و $2y + 5x + x^2 - x^2y^2 = 0$ يتقاطعان بزاوية قائمة عند نقطة الأصل.

٩- (أ) المساحة السطحية الكلية لتوازي مستطيلات قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها y وارتفاعه x تعطى بالعلاقة $S = 2y^2 + 4xy$ فإذا كانت S ثابتة فأوجد dy/dx دون حل العلاقة بالنسبة لـ y .

(ب) تعطى المساحة السطحية الكلية لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h بالعلاقة $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

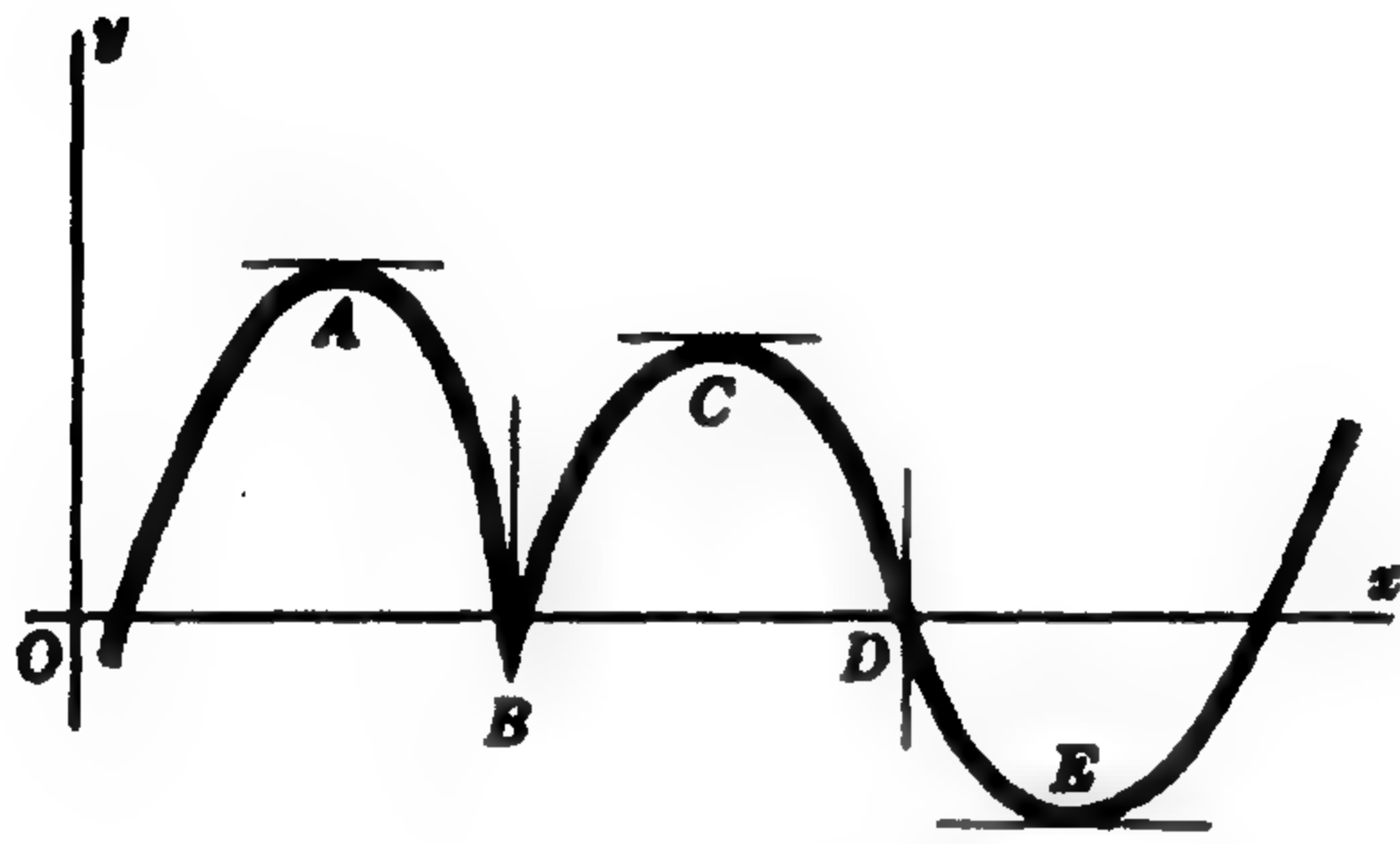
$$\text{فإذا كانت } S \text{ ثابتة فأوجد } dr/dh \quad \text{ج: (أ) } -\frac{y}{x+y} \quad (\text{ب}) -\frac{r}{2r+h}$$

$$10- \text{للدائرة } x^2 + y^2 = r^2 \text{ أثبت أن } \left| \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \right| = \frac{1}{r}.$$

١١- إذا كان $S = \pi x(x + 2y)$ و $V = \pi x^2y$ فأثبت أن $dS/dx = 2\pi(x - y)$ عندما تكون V ثابتة، وأن $dV/dx = -\pi x(x - y)$ عندما تكون S ثابتة.

الفصل السابع

المماسات والأعمدة



شكل ٧ - ١

إذا كان للدالة $f(x)$ مشتقة محددة $f'(x_0)$ عند $x = x_0$ فمعدنذ يكون المنحنى $y = f(x)$ مماس عند النقطة $P_0(x_0, y_0)$ ميله .

$$m = \tan \theta = f'(x_0)$$

وإذا كانت $m = 0$ فإنه يكون المنحنى مماس أفق يعطى بالعلاقة $y = y_0$ عند P_0 كما فى A, C, E فى الشكل ٧ - ١ وباستثناء هذه الحالة فإن معادلة المماس هى

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

وعندما تكون $f(x)$ مستمرة عند $x = x_0$ ولكن $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$ فمعدنذ يكون المنحنى مماس رأسى معادلته $x = x_0$ كما فى D, B من الشكل ٧ - ١ .

إن العمودى على منحنى عند إحدى نقاطه ، هو مستقيم مار بترك النقطة وقائم على المماس عندها . ومعادلة العمودى عند $P_0(x_0, y_0)$ هى .

إذا كان المماس أفقيا $x = x_0$

و إذا كان المماس عموديا $y = y_0$

وباستثناء هاتين الحالتين فإن معادلة العمودى هى

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

أنظر المسائل ١ - ٩

تعرف زاوية تقاطع منحنين على أنها الزاوية بين مماسيهما عند نقطة التقاطع .

لتعريف زوايا تقاطع منحنين :

(١) حل المعادلتين آنيا للحصول على نقط التقاطع .

(٢) أوجد الميلين m_1, m_2 لمماسى المنحنين عند كل نقط تقاطعهما .

(٣) إذا كان $m_1 = m_2$ فزاوية التقاطع $\phi = 0^\circ$

(٤) وإذا كان $m_1 = -1/m_2$ فزاوية التقاطع هي $\phi = 90^\circ$

وفي غير ذلك يكون

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

وتكون ϕ زاوية التقاطع الحادة عندما يكون $\tan \phi > 0$

وتكون $\phi = 180^\circ$ زاوية التقاطع الحادة عندما يكون $\tan \phi < 0$

أنظر المسائل ١٠ - ١٢

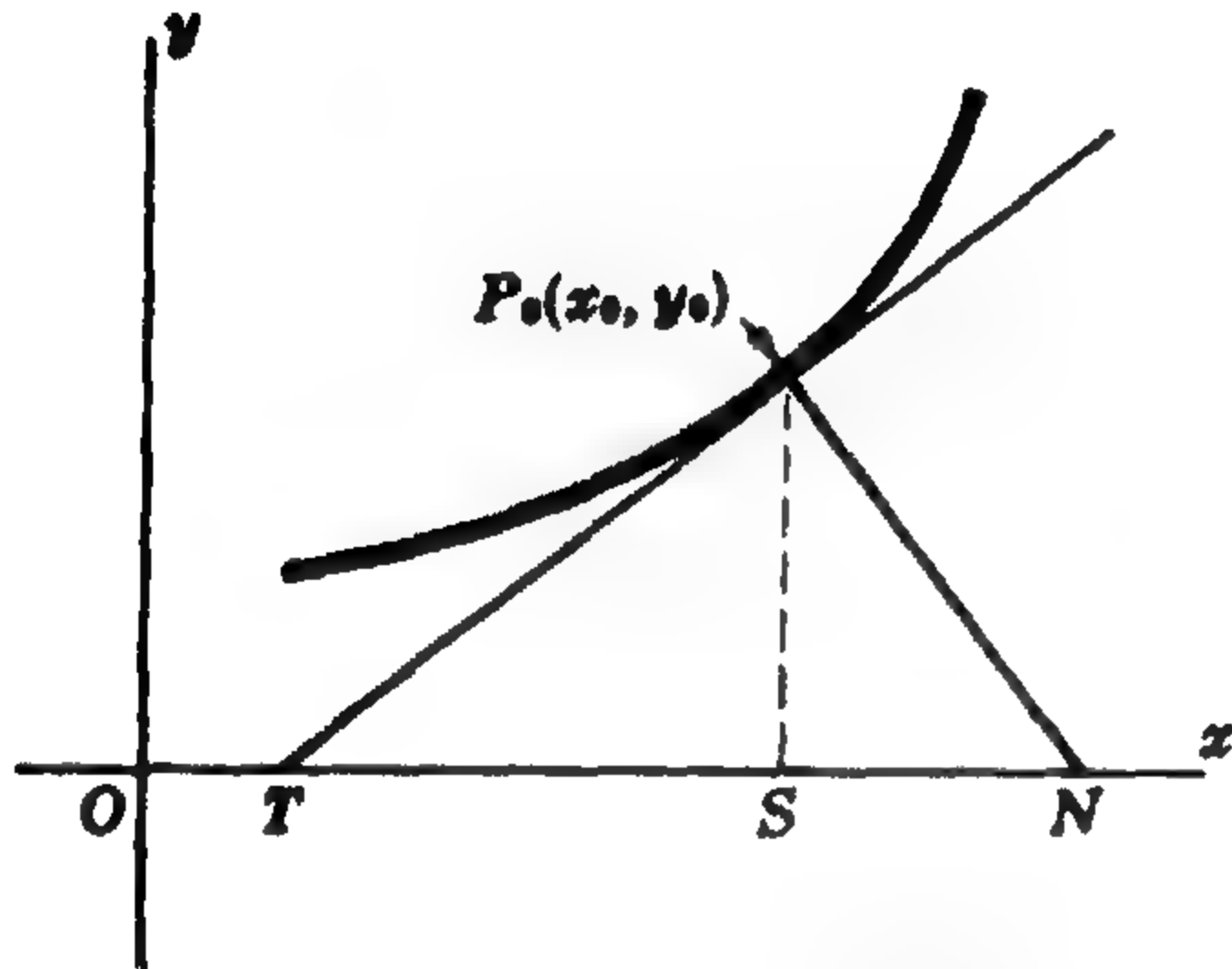
طول المماس والعمودي وتحت المماس وتحت العمودي : يعرف طول المماس لمنحنى عند إحدى نقاطه ،

على أنه طول جزء المماس بين نقطة التماس والمحور x ويسمى طول مسقط هذا الجزء من المماس على المحور x بطول تحت المماس .

ويعرف طول العمودي على أنه طول جزء العمودي بين نقطة

تماس المماس والمحور x . ويسمى طول مسقط هذا الجزء على

المحور x بطول تحت العمودي .



شكل ٧ - ٢

طول تحت المماس $y_0/m = TS$

طول تحت العمودي $my_0 = SN$

طول المماس $TP_0 = \sqrt{(TS)^2 + (SP_0)^2}$

طول العمود $P_0N = \sqrt{(SN)^2 + (SP_0)^2}$

ملاحظة : إن طول تحت المماس وتحت العمودي هي أطوال موجبة . إنما يفضل بعض المؤلفين الطولين غير

الموجبين $|y_0/m|$ و $|my_0|$ على التوالي . عندئذ ينبغي في هذه الحالة إهمال الإشارات في إجابة المسائل التالية .

أنظر المسألة ١٣

مسائل محلولة

١ - أوجد نقط التماس للمماسات الأفقية والعمودية للمنحنى $x^2 - xy + y^2 = 27$

بالاشتقاق نجد $y' = \frac{y-2x}{2y-x}$. للحصول على المماسات الأفقية نضع البسط في y' مساوية للصفر فنحصل على $y = 2x$ ونقط التماس هي نقط تقاطع المستقيم $y = 2x$ مع المنحنى المفروض . فإذا حللنا هاتين المعادلتين آنياً نحصل على النقطتين (3,6) و (-3, -6)

والحصول على المماسات العمودية نضع المقام في y' مساويا للصفر فنحصل على $x = 2y$. ونقط التماس هي نقط تقاطع المستقيم $x = 2y$ مع المنحنى المفروض . فإذا حللنا هاتين المعادلتين آنيا نحصل على النقطتين (6,3) و (-3, -6)

٢ - أوجد معادلتى المماس والمعدى للمنحنى $y = x^3 - 2x^2 + 4$ عند النقطة (2,4) .

إن $f'(x) = 3x^2 - 4x$ وميل المماس عند (2,4) هو $m = f'(2) = 4$

ومعادلة المماس هي $y - 4 = 4(x - 2)$ أو $y = 4x - 4$

ومعادلة المعدى هي $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ أو $x + 4y = 18$

٣ - أوجد معادلتى المماس والمعدى للمنحنى $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ عند النقطة (1,1) .

إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$ وميل المماس عند (1,1) هو $m = -1$

ومعادلة المماس هي $y - 1 = -1(x - 1)$ أو $x + y = 2$

ومعادلة المعدى هي $y - 1 = 1(x - 1)$ أو $x - y = 0$

٤ - أوجد معادلات المماس للقطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 40$ والتي ميلها $m = -2/9$.
نفرض أن $P_0(x_0, y_0)$ هي نقطة تماس المماس المطلوب عندئذ يكون .

$$(1) \quad 4x_0^2 + 9y_0^2 = 40 \quad \text{لأن } P_0 \text{ تقع على المنحنى}$$

$$(ب) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} \quad \text{وعند النقطة } (x_0, y_0) \text{ يكون } m = \frac{-4x_0}{9y_0} = -\frac{2}{9} \text{ ومنه } y_0 = 2x_0$$

(ج) نقط التماس هي الحلول الآتية (1,2) و (-1,-2) للمعادلتين (1) ، (ب) ، ومعادلة المماس عند (1,2) هي $y - 2 = -2/9(x - 1)$ أو $2x + 9y = 20$ ومعادلة المماس عند (-1,-2) هي $y + 2 = -2/9(x + 1)$ أو $2x + 9y = -20$.

٥ - أوجد معادلة المماس للقطع الزائد $x^2 - y^2 = 16$ والمار بالنقطة (2,-2) .
نفرض أن $P_0(x_0, y_0)$ هي نقطة التماس للمماس المطلوب . عندئذ :

$$(1) \quad x_0^2 - y_0^2 = 16 \quad \text{لأن النقطة } P_0 \text{ تقع على القطع الزائد}$$

$$(ب) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{وعند النقطة } (x_0, y_0) \text{ يكون } m = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0 + 2}{x_0 - 2} = \text{ميل المستقيم الذى يصل } P_0$$

ب (2,-2) وعندئذ يكون

$$x_0 + y_0 = 8 \text{ أو } 2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16$$

(ج) نقطة التماس هي الحل الآتي (5,3) للمعادلتين (1) ، (ب) وعلى ذلك تكون معادلة المماس هي

$$5x - 3y = 16 \text{ أو } y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$$

٦ - أوجد معادلات المستقيمت الرأسية التى تلاقى كلا منها المنحنيين

(1) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ (2) $y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$ عند نقطتين يكون المماسان المنحنيين عندهما متوازيين
نفرض أن $x = x_0$ أحد هذه المستقيمت الرأسية .

للمنحنى (١) يكون $y' = 3x^2 + 4x - 4$; وعند $x = x_0$ يكون $m = 3x_0^2 + 4x_0 - 4$.

والمنحنى (٢) يكون $3y' = 6x^2 + 18x - 3$; وعند $x = x_0$ يكون $m = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$.

وبما أنه ينبغي أن يكون $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$ فإن $x_0 = 3, x_0 = -1$ والمستقيمان هما $x = 3, x = -1$.

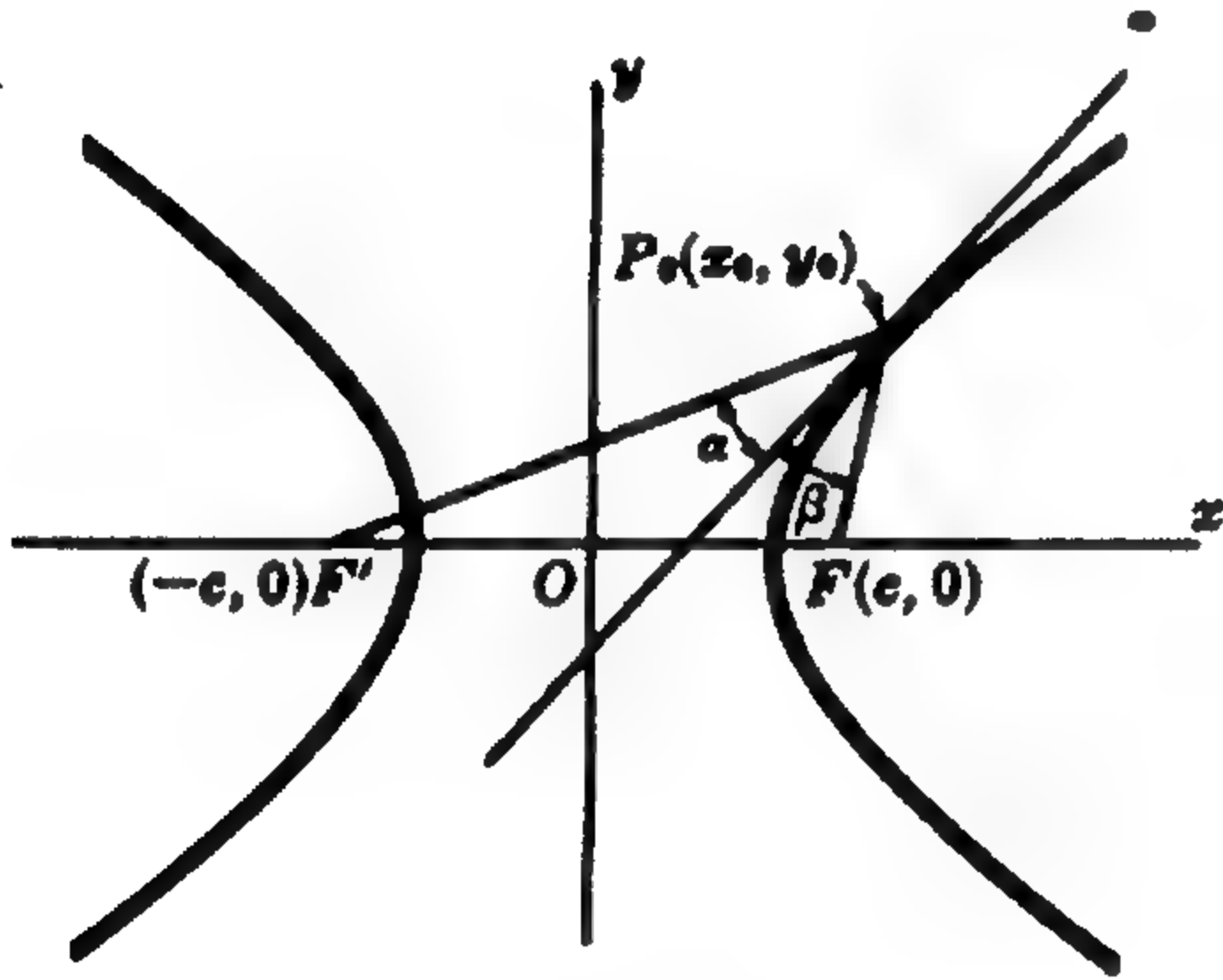
٧- (١) بين أن معادلة المماس الذى ميله $m \neq 0$ لقطع المكافئ $y^2 = 4px$ هي $y = mx + p/m$

(ب) بين أن معادلة المماس للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عند نقطة عليه $P_0(x_0, y_0)$ هي $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

(١) $y' = 2p/y$ نفرض أن $P_0(x_0, y_0)$ هي نقطة التماس ، إذن $y_0^2 = 4px_0$ و $m = 2p/y_0$ وكذلك $y = mx + p/m$ وتكون معادلة المماس هي $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$ و $x_0 = 1/4 y_0^2/p = p/m^2$ و $y_0 = 2p/m$

(ب) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$ ويكون عند النقطة P_0 : $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ وبالتالي فإن معادلة المماس هي

$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2. \quad \text{أو} \quad y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$



شكل ٧ - ٢

٨ - بين أن المماس عند النقطة $P_0(x_0, y_0)$ للقطع الزائد $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ينصف الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين البؤريين للنقطة P_0 .

إن ميل المماس عند النقطة P_0 للقطع الزائد يساوى b^2x_0/a^2y_0 وميل نصفي القطرين البؤريين P_0F و P_0F' هما $y_0/(x_0 + c)$ و $y_0/(x_0 - c)$ وبالتالى فإن

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\frac{b^2x_0}{a^2y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 + c}} \\ &= \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2 + b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} \\ &= \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{cy_0(a^2 + cx_0)} = \frac{b^2}{cy_0} \end{aligned}$$

وحيث أن $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ و $a^2 + b^2 = c^2$

$$\tan \beta = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2 + b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

وحيث أن $\tan \alpha = \tan \beta$ يكون $\alpha = \beta$.

٩ - برهن أن الوتر الذى يصل نقطتي تماس المماسين للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ المارين بأى نقطة على دليل القطع يمر بالبؤرة المرافقة لهذا الدليل.

لتكن $P_0(x_0, y_0)$ أية نقطة يمكن منها رسم مماسين للقطع الناقص ولتكن $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتي

التماس الموافقتين . إن معادلتى المماسين عند P_2, P_1 هما $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ و $b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$.
 وحيث أنهما يمران بـ P_0 فإن $b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2$ و $b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2$.
 ويكون المستقيم $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ الذى يمر بالنقطتين P_2, P_1 هو وتر التماس . لنفرض أن $P(a^2/c, \bar{y})$ هي نقطة على الدليل الأيمن . عندئذ تكون معادلة وتر التماس المار بـ P هي $(b^2a^2/c)x + a^2\bar{y}y = a^2b^2$ ويمكن التحقق بسهولة من أن هذا الوتر يمر بالبؤرة $F(c, 0)$ المرافقة للدليل المذكور .

١٠- أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنين $y^2 = 4x$ (١) و $2x^2 = 12 - 5y$ (٢) .

(١) إن نقطتى تقاطع المنحنين هما $P_1(1, 2)$ و $P_2(4, -4)$

(ب) المنحنى (١) تكون $y' = 2/y$ والمنحنى (٢) تكون $y' = -4x/5$

وبذلك يكون عند النقطة $P_1(1, 2)$ ، $m_2 = -4/5$ وعند النقطة $P_2(4, -4)$ $m_1 = -1/2$ و $m_2 = -16/5$

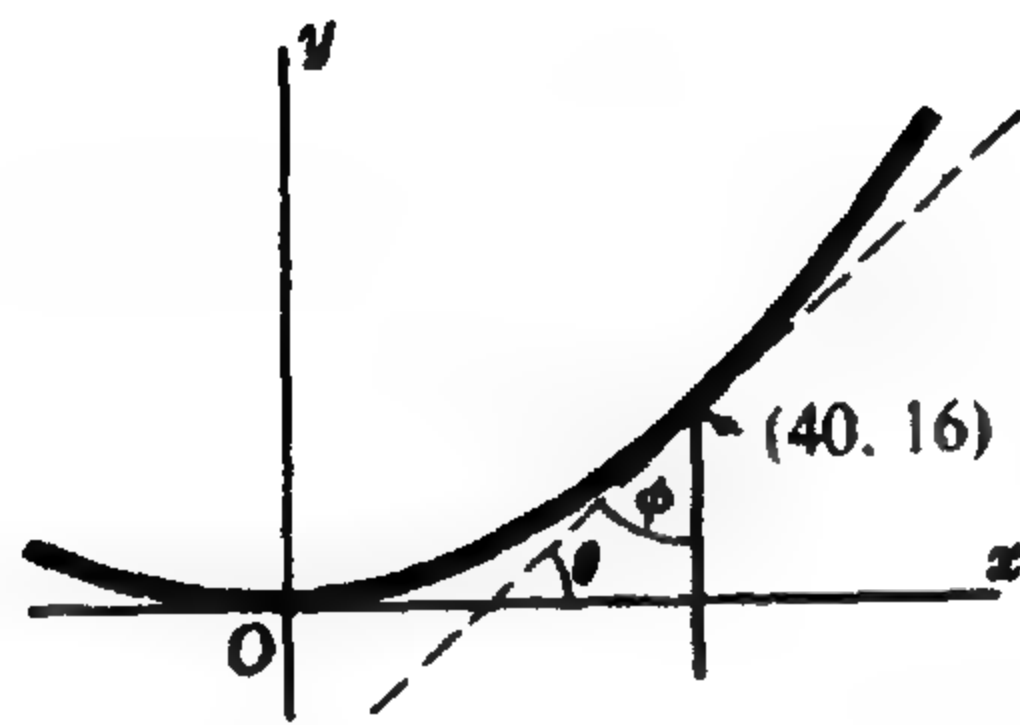
(ج) وعند النقطة P_1 نجد أن $\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$ و $\phi = 83^\circ 40'$ هي زاوية التقاطع الحادة
 وعند النقطة P_2 نجد $\tan \phi = \frac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5} = 1.0385$ و $\phi = 46^\circ 5'$ هي زاوية التقاطع الحادة .

١١- أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنين $2x^2 + y^2 = 20$ (١) و $4y^2 - x^2 = 8$ (٢)
 إن نقطى التقاطع هي $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$ و $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$.

والمنحنى (١) تكون $y' = -2x/y$ والمنحنى (٢) تكون $y' = x/4y$ وعند النقطة $(2\sqrt{2}, 2)$ نجد أن $m_2 = 1/4\sqrt{2}$ و $m_1 = -2\sqrt{2}$.

وحيث أن $m_1 m_2 = -1$ فإن زاوية التقاطع $\phi = 90^\circ$ (أى أن المنحنين متعامدان) ونجد ، بالمثل ، أن المنحنين متعامدان عند كل نقطة من نقطى تقاطعهما .

١٢- يربط حبل بحجر معلق عند طرفيه بدعامتين البعد بينهما 80 m فإذا علق على شكل قطع مكافئ تقع أقل نقطة فيه على بعد 16 m من نقطتى التعلق فأوجد الزاوية بين الحبل والدعامتين .



لنأخذ نقطة الأصل عند رأس القطع المكافئ . كما فى الشكل ٧ - ٤
 إن معادلة القطع المكافئ هي $y = \frac{16}{1600} x^2$ ومنه $y' = \frac{x}{50}$
 وعند النقطة $(40, 16)$ يكون $m = \frac{40}{50} = 0.8000$ وبالتالي $\theta = 38^\circ 40'$
 والزاوية المطلوبة هي $\phi = 90^\circ - \theta = 51^\circ 20'$.

شكل ٧ - ٤

١٣- أوجد طول كل من تحت المماس وتحت العمودى والمماس والعمودى للمنحنى $xy + 2x - y = 5$ عند النقطة $(2, 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{1-x} \quad \text{وعند النقطة } (2, 1) \text{ يكون } m = -3 .$$

وطول تحت المماس $y_0/m = -1/3$ وطول تحت العمودى $my_0 = -3$.

وطول المماس $\sqrt{10}/3 = \sqrt{1/9+1}$ وطول العمودى $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$.

مسائل اضافية

- ١٤ - ابحث في المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$.
- ج : مماسان أفقيان عند $(3, -3/2)$ و $(-3, 3/2)$ و مماسان رأسيان عند $(6, -3/4)$ و $(-6, 3/4)$
- ١٥ - أوجد معادلتى المماس والعمود للمنحنى $x^2 - y^2 = 7$ عند النقطة $(4, -3)$
- ج : $4x + 3y = 7; 3x - 4y = 24$
- ١٦ - عين النقاط التى يكون عندها المماس للمنحنى $y = x^2 + 5$ (أ) موازيا للمستقيم $12x - y = 17$ عموديا على المستقيم $x + 3y = 2$ ج : (أ) $(2, 13), (-2, -3)$; (ب) $(1, 6), (-1, 4)$
- ١٧ - أوجد معادلات المماسات للمنحنى $9x^2 + 16y^2 = 52$ الموازية للمستقيم $9x - 8y = 1$ ج $9x - 8y = \pm 26$
- ١٨ - أوجد معادلات المماسات للقطع الزائد $xy = 1$ المارة بالنقطة $(-1, 1)$.
- ج : $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2; y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$
- ١٩ - بين أن معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4px$ عند إحدى نقاطه $P(x_0, y_0)$ هى $yy_0 = 2p(x + x_0)$.
- ٢٠ - بين أن معادلتى المماسين للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ والذين ميلهما m هما $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.
- ٢١ - بين أنه للقطع الزائد $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ تكون (أ) معادلة المماس عند إحدى نقاطه $P(x_0, y_0)$ هى $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ و (ب) معادلتا المماسين اللذين ميلهما m هما $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.
- ٢٢ - بين أن العمودى على القطع المكافئ عند إحدى نقاطه P_0 ينصف الزاوية المحصورة بين نصف القطر البؤرى للنقطة P_0 والمستقيم الموازى لمحور القطع والمار بـ P_0 .
- ٢٣ - برهن أن أى مماس للقطع المكافئ ، باستثناء المماس عند الرأس يقطع الدليل والوتر البؤرى العمودى عند نقطتين متساويتى البعد عن البؤرة .
- ٢٤ - برهن أن الوتر الذى يصل نقط تماس مماسات قطع مكافئ بنقطة على دليله يمر بالبؤرة .
- ٢٥ - برهن أن العمودى على القطع الناقص عند أى نقطة P_0 منه ينصف الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين البؤريين لـ P_0 .
- ٢٦ - برهن أن الوتر الذى يصل نقط تماس مماسات قطع زائد بنقطة على دليله يمر بالبؤرة المرافقة .
- ٢٧ - برهن أن نقطة تماس القطع الزائد تنصف جزء المماس المحصور بين الخطين المقاربين للقطع .
- ٢٨ - برهن أن ميل المماس عند أى طرف من طرفى الوتر البؤرى العمودى سواء للقطع الناقص أو للقطع الزائد ، يساوى عدديا الاختلاف المركزى للقطع .
- ٢٩ - برهن أن (أ) مجموع ما يقطعه المماس للمنحنى $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ مع محورى الاحداثيات ثابت . (ب) مجموع مربعى ما يقطعه المماس للمنحنى $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ مع محورى الاحداثيات ثابت .

٣٠- أوجد زاوية التقاطع الحادة للدائرتين $x^2 - 4x + y^2 = 0$ و $x^2 + y^2 = 8$. ج : 45°

٣١- بين أن المنحنيين $y = 2x^2 + 2$ و $y = x^2 + 2$ مماسا مشتركا عند النقطة $(0, 2)$ وأنهما يتقاطعان عند $(2, 10)$ بزاوية $\phi = \text{Arc tan } 4/97$

٣٢- بين أن القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 45$ والقطع الزائد $x^2 - 4y^2 = 5$ متعامدان .

٣٣- أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = 4x^2$ عند النقطة $(-1, 4)$ ثم احسب أطوال تحت المماس وتحت العمودى والمماس العمودى . ج : $-\frac{1}{2}, -32, \frac{1}{2}\sqrt{65}, 4\sqrt{65}$; $8y - x - 33 = 0$; $y + 8x + 4 = 0$

٣٤- أوجد أطوال تحت المماس وتحت العمودى ، والمماس والعمودى ، للقطع الزائد $3x^2 - 2y^2 = 10$ عند النقطة $(-2, 1)$

ج : $-1/8, -3, \sqrt{10}/3, \sqrt{10}$

٣٥- عند أى نقطة على المنحنى $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ يمر المماس عندها بنقطة الأصل ؟

ج : $x = -3, -1, 3/4$

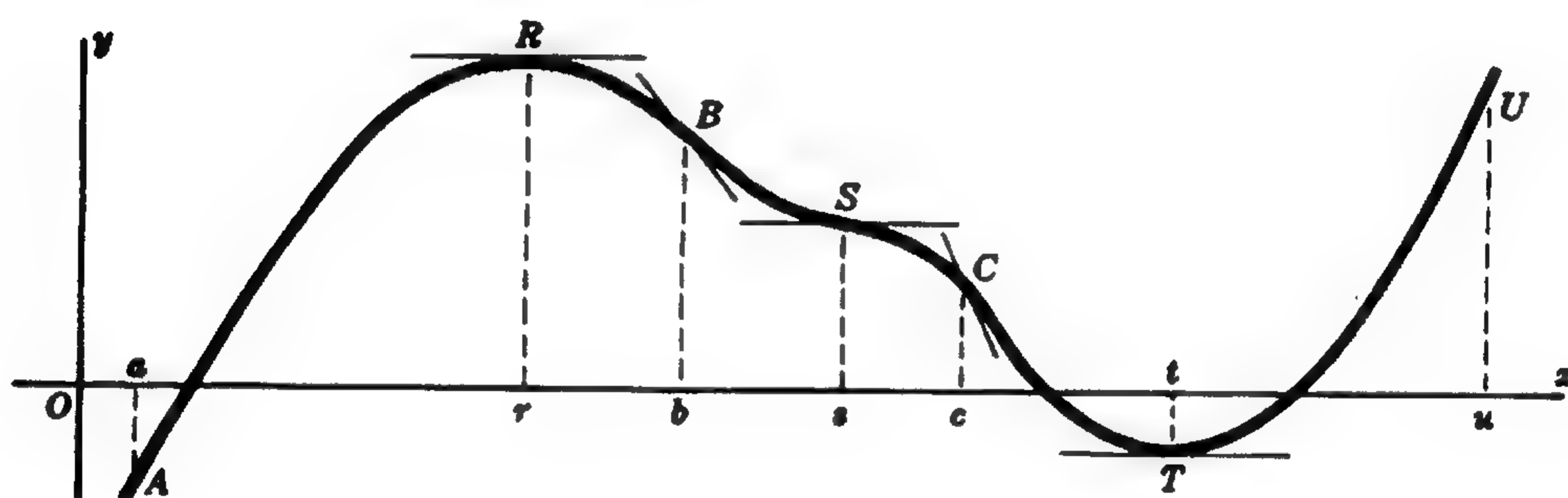
الفصل الثامن

القيم العظمى والصغرى

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة : نقول عن دالة $f(x)$ إنها متزايدة عند $x = x_0$. إذا كان عند h الموجبة والصغيرة بقدر كاف ، $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. ونقول عن دالة $f(x)$ إنها متناقصة عند $x = x_0$ إذا كان عند h ، الموجبة والصغيرة بقدر كاف $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

إذا كان $f'(x_0) > 0$ فإن $f(x)$ دالة متزايدة عند $x = x_0$ وإذا كان $f'(x_0) < 0$ فمئذ تكون $f(x)$ دالة متناقصة عند $x = x_0$ (لبرهان انظر المسألة ١٧) . أما إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإننا نقول إن $f(x)$ مستقرة عند $x = x_0$.

ونقول عن دالة غير ثابتة إنها متزايدة (متناقصة) في فترة ما إذا كانت متزايدة (متناقصة) أو مستقرة في كل نقطة من نقط الفترة .



شكل ٨ - ١

في الشكل ٨ - ١ المنحنى $y = f(x)$ صاعد (الدالة متزايدة) في الفترتين $a < x < r$ و $t < x < u$. والمنحنى هابط (الدالة متناقصة) في الفترة $r < x < t$. والدالة مستقرة عند $x = r$ و $x = s$ و $x = t$. والمنحنى مماسات أفقية عند النقط R, S, T وكثيرا ما نسمى قيم x (r, s, t) التي تكون عندها الدالة $f(x)$ مستقرة ($f'(x) = 0$) بالقيم الحرجة للدالة ونسمى النقط المقابلة (R, S, T) على المنحنى بالنقط الحرجة للمنحنى .

القيم العظمى والصغرى النسبية لدالة : نقول عن دالة $y = f(x)$ إن لها قيمة عظمى نسبية (صغرى نسبية) عند $x = x_0$ إذا كانت $f(x_0)$ أكبر (أصغر) من قيم الدالة السابقة واللاحقة مباشرة . انظر المسألة ١ .

النقطة $R[r, f(r)]$ في الشكل ٨ - ١ هي نقطة قيمة عظمى نسبية للمنحنى لأن $f(r) > f(x)$ عند أي نقطة مجاورة صغرى بقدر كاف $0 < |x - r| < \delta$. وسنعتبر أن الدالة $y = f(x)$ قيمة عظمى نسبية (تساوى $f(r)$) عندما $x = r$. وإن النقطة $T[t, f(t)]$ على نفس الشكل هي نقطة قيمة صغرى نسبية لأن $f(t) < f(x)$ عند نقطة مجاورة

صغير بقدر كاف $0 < |x - t| < \delta$. وسنعتبر أن الدالة $y = f(x)$ قيمة صغرى نسبية (تساوى $f(t)$) عندما $x = t$. يلاحظ أن R تربط قوسا صاعدا AR ($f'(x) > 0$) بقوس هابط RB ($f'(x) < 0$) في حين تربط T قوسا هابطا CT ($f'(x) < 0$) بقوس صاعد TU ($f'(x) > 0$) أما عند S فإنه يرتبط كل من القوسين الهابطين BS و SC والنقطة S ليست نقطة عظمى نسبية كما أنها ليست نقطة صغرى نسبية.

إذا كانت $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على $a \leq x \leq b$ وكان $f(x)$ قيمة عظمى (صغرى) نسبية عند $x = x_0$ حيث $a < x_0 < b$ فنحن نذكر $f'(x_0) = 0$ والبرهان المسألة ١٨.

لإيجاد القيم العظمى (الصغرى) النسبية [سنطلق عليها من الآن قima عظمى (صغرى)] لدالة $f(x)$ هي ومشتقتها الأولى مستمران :

اختبار المشتقة الأولى :

- ١ - حل المعادلة $f'(x) = 0$ للحصول على القيم الحرجة .
 - ٢ - حدد مواضع القيم الحرجة على محور عددي مكونا بذلك عددا من الفترات .
 - ٣ - حدد إشارة $f'(x)$ على كل فترة .
 - ٤ - اجعل x تتزايد مارة بكل قيمة حرجة $x = x_0$ عندئذ يكون $f(x)$ قيمة عظمى نسبية (تساوى $f(x_0)$) إذا تغيرت $f'(x)$ من $+$ إلى $-$ يكون $f(x)$ قيمة صغرى نسبية (تساوى $f(x_0)$) إذا تغيرت $f'(x)$ من $-$ إلى $+$ لا يكون $f(x)$ قيمة عظمى وصغرى عند $x = x_0$ إذا لم تغير $f'(x)$ إشارتها .
- انظر المسائل ٢ - ٥

يمكن لدالة $y = f(x)$ بالضرورة أقل بساطة من دوال التمارين ٢ - ٥، أن يكون لها قيمة عظمى أو صغرى [تساوى $f(x_0)$] مع أن $f'(x_0)$ ليست موجودة . نسي أيضا القيم $x = x_0$ التي يكون عندها الدالة $f(x)$ معرفة ولكن مشتقتها $f'(x)$ غير موجودة بالقيم الحرجة للدالة . وينبغي أن نستعمل هذه القيم مع القيم التي عندها $f'(x) = 0$ لتحديد الفترات المذكورة في الخطوة ٢ السابقة الذكر .

انظر المسائل ٦ - ٨

وهناك حالة أخيرة يكون فيها $f(x_0)$ قيمة عظمى (صغرى) مع أنه لا توجد فترة $x_0 - \delta < x < x_0$ تكون $f'(x)$ موجبة (سالبة) ولا توجد فترة $x_0 < x < x_0 + \delta$ تكون $f'(x)$ عليها سالبة (موجبة) . ولكننا سوف لا ندرس هذه الحالة هنا .

اتجاه الانحناء : نقول عن قوس من منحنى $y = f(x)$ إنه مقعر عند كل نقطة من نقطة إذا وقع القوس فوق مماسة عند تلك النقطة ، عندما تتزايد x فإما أن تبقى $f'(x)$ محافظة على إشارتها وتكون متزايدة (كما هي الحال على الفترة $c < x < b$ في الشكل ٨ - ١) أو أنها تغير إشارتها من السالبة إلى الموجبة (كما هي الحال على الفترة $a < x < c$) وفي كلا الحالتين يكون الميل $f'(x)$ متزايدا وتكون $f''(x) > 0$.

ونقول عن قوس منحنى $y = f(x)$ إنه مقعر لأسفل إذا وقع القوس ، عند كل نقطة من نقطة تحت مماسة عند تلك النقطة وهنا عندما تتزايد x إما أن تبقى $f'(x)$ محافظة على إشارتها ومتناقصة (كما هي الحال على الفترة $a < x < c$) أو أنها تغير إشارتها من الموجبة إلى السالبة (كما هي الحال على الفترة $c < x < b$) . وفي كلا الحالتين يكون الميل $f'(x)$ متناقصا وتكون $f''(x) < 0$.

نقطة الانعطاف : هي نقطة يتغير المنحنى عندها من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو بالعكس .

في الشكل ٨ - ١ نقط الانعطاف هي B, S, C .

ويكون للمنحنى $y = f(x)$ نقطة من نقطة $x = x_0$ كنقطة انعطاف له

إذا كانت $f''(x_0) = 0$ أو أنها غير معرفة .

إذا غيرت $f''(x)$ إشارتها عندما تزايد x عبر x_0 .

ويمكن أن نستبدل بالشرط الأخير الشرط $f'''(x_0) \neq 0$ عندما توجد $f'''(x_0)$.

انظر المسائل ٩ - ١٣

الاختبار الثاني للقيم العظمى والصغرى • اختبار المشتقة الثانية :

١ - حل المعادلة $f'(x) = 0$ لإيجاد القيم الحرجة :

٢ - عند القيمة الحرجة $x = x_0$ يكون :

لـ $f(x)$ قيمة عظمى (تساوى $f(x_0)$) إذا كانت $f''(x_0) < 0$

لـ $f(x)$ قيمة صغرى (تساوى $f(x_0)$) إذا كانت $f''(x_0) > 0$

وفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_0) = 0$ أو غير محددة .

وينبغي في الحالة الأخيرة استعمال طريقة المشتقة الأولى .

انظر المسائل ١٤ - ١٦

مسائل محلولة

١ - (١) الدالة $y = -x^2$ قيمة عظمى نسبية (تساوى صفر) عند $x = 0$ لأن $y = 0$ عندما $x = 0$ و $y < 0$

عندما $x \neq 0$.

(ب) الدالة $y = (x - 3)^2$ قيمة صغرى نسبية (تساوى صفر) عند $x = 3$ لأن $y = 0$ عندما $x = 3$ و $y > 0$

عندما $x \neq 3$.

(ج) الدالة $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ قيمة عظمى نسبية (تساوى ٥) عند $x = 0$ لأن $y = 5$ عندما $x = 0$ و $y < 5$

عندما $-1 < x < 1$.

(د) ليس الدالة $y = \sqrt{x - 4}$ قيمة عظمى أو صغرى نسبية [يعرف بعض المؤلفين القيم العظمى (الصغرى)

النسبية بحيث يكون لهذه الدالة قيمة صغرى نسبية عند $x = 4$. انظر المسألة ٣٠]

٢ - بفرض $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 6x + 8$ أوجد :

(١) النقط الحرجة

(ب) الفترات التي تزايد أو تتناقص فيها y

(ج) القيم العظمى والصغرى لـ y

$$(١) \quad y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

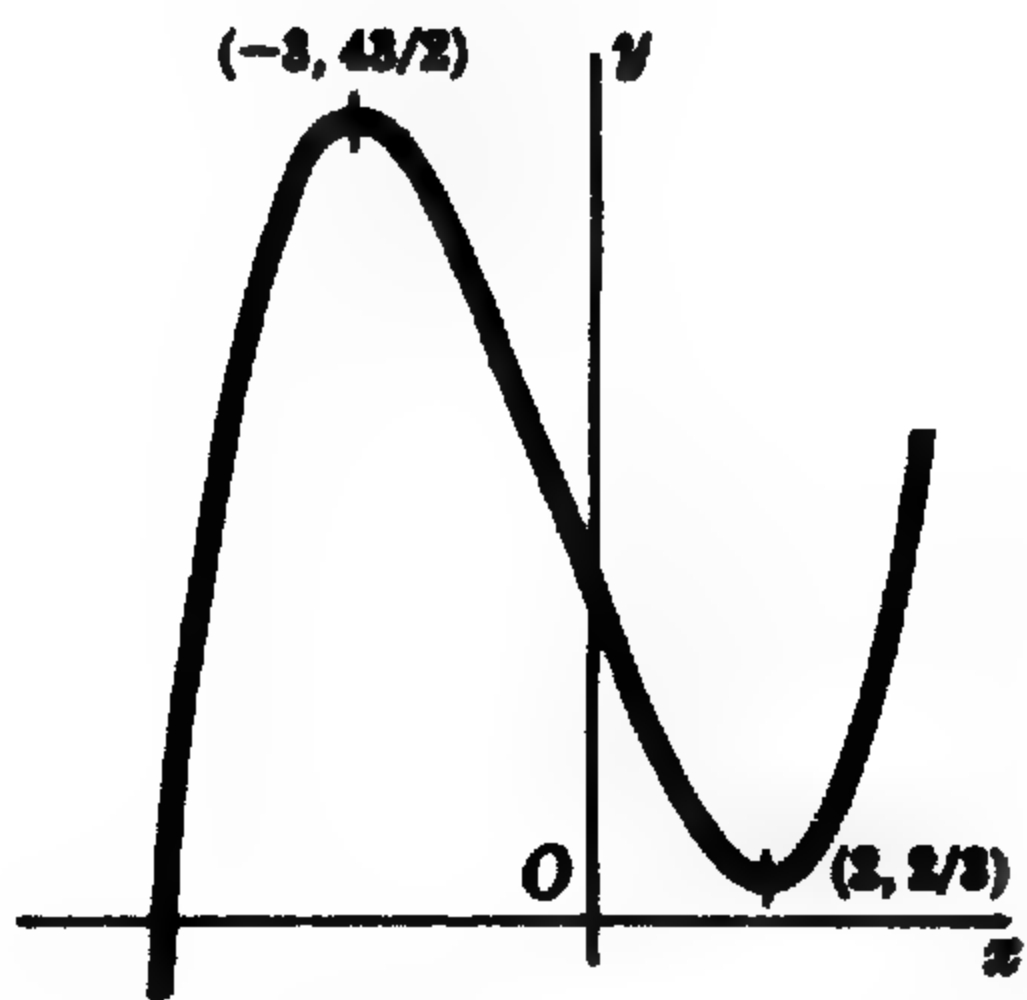
بوضع $y' = 0$ نجد أن القيم الحرجة هي $x = -3, 2$

النقطتان الحرجتان هما $(2, 2/3)$ و $(-3, 43/2)$.

(ب) عندما تكون y' موجبة تزايد y وعندما تكون y' سالبة تتناقص y .

عندما $x < -3$ مثلاً إذا أخذنا $x = -4$ فإن $y' = (-)(-) = +$

والدالة y متزايدة .



شكل ٨ - ٢

وعندما $-3 < x < 2$ مثلا إذا أخذنا $x = 0$ فإن $y' = (-)(+) = -$ والدالة y متناقصة .

وعندما $x > 2$ مثلا إذا أخذنا $x = 3$ فإن $y' = (+)(+) = +$ والدالة y متزايدة .

ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالى

عظمى		صغرى		
$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y' = +$ y متزايدة		$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة

(ج) لنختبر القيمتين الحرجتين $x = -3, 2$ بحثا عن القيم العظمى والصغرى .

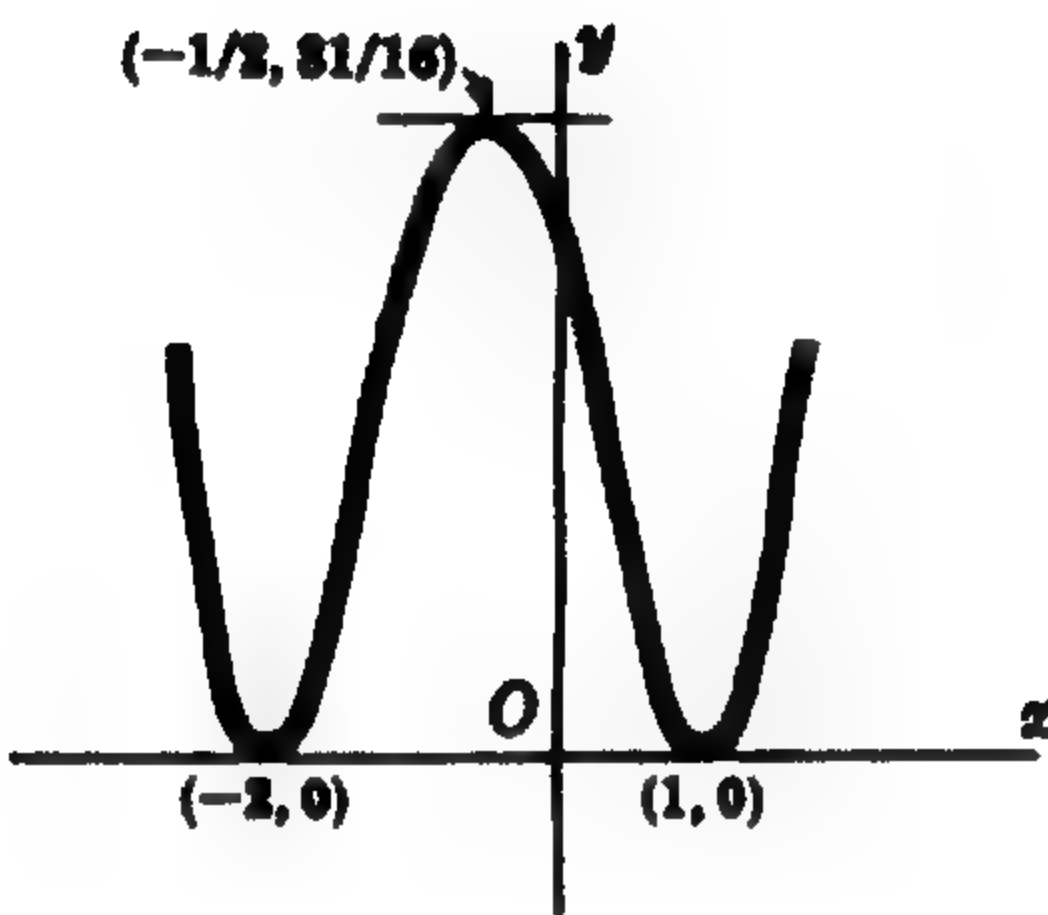
عندما تزايد x مرة بـ -3 فإن y' تغير إشارتها من $+$ إلى $-$ وبالتالي فهناك قيمة عظمى $43/2$ عند $x = -3$.

وعندما تزايد x مرة بـ 2 فإن y' تغير إشارتها من $-$ إلى $+$ وبالتالي فهناك قيمة صغرى $2/3$ عند $x = 2$.

٣ - بفرض $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ أوجد

(أ) الفترات التى تزايد أو تتناقص فيها y .

(ب) القيم العظمى والصغرى لـ y



$$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x+2)(2x+1)(x-1)$$

بوضع $y' = 0$ نجد أن القيم الحرجة هي $x = -2, -1/2, 1$.

(أ) عندما $x < -2$ فإن $y' = 2(-)(-)(-) = -$ ، وتكون y متناقصة .

عندما $-2 < x < -1/2$ فإن $y' = 2(+)(-)(-) = +$ ، وتكون y متزايدة .

عندما $-1/2 < x < 1$ فإن $y' = 2(+)(+)(-) = -$ ، وتكون y متناقصة .

عندما $x > 1$ فإن $y' = 2(+)(+)(+) = +$ ، وتكون y متزايدة .

ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالى

شكل ٨ - ٣

قيمة صغرى		قيمة عظمى		قيمة صغرى		
$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة		$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة

(ب) لنختبر القيم الحرجة $x = -2, -1/2, 1$ بحثا عن القيم العظمى والصغرى .

عندما تزايد x مرة بـ -2 فإن y' تغير إشارتها من $-$ إلى $+$ وبالتالي فإن لـ y قيمة صغرى 0 عند $x = -2$.

عندما تزايد x مرة بـ $-1/2$ فإن y' تغير إشارتها من $+$ إلى $-$ وبالتالي فإن لـ y قيمة عظمى $81/16$ عند

$x = -1/2$.

عندما تزايد x مرة بـ 1 فإن y' تغير إشارتها من $-$ إلى $+$ وبالتالي فإن لـ y قيمة صغرى 0 عند $x = 1$.

٤ - بين أنه ليس للمنحنى $y = x^3 - 8$ قيمة عظمى أو صغرى .

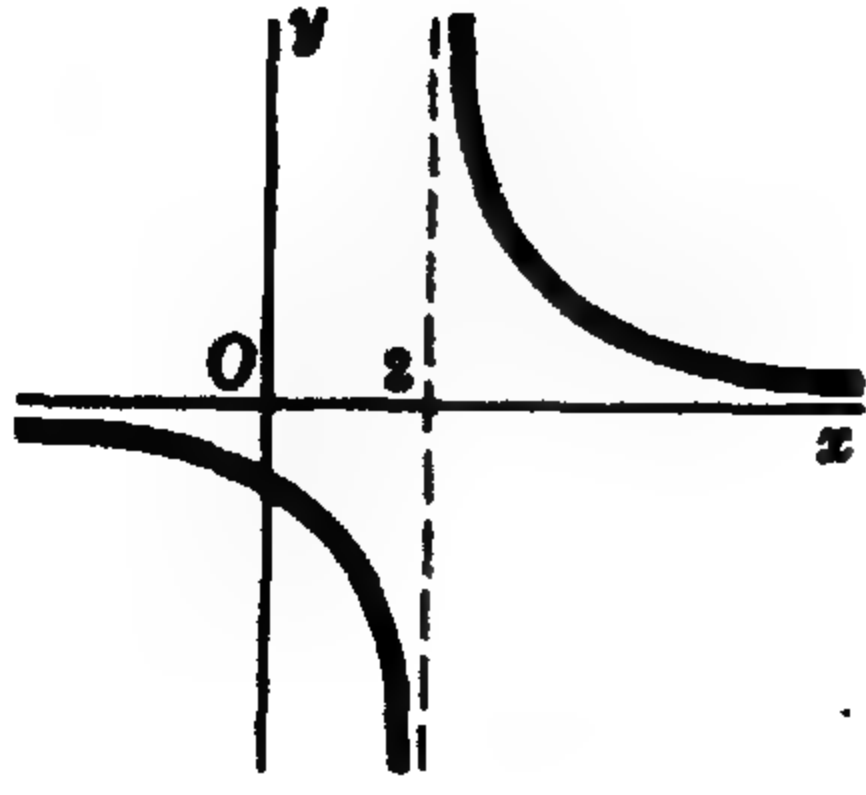
$y' = 3x^2$ وإذا وضعنا $y' = 0$ نجد القيمة الحرجة $x = 0$.

وسواء كان $x < 0$ أو $x > 0$ فإن $y' > 0$ وليس لـ y قيمة عظمى أو صغرى

ولكن للمنحنى عند $x = 0$ نقطة انعطاف .

٥ - اختر $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى ،

وحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ومتناقصة .



شكل ٨ - ٤

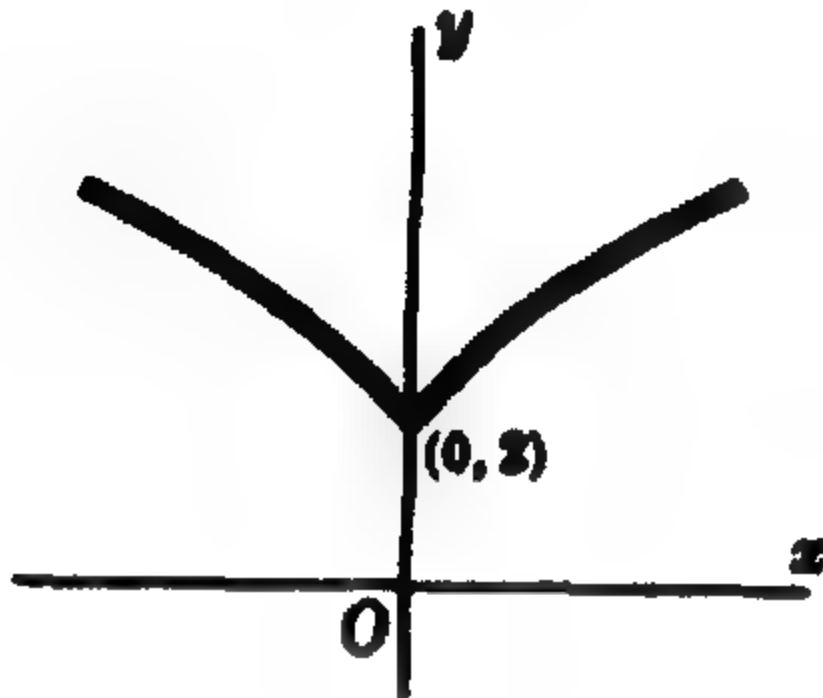
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

وحيث أن $f(2)$ غير معرفة . (أي أن $f(x)$ تصبح غير محددة عندما تقترب من 2) فإنه ليس هناك نقط حرجة ، ومع ذلك

نستخدم $x=2$ لتحديد فترات تزايد $f(x)$ وتناقصها .

$f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \neq 2$. وبالتالي فإن $f(x)$ تتناقص في الفترتين $x < 2$ و $x > 2$.

٦ - حدد القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 2 + x^{2/3}$ وحدد الفترات التي تتزايد أو تتناقص فيها .



شكل ٨ - ٥

$$f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

غير محددة عندما تقترب x من الصفر .

وعندما $x < 0$ تكون $f'(x) = -$ والدالة $f(x)$ متناقصة .

وعندما $x > 0$ تكون $f'(x) = +$ والدالة $f(x)$ متزايدة .

أما عند $x = 0$ فللدالة قيمة صغرى تساوي 2 .

٧ - اختر $y = x^{4/3}(1-x)^{1/3}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى .

$$y' = \frac{x^{1/3}(4-5x)}{3(1-x)^{2/3}}$$

هنا والقيم الحرجة هي $x = 0, 4/5, 1$

وعندما $x < 0$ تكون $y' < 0$ وعندما $0 < x < 4/5$ تكون $y' > 0$.

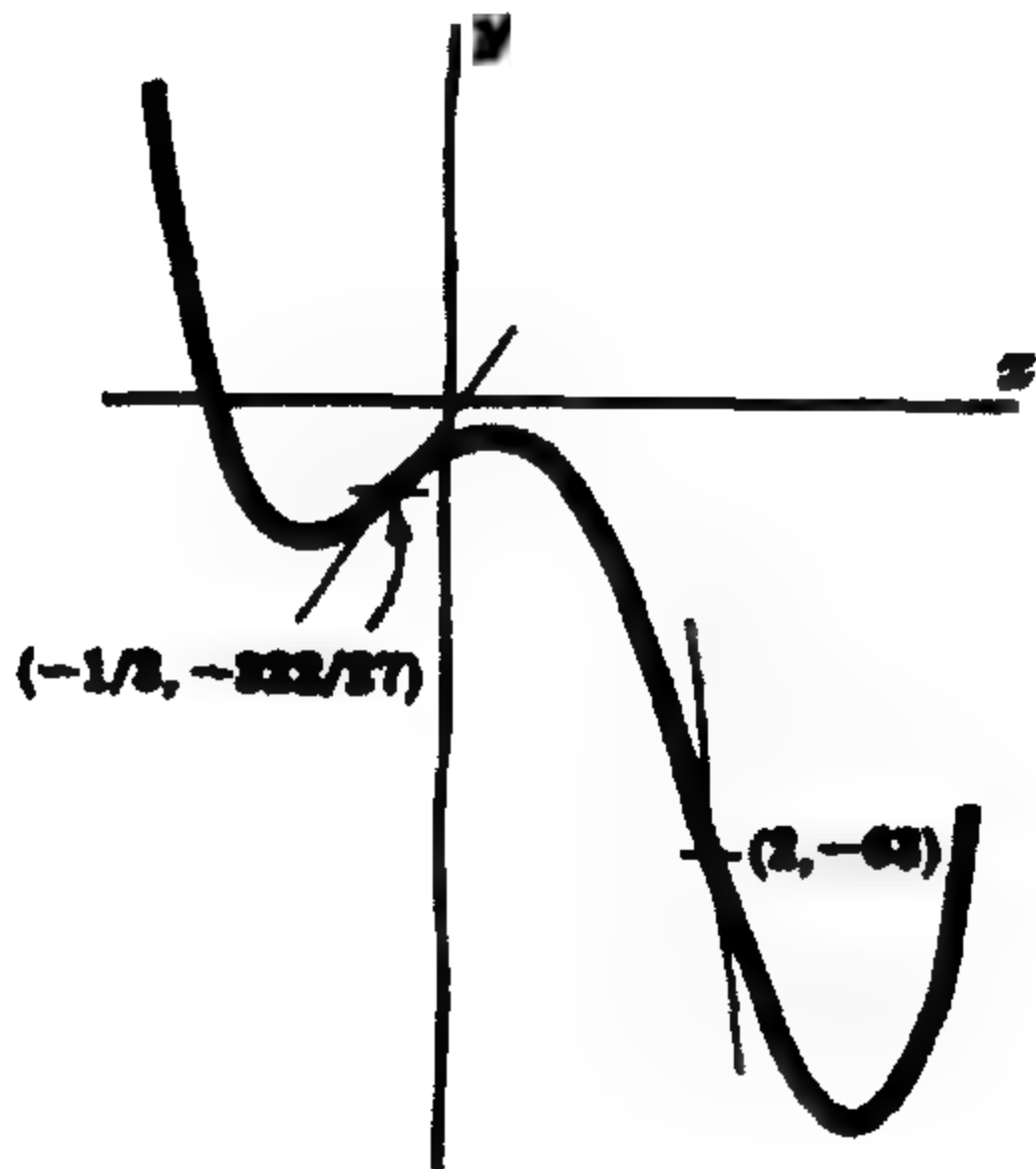
وعندما $4/5 < x < 1$ تكون $y' < 0$ وعندما $x > 1$ تكون $y' > 0$.

للدالة قيمة صغرى (تساوي صفر) عندما $x = 0$ وقيمة عظمى (تساوي $4/25^3 \sqrt{20}$) عندما $x = 4/5$.

٨ - اختر $y = |x|$ للحصول على القيم العظمى والصغرى

إن الدالة معرفة في كل مكان ولها مشتقة لجميع قيم x باستثناء $x = 0$ (انظر المسألة ١١ من الفصل الرابع) .

وهذا نجد أن $x = 0$ قيمة حرجة . وعندما تكون $x < 0$ نجد أن $f'(x) = -1$ بينما نجد $f'(x) = +1$ عندما $x > 0$ وللدالة قيمة صغرى (تساوي صفر) عندما $x = 0$. إن هذه النتيجة واضحة جدا من بيان الدالة .



شكل ٨ - ٦

٩ - اختر $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$ لمعرفة اتجاه الانحناء ولتعيين نقط الانعطاف

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$

$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x+1)(x-2)$$

ضع $y'' = 0$ وحل هذه المعادلة لتحصل على النقط التي يحتمل أن تكون نقط انعطاف وهي $x = -1/3, 2$.

وعندما $x < -1/3$ نجد $y'' = +$ والقوس مقعراً لأعلى .

وعندما $-1/3 < x < 2$ نجد $y'' = -$ والقوس مقعراً لأسفل .

وعندما $x > 2$ نجد $y'' = +$ والقوس مقعراً لأعلى .

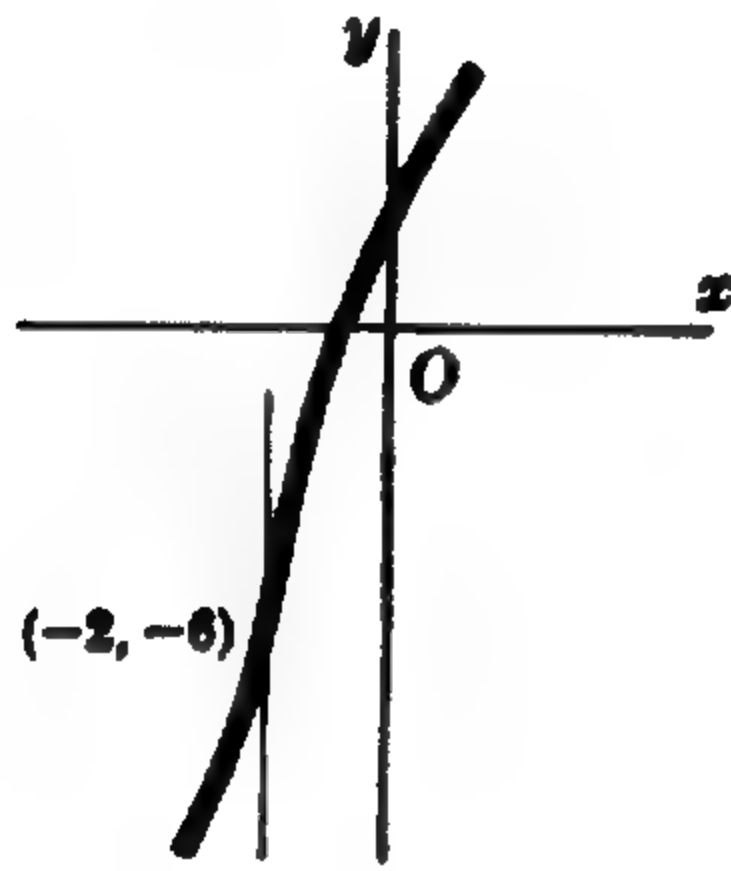
$x < -1/3$	$x = -1/3$	$-1/3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y'' = +$ التقعر لأعلى		$y'' = -$ التقعر لأسفل		$y'' = +$ التقعر لأعلى

نقط الانعطاف هي $(-1/3, 322/27)$ و $(2, -63)$ لأن y'' تغير إشارتها عند كل من $x = -1/3$ و $x = 2$.

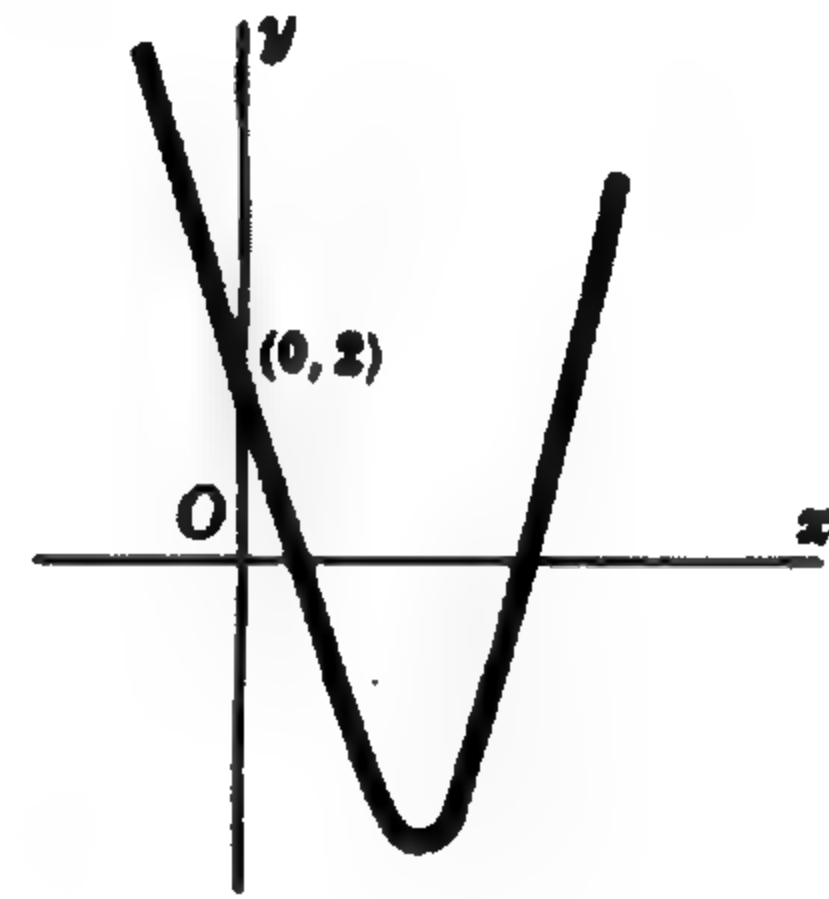
١٠ - اختبر $y = x^4 - 6x + 2$ لتحصل على اتجاه الانحناء ونقط الانعطاف . انظر الشكل ٨ - ٧ .

نجد $y'' = 12x^2$ ونقطة الانعطاف الممكنة هي عند $x = 0$.

وحيث أننا نجد $y'' = +$ على كل من الفترتين $x < 0$ و $x > 0$ فالقوسان مقعران لأعلى . والنقطة $(0, 2)$ ليست نقطة انعطاف .



شكل ٨ - ٨



شكل ٨ - ٧

١١ - اختبر $y = 3x + (x+2)^{3/5}$ لمعرفة اتجاه الانحناء ونقط الانعطاف . انظر الشكل ٨ - ٨ .

$$y' = 3 + \frac{3}{5(x+2)^{2/5}} \quad y'' = \frac{-6}{25(x+2)^{7/5}}$$

ونقطة الانعطاف الممكنة هي عند $x = -2$.

ولكن عندما $x > -2$ فإن $y'' = -$ والقوس مقعر لأسفل .

وعندما $x < -2$ فإن $y'' = +$ والقوس مقعر لأعلى والنقطة $(-2, -6)$ نقطة انعطاف .

١٢ - أوجد معادلات المماسات عند نقط الانعطاف للمنحنى

$$y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

توجد نقطة انعطاف عند $x = x_0$ عندما $f''(x_0) = 0$ و $f''(x_0) \neq 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

ونقطتنا الانعطاف الممكنتان هما عند $x = 1, 2$. وبما أن $f'''(1) \neq 0$, $f'''(2) \neq 0$

فالنقطتان $(1, -1)$ و $(2, 0)$ هما نقطتا انعطاف .

وبما أن الميل عند $(1, -1)$ هو $m = f'(1) = 2$ فمعادلة المماس تكون .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{أو} \quad y + 1 = 2(x - 1) \quad \text{أو} \quad y = 2x - 3$$

والميل عند $(2, 0)$ هو $f'(2) = 0$ ومعادلة المماس هي $y = 0$.

١٣ - بين أن نقط انعطاف $y = \frac{a-x}{x^3+a^3}$ تقع على خط مستقيم ثم أوجد معادلاته .

$$y' = \frac{x^3 - 2ax - a^3}{(x^3 + a^3)^2} \quad \text{و} \quad y'' = -2 \frac{x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3}{(x^3 + a^3)^3}$$

الآن $x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 0$ عندما $x = -a$ و $a(2 \pm \sqrt{3})$ ونقط الانعطاف هي :
 $(-a, 1/a), (a(2 + \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3})/4a), (a(2 - \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})/4a)$.
 إن ميل المستقيم الواصل بين أى نقطتين من هذه النقاط يساوى $-1/4a^2$ ومعادلة مستقيم نقط الانعطاف هو $x + 4a^2y = 3a$.

١٤ - اختبر $f(x) = x(12 - 2x)^2$ للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

(أ) $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$ والقيم الحرجة هي $x = 2, 6$.

(ب) $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$.

(ج) إن $f''(2) < 0$ وبالتالي فللدالة $f(x)$ قيمة عظمى 128 عند $x = 2$.

وإن $f''(6) > 0$ وبالتالي فللدالة $f(x)$ قيمة صغرى 0 عند $x = 6$.

١٥ - اختبر $y = x^3 + \frac{250}{x}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

(أ) $y' = 2x - \frac{250}{x^2} = \frac{2(x^3 - 125)}{x^2}$ والقيمة الحرجة هي $x = 5$.

(ب) $y'' = 2 + \frac{500}{x^3}$

(ج) إن $y'' > 0$ عند $x = 5$ والدالة y قيمة صغرى 75 عند $x = 5$.

١٦ - اختبر $y = (x - 2)^{2/3}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى .

(أ) $y' = \frac{2}{3}(x - 2)^{-1/3} = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$ والقيمة الحرجة هي $x = 2$.

(ب) $y'' = -\frac{2}{9}(x - 2)^{-4/3} = -\frac{2}{9(x - 2)^{4/3}}$

(ج) إن y' تصبح غير محددة عندما تقترب x من 2 إذن فالاختبار فاشل .

وباستخدام طريقة المشتقة الأولى . فإن $y' = -1$ عندما $x = 2$ و $y' = +$ عندما $x > 2$ وهذا نجد أن y قيمة صغرى نسبية 0 عند $x = 2$.

١٧ - أثبت أن الدالة $f(x)$ متزايدة عند $x = x_0$ إذا كان ، من أجل h الموجبة والصغيرة بقدر كاف .

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

إذا كان $f'(x_0) > 0$ فإن $f(x)$ متزايدة عند $x = x_0$.

لأنه إذا كان $f'(x_0) > 0$ فإن $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$ فإن $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$

من أجل قيم $|\Delta x|$ الصغيرة بقدر كاف وذلك استناداً إلى المسألة ٤ من الفصل الثالث .

وإذا كان $\Delta x < 0$ فإن $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ وبوضع $\Delta x = -h$ نجد :

$f(x_0 - h) < f(x_0)$ أما إذا كان $\Delta x > 0$ ولنضع $\Delta x = h$ مثلاً فإنه يكون $f(x_0 + h) > f(x_0)$

وبالتالى $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ كما هو مطلوب في التعريف . أنظر المسألة ٣٣ من أجل نظرية

مرافقة .

١٨ - أثبت أنه إذا كانت $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على $a \leq x \leq b$ وإذا كان $f(x)$ قيمة عظمى نسبية عند $x = x_0$

حيث $a < x_0 < b$ فإن $f'(x_0) = 0$.

بما أن $f(x)$ قيمة عظمى نسبة عند $x = x_0$ فإنه لجميع Δx بحيث $|\Delta x|$ صغير بقدر كاف ، يكون :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \quad \text{و} \quad f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$$

$$\text{والآن عندما } \Delta x < 0 \text{ فإن } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{فإن } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{كذلك عندما } \Delta x > 0 \text{ فإن } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \quad \text{و} \quad \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{فإن } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

وهكذا يكون $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ و $f'(x_0) = 0$ وهو المطلوب إثباته . أنظر المسألة ٢٤ من أجل نظرية مرافقة .

١٩ - أثبت اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى : إذا كان كل من $f(x)$ و $f'(x)$ قابلاً للاشتقاق على $a \leq x \leq b$ وكانت $x = x_0$ حيث $a < x_0 < b$ قيمة حرجية لـ $f(x)$ وكانت $f''(x_0) > 0$ فإن لـ $f(x)$ قيمة صغرى نسبية عند $x = x_0$.

بما أن $f''(x_0) > 0$ فإن $f'(x)$ متزايدة عند $x = x_0$ وبالتالي فإنه يوجد عدد $h > 0$ بحيث يكون $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. وهكذا إذا كانت x قريبة من x_0 ولكن أصغر منها فإن $f'(x) < f'(x_0)$. أما إذا كانت x قريبة من x_0 ولكن أكبر منها فإن $f'(x) > f'(x_0)$. والآن نستطيع القول إنه بما أن $f'(x_0) = 0$ و $f'(x) < 0$ عندما $x < x_0$ و $f'(x) > 0$ عندما $x > x_0$ فإن الشروط (أنظر المسألة ١٨) التي تضمن وجود قيمة صغرى لـ $f(x)$ عند $x = x_0$ محققة . نترك للقارىء أن يبرهن النظرية المرافقة في حالة القيمة العظمى النسبية .

٢٠ - لننظر في مسألة البحث عن نقطة (X, Y) على القطع الزائدة $x^2 - y^2 = 1$ التي هي أقرب ما يمكن من نقطة مفروضة $P(a, 0)$ حيث $a > 0$. إن مربع البعد بين النقطتين هو $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$ ثم إن $X^2 - Y^2 = 1$ لوقوع النقطة (X, Y) على القطع الزائد . فإذا عبرنا عن D^2 بدلالة X فقط نجد أن :

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

حيث $X = \frac{1}{2}a$ هي القيمة الحرجة الوحيدة .

لنأخذ $a = \frac{1}{2}$ فعندئذ لا نجد أى نقطة تحقق المطلوب لأن Y تخيلية للقيمة الحرجة $X = \frac{1}{4}$ غير أنه يتضح من الشكل أن أقرب نقطة على القطع للنقطة $P(\frac{1}{4}, 0)$ هي النقطة $V(1, 0)$. وسبب الإشكال هنا هو تجاوزنا للحقيقة لأنه كان ينبغي في هذه الحالة أن نبحث عن القيمة الصغرى للدالة $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ ضمن القيمة $X \geq 1$ (نلاحظ أن هذا الشرط لم ينشأ عن الدالة $f(X)$ نفسها . فللدالة $f(X)$ دوّن وجود قيود على X قيمة صغرى نسبية عند $X = \frac{1}{4}$) أما في الفترة $X \geq 1$ فللدالة $f(X)$ قيمة صغرى مطلقة عند الطرف $X = 1$ دون أن يكون لها قيمة صغرى نسبية . نترك كتمرين البحث في الحالتين (i) $a = \sqrt{2}$ و (ii) $a = 3$.

مسائل إضافية

٢١ - اختر كل دالة في المسألة ١ وحدد فترات تزايد الدالة وتناقصها .

ج : (أ) تزايد $x < 0$ تناقص $x > 0$ (ب) تزايد $x > 3$ تناقص $x < 3$ (ج) تزايد $-5/2 < x < 0$ تناقص $0 < x < 5/2$ (د) تزايد $x > 4$.

٢٢ - (أ) بين أن الدالة $y = x^3 + 20x - 6$ متزايدة لجميع قيم x .

(ب) بين أن الدالة $y = 1 - x^3 - x^7$ متناقصة لجميع قيم x .

٢٣ - اختبر كلا من الدوال التالية للحصول على القيم العظمى والصغرى مستعملا طريقة المشتقة الأولى . :

- (أ) $f(x) = x^3 + 2x - 3$ ج : قيمة صغرى نسبية = -4 عند $x = -1$
 (ب) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ج : قيمة عظمى نسبية = 4 عند $x = 1$
 (ج) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ج : قيمة صغرى نسبية = -256/27 عند $x = 2/3$
 قيمة عظمى نسبية = 0 عند $x = -2$
 (د) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ ج : قيمة عظمى نسبية = -4 عند $x = 1$
 قيمة صغرى نسبية = -8 عند $x = 3$
 (هـ) $f(x) = (2-x)^3$ ج : لا يوجد أية قيمة عظمى أو صغرى
 (و) $f(x) = (x^3 - 4)^3$ ج : قيمة عظمى نسبية = 16 عند $x = 0$
 قيمة صغرى نسبية = 0 عند $x = \pm 2$
 (ز) $f(x) = (x-4)^4(x+3)^3$ ج : قيمة عظمى نسبية = 69/2 عند $x = 0$
 قيمة صغرى نسبية = 0 عند $x = 4$
 لا قيمة عظمى ولا قيمة صغرى عند $x = -3$
 (ح) $f(x) = x^3 + 48/x$ ج : قيمة عظمى نسبية = -32 عند $x = -2$
 قيمة صغرى نسبية = 32 عند $x = 2$
 (ط) $f(x) = (x-1)^{1/3}(x+2)^{2/3}$ ج : قيمة عظمى نسبية = 0 عند $x = -2$
 قيمة صغرى نسبية = $-\sqrt[3]{4}$ عند $x = 0$
 لا قيمة عظمى ولا قيمة صغرى عند $x = 1$

٢٤ - اختبر دوال المسألة ٢٣ (أ) - (و) للحصول على القيم العظمى والصغرى باستخدام طريقة المشتقة الثانية .
 عين كذلك نقط الانعطاف والفترات التي تكون عندها الدالة مقعرة لأعلى والفترات التي عندها الدالة مقعرة لأسفل .

- ج (أ) لا يوجد نقطة انعطاف . التقر لأعلى باستمرار .
 (ب) لا يوجد نقطة انعطاف . التقر لأسفل باستمرار .
 (ج) نقطة انعطاف $x = -2/3$. التقر لأعلى $x > -2/3$ والتقر لأسفل $x < -2/3$.
 (د) نقطة انعطاف $x = 2$. التقر لأعلى $x > 2$ التقر لأسفل $x < 2$.
 (هـ) نقطة انعطاف $x = 2$. التقر لأسفل $x > 2$ التقر لأعلى $x < 2$.
 (و) نقطة الانعطاف $x = \pm 2\sqrt{3}/3$. التقر لأعلى $x > 2\sqrt{3}/3$ و $x < -2\sqrt{3}/3$.
 التقر لأسفل $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$

٢٥ - بين أنه لا يوجد للدالة $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية .

٢٦ - اختبر $y = x^3 - 3px + q$ للحصول على القيم العظمى والصغرى النسبية .
 ج : قيمة صغرى $q - 2p^{3/2} =$ وقيمة عظمى $q + 2p^{3/2} =$ بشرط $p > 0$ وخلاف ذلك لا توجد قيم عظمى أو صغرى .

٢٧ - بين أن لـ $y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2$ قيمة صغرى نسبية عندما

$$x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n.$$

٢٨ - أثبت أنه إذا كانت $f''(x_0) = 0$ و $f'''(x_0) \neq 0$. فنحن نوجد نقطة انعطاف عند $x = x_0$.

٢٩ - أثبت أنه إذا كانت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ لها نقطتان حرجتان فإن نقطة الانعطاف تقع في منتصف المسافة بينهما . وإذا كان للمنحنى نقطة حرجة واحدة فإنها تكون نقطة انعطاف .

٣٠ - نقول إن لدالة $f(x)$ قيمة عظمى (صغرى) مطلقة عند $x = x_0$ إذا كان $f(x_0)$ أكبر (أصغر) من أية قيمة أخرى (أو مساوية لها) يمكن أن تأخذها الدالة على مجال التعريف . استخدم الأشكال (البيانية) لتوضح أن (أ) للدالة $y = -x^2$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$ (ب) للدالة $y = (x-3)^2$ قيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند $x = 3$ (ج) للدالة $y = \sqrt{25-4x^2}$ قيمة عظمى مطلقة (تساوى 5) عند $x = 0$. وقيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند $x = \pm 5/2$ (د) للدالة $y = \sqrt{x-4}$ قيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند $x = 4$.

٣١ - ابحث في القيم العظمى والصغرى المطلقة في الفترات المذكورة فقط .

(أ) $y = -x^2$ على $-2 < x < 2$ ج : قيمة عظمى ($= 0$) عند $x = 0$.
(ب) $y = (x-3)^2$ على $0 \leq x \leq 4$ قيمة عظمى ($= 9$) عند $x = 0$ قيمة صغرى ($= 0$) عند $x = 3$.

(ج) $y = \sqrt{25-4x^2}$ على $-2 \leq x \leq 2$ ج : قيمة عظمى ($= 5$) عند $x = 0$.
قيمة صغرى ($= 3$) عند $x = \pm 2$.

(د) $y = \sqrt{x-4}$ على $4 \leq x \leq 29$ ج : قيمة عظمى ($= 5$) عند $x = 29$.
قيمة صغرى ($= 0$) عند $x = 4$.

ملاحظة : إن هذه القيم هي القيم العظمى والصغرى المنوه عنها في الخاصية II الفصل الثالث للوال المستمرة .

٣٢ - تحقق من أن الدالة $f(x)$ متزايدة (متناقصة) عند $x = x_0$ إذا كانت زاوية ميل المماس عند $x = x_0$ للمنحنى $y = f(x)$ زاوية حادة (منفرجة) .

٣٣ - أذكر مع البرهان مرافقة المسألة ١٧ للدالة المتناقصة .

٣٤ - أذكر مع البرهان مرافقة المسألة ١٨ للقيمة الصغرى النسبية .

٣٥ - اختبر $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$ للحصول على النقط العظمى والصغرى .
ج : عظمى عند $(5, 3)$ وصغرى عند $(-1, -3)$.

٣٦ - عند مرور تيار كهربائي في ملف دائري نصف قطره r فإنه يؤثر بقوة $F = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$ على مغناطيس صغير موضوع على مسافة x أعلى مركز الملف . بين أن قيم F تكون أكبر ما يمكن عندما $x = \frac{1}{2}r$.

٣٧ - إذا كان الشغل المبذول بواسطة خلية فلتنائية ، ذات قوة دافعة كهربائية ثابتة E ومقاومة داخلية ثابتة r ، لإمرار تيار منتظم خلال مقاومة خارجية R يتناسب مع $E^2 R / (r + R)^2$ فأثبت أن الشغل المبذول يكون أكبر ما يمكن عندما $R = r$.

الفصل التاسع

مسائل تطبيقية للقيم العظمى والصغرى

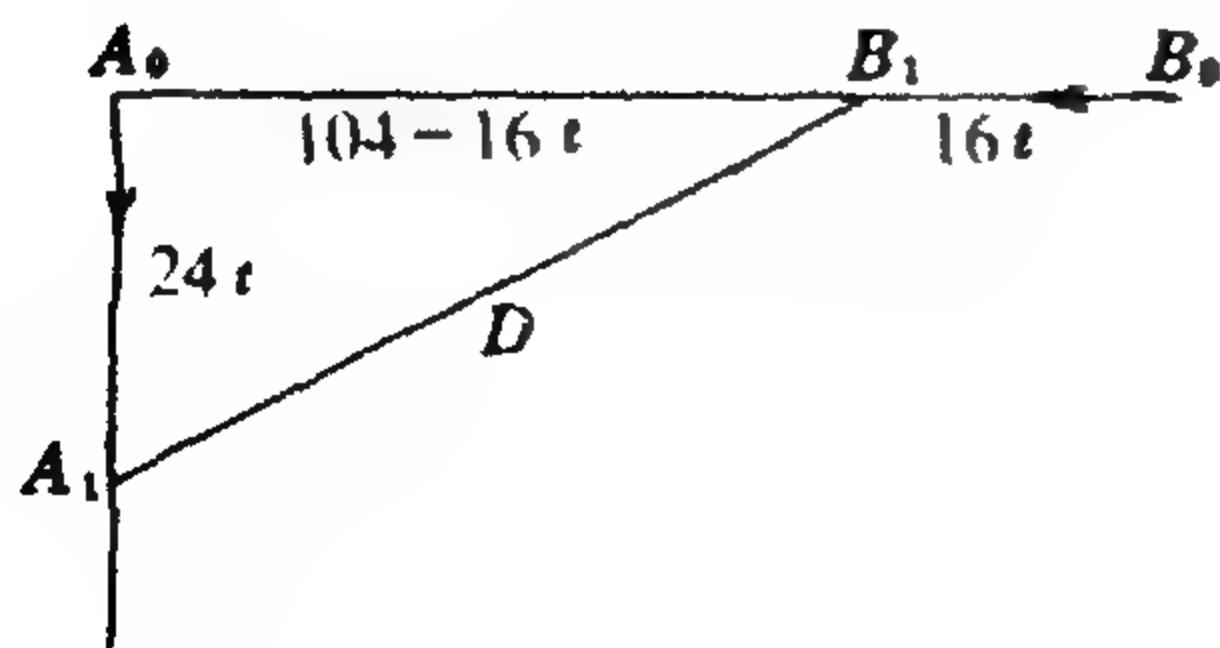
مسائل في القيم العظمى والصغرى :

ليس من الضروري في التطبيقات البسيطة البحث عن القيم العظمى والصغرى النسبية ، حيث يتم الاختيار المناسب للقيم الحرجة من دراسة التمرين نفسه .

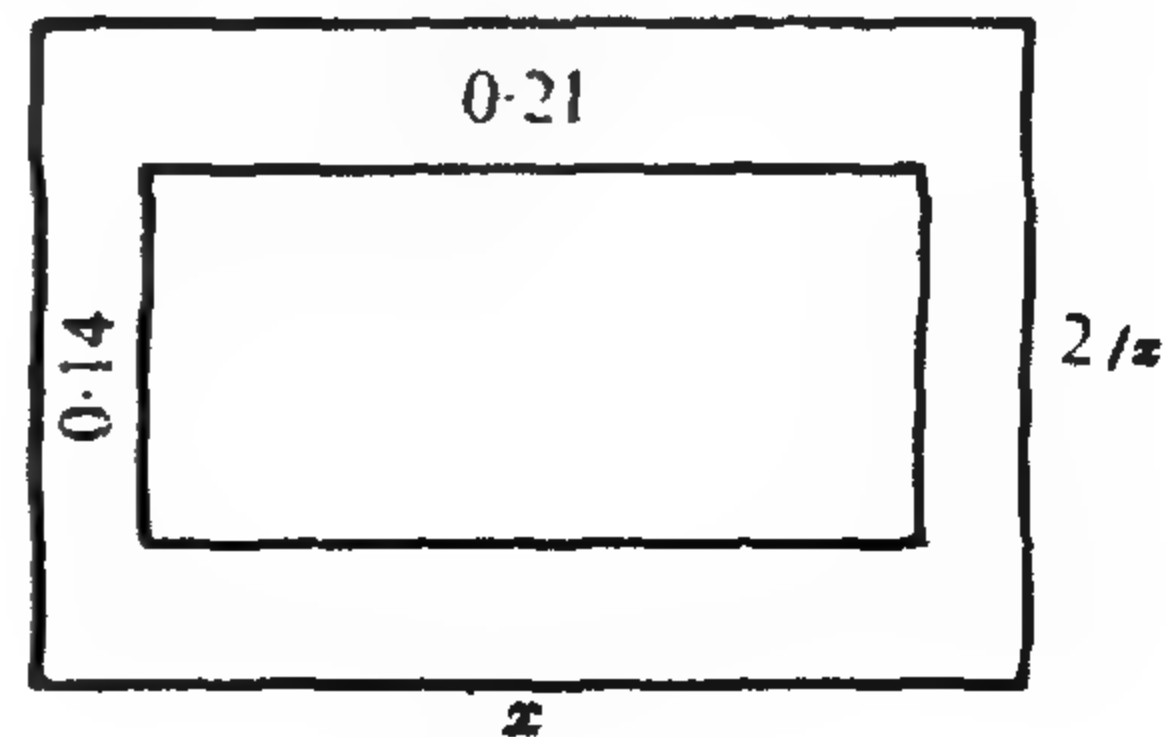
ومن الممكن في الوقت ذاته أن تكون القيم العظمى أو الصغرى النسبية قيما عظمى أو صغرى مطلقة (أى أن تكون أكبر وأصغر قيمة) للدالة . في مثل هذه الحالات تكون المبارات أكبر ما يمكن . . . إلخ مبررة في نص التمرين .

مسائل محلولة

- ١ - قسم الممدد 120° إلى عددين بحيث يكون حاصل الضرب P لأحدهما بمربع الآخر أكبر ما يمكن .
ليكن x أحد العددين فيكون $120 - x$ هو الممدد الآخر ويكون $P = (120 - x)x^2$
وبالتالي $dP/dx = 3x(80 - x)$ والقيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = 80$.
ومن الواضح أن القيمة الحرجة $x = 0$ مرفوضة . والعددين المطلوبين هما $x = 80$ و $120 - x = 40$.
- ٢ - مساحة قطعة من ورق الإعلانات تساوى 2 m^2 . فإذا كانت الهوامش المطلوبة من أعلى الورقة وأسفلها 21 cm وعلى الجانبين 14 cm ، فما هما بعدا قطعة الورق كي تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن ؟
ليكن x طول الإعلان فيكون $2/x$ عرضها . أنظر الشكل ٩ - ١
وتكون المساحة المطبوعة هي $A = (x - 0.28) (\frac{2}{x} - 0.42) \text{ m}^2$.
إذن $\frac{dA}{dx} = \frac{0.56}{x^2} - 0.42$ وبجمل المعادلة $\frac{dA}{dx} = 0$ نجد القيمة الحرجة $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
والبعدان المطلوبان لقطعة الورق هما $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ و $\frac{2}{x} = \sqrt{3} \text{ m}$.



شكل ٩ - ٢



شكل ٩ - ١

٣ - كانت الباخرة B في الساعة التاسعة صباحا على بعد 104 km إلى الشرق تماما بالنسبة لباخرة أخرى A . وكانت B مبحرة نحو الغرب تماما بسرعة 16 km/h أما A فكانت مبحرة نحو الجنوب تماما بسرعة 24 km/h ، فإذا استمرت وفق البرنامج الموصوف فتى تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما وعلى أى بعد ؟ أنظر الشكل ٩ - ٢ .

لنفرض A_0 و B_0 موضعى الباخرتين في الساعة التاسعة صباحا و A_1 و B_1 موضعيهما بعد t ساعة . فتكون المسافة المقطوعة خلال t ساعة بالباخرة A هي $24t \text{ km}$ وبالباخرة B هي $16t \text{ km}$. والمسافة D بين الباخرتين تعطى بالعلاقة $D^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$.

وبالتالى $\frac{dD}{dt} = \frac{832t - 1664}{D}$ وبحل المعادلة $\frac{dD}{dt} = 0$ نجد القيمة الحرجة $t = 2$ التى تعطى أقل قيمة ممكنة لـ D بوضع $t = 2$ في $D^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$ نجد $D = 24\sqrt{13} \text{ km}$ والباخرتان تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما في الساعة الحادية عشرة صباحا وتكون المسافة بينهما في ذلك الوقت هي $24\sqrt{31} \text{ km}$.

٤ - وعاء اسطوانى قاعدته دائرية الشكل وحجمه 1000 cm^3 . أوجد أبعاده بحيث تكون كمية المعدن اللازمة لصنعه (أى مساحته السطحية) أصغر ما يمكن وذلك في الحالتين (أ) الوعاء مفتوح من قاعدته العليا (ب) الوعاء مغلق . لنفرض أن r ، h هما نصف قطر القاعدة والارتفاع مقدرين بالسنتيمترات على الترتيب ولتكن A كمية المعدن و V حجم الوعاء .

$$(1) \quad V = \pi r^2 h = 1000 \quad \text{و} \quad A = 2\pi rh + \pi r^2$$

لتعبر عن A بدلالة متغير واحد يبنى أن نحل العلاقة الأولى بالنسبة لـ h (حيث أنها الأسهل) ثم نموض في الثانية فنحصل على

$$A = 2\pi r(1000/\pi r^2) + \pi r^2 = 2000/r + \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = \frac{2(\pi r^3 - 1000)}{r^2}$$

$$\text{وبالتالى } h = 1000/\pi r^2 = 10/\sqrt{\pi} \text{ cm} \quad \text{إذن} \quad r = h = 10/\sqrt{\pi} \text{ cm}$$

$$(ب) \quad V = \pi r^2 h = 1000 \quad \text{و} \quad A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(1000/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 2000/r + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

$$\text{وبالتالى فإن } h = 1000/\pi r^2 = 10\sqrt{4/\pi} \text{ cm} \quad \text{إذن} \quad h = 2r = 10\sqrt{4/\pi} \text{ cm}$$

٥ - إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج x جهاز راىو يوميا تساوى $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ دولارا والسعر الذى يمكن أن يباع به الجهاز الواحد $(50 - \frac{1}{2}x)$ دولارا .

(أ) فكم يبنى أن يكون الإنتاج اليومى لتحصل على أكبر ربح كلى ممكن ؟

(ب) بين أن تكلفة الإنتاج هي صغرى نسبيا .

$$(1) \quad \text{إن الربح من بيع } x \text{ جهاز في اليوم يساوى } P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$$

$$\frac{dP}{dx} = 15 - \frac{3x}{2} \quad \text{بحل المعادلة } dP/dx = 0 \text{ نجد القيمة الحرجة } x = 10$$

والإنتاج الذى يعطى ربحا أكبر ما يمكن هو 10 أجهزة يوميا .

$$(ب) \quad \text{تكلفة الإنتاج هي } C = \frac{\$(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)}{x} = \$\left(\frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x}\right)$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{4} - \frac{25}{x^2} \quad \text{وبحل المعادلة } dC/dx = 0 \text{ نجد } x = 10 \text{ والتكلفة صغرى .}$$

٦ - إذا كانت نفقات الوقود لقاطرة متحركة تتناسب مع مربع السرعة ولتكن 25 دولاراً في الساعة . لـ سرعة 40 km/hr وإذا كانت هناك نفقات أخرى تقدر بـ 100 دولار في الساعة مهما كانت السرعة فأوجد السرعة التي تجعل النفقات لكل كيلومتر أقل ما يمكن .

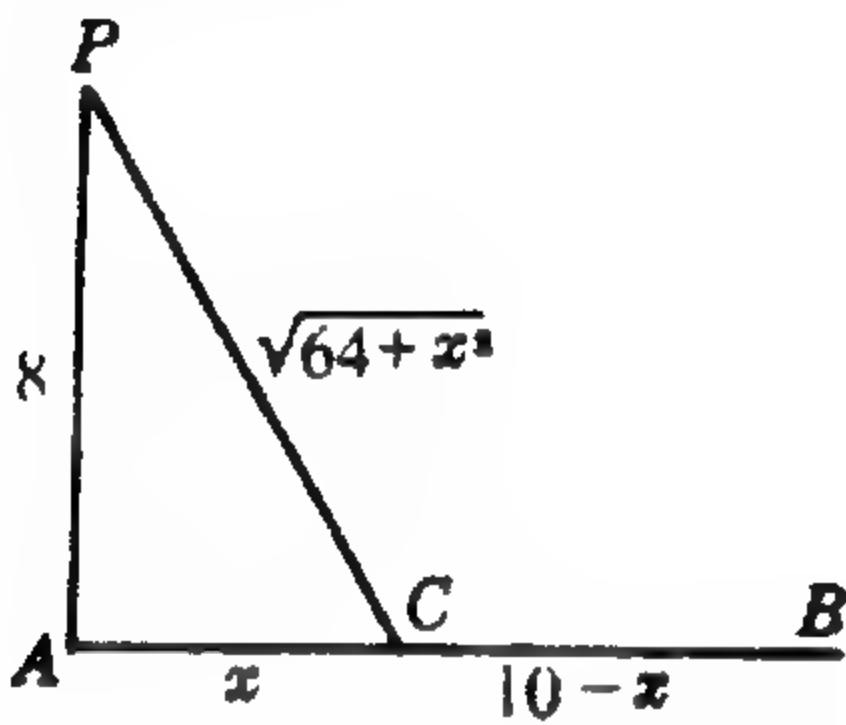
لتكن v السرعة المطلوبة و C النفقات الكلية لكل كيلومتر .

فتكون نفقات الوقود في كل ساعة kv^2 حيث k ثابت ينبغي تعيينه عندما $v = 40$ km/hr و $kv^2 = 1600$ $k = 1/64$ إذن وتكون النفقات (مقدرة بالدولار / كم) = $\frac{\text{النفقات مقدرة بالدولار / ساعة}}{\text{السرعة مقدرة بـ كم / ساعة}}$



$$C = \frac{v^2/64 + 100}{v} = \frac{v}{64} + \frac{100}{v} \text{ أى}$$

ومنه $\frac{dC}{dv} = \frac{1}{64} - \frac{100}{v^2} = \frac{(v-80)(v+80)}{64v^2}$ وبما أن $v > 0$ فإن القيمة الحرجة المناسبة الوحيدة هي $v = 80$ والسرعة الأفضل اقتصادياً هي 80 km/hr .



شكل ٦ - ٣

٧ - رجل في زورق تجديف عند النقطة P على بعد 8 km من النقطة A ، أقرب نقطة إليه من الشاطئ المستقيم . يرغب هذا الرجل أن يصل النقطة B ، التي تبعد 10 km عن A على الشاطئ في أقصر وقت ممكن . فإذا كانت سرعة تجديف هذا الرجل 3 km/hr وسرعته ماشياً 6 km/hr « شكل ٦ - ٣ » .

أين ينبغي أن يهبط إلى اليابسة كي يصل بأقصر وقت ممكن ؟

لتكن C النقطة بين A و B التي ينبغي أن ينزل عندها الرجل ، ولنفرض $AC = x$. المسافة المقطوعة تجديفاً تساوى $PC = \sqrt{64+x^2}$ والزمن t_1 اللازم لذلك يساوى (المسافة / السرعة) .

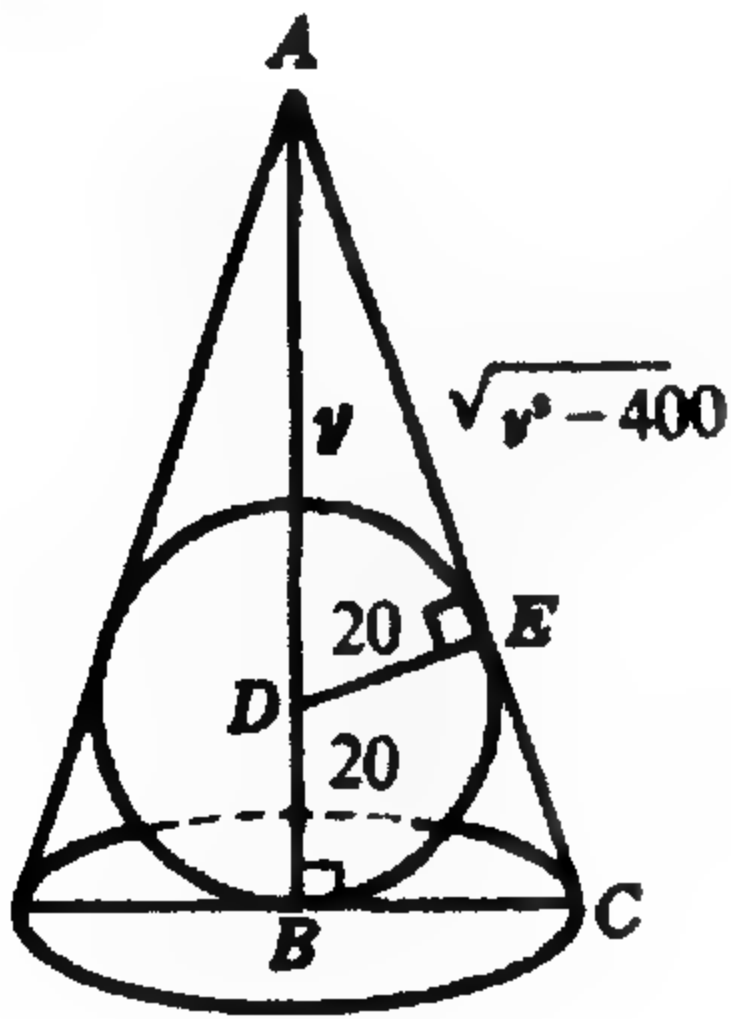
$t_2 = \frac{\sqrt{64+x^2}}{3}$ ثم إن المسافة المقطوعة مشياً هي $10-x$ والزمن اللازم $t_2 = (10-x)/6$ والزمن الكلى المطلوب

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{3}\sqrt{64+x^2} + \frac{1}{6}(10-x) \text{ يكون}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{3\sqrt{64+x^2}} - \frac{1}{6} = \frac{2x - \sqrt{64+x^2}}{6\sqrt{64+x^2}}$$

والقيمة الحرجة من $2x - \sqrt{64+x^2} = 0$ هي $x = \frac{8}{3}\sqrt{3} = 4.62$ وهكذا نجد أن على الرجل أن يهبط على اليابسة في نقطة تبعد 4.62 km من A نحو B .

٨ - براد عمل سياج حول حقل مستطيل الشكل ذي مساحة مفروضة . فإذا كان هناك نهر على أحد جوانب الحقل (طول المستطيل) ولا نحتاج إلى إقامة سياج على هذا الجانب فبرهن أنه إذا كان طول الحقل يساوى ضعف عرضه فالتكلفة اللازمة تكون أقل ما يمكن .



شكل ٦ - ٤

ليكن x الطول و y العرض . والمساحة $A = xy$ والسياج اللازم $F = x + 2y$

$$dF/dx = 1 + 2 dy/dx \text{ ومن } dF/dx = 0 \text{ نجد } dy/dx = -1/2$$

ولكن $dA/dx = 0 = y + x dy/dx$ إذن $y - 1/2x = 0$ ومنه $x = 2y$ وهو المطلوب .

٩ - ما هي أبعاد مخروط دائري قائم ذي حجم أقل ما يمكن تستطيع رسمه حول كرة نصف قطرها 20 cm .

ليكن x نصف قطر قاعدة المخروط و $y + 20$ ارتفاعه . من المثلثين المتشابهين ABC و AED نجد .

$$x^2 = \frac{400(y+20)^2}{y^2-400} = \frac{400(y+20)}{y-20} \quad \text{وبالتالى} \quad \frac{x}{20} = \frac{y+20}{\sqrt{y^2-400}}$$

$$V = \frac{(\pi x^2)(y+20)}{3} = \frac{400\pi(y+20)^2}{3(y-20)} \quad \text{حجم المخروط هو}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{400\pi(y+20)(y-60)}{3(y-20)^2} \quad \text{ومن}$$

والقيمة الحرجة التى تفى بالفرض هى $y = 60$.

وارتفاع المخروط إذن هو $y + 20 = 80$ cm ونصف قطر قاعدته $x = 20\sqrt{2}$ cm.

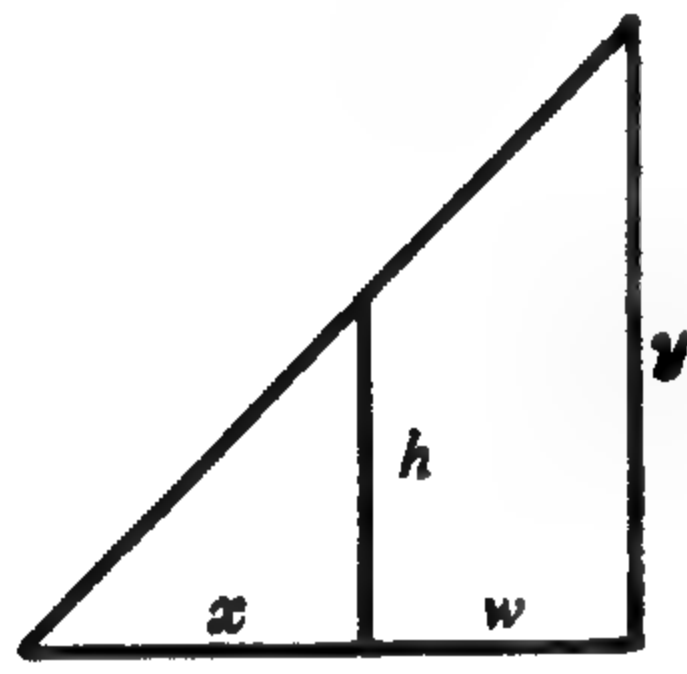
١٠ - أوجد بعدى المستطيل ذى المساحة العظمى والذي يمكن رسمه داخل قطعة القطع المكافئ $y^2 = 4px$ المحددة بالمستقيم $x = a$.

نفرض أن المستطيل هو $PBB'P'$ وأن (x, y) إحداثى النقطة P أنظر الشكل ٩ - ٥.

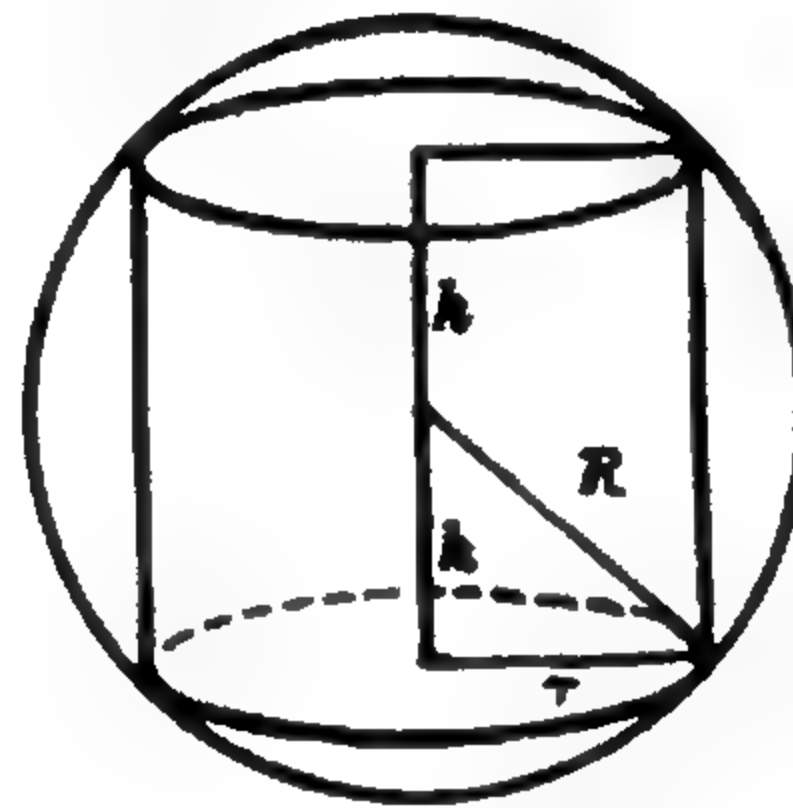
$$A = 2y(a-x) = 2y(a-y^2/4p) = 2ay - y^3/2p. \quad \text{إذن مساحة المستطيل هى}$$

$$\text{ومن} \quad dA/dy = 2a - 3y^2/2p. \quad \text{وبحل المعادلة} \quad dA/dy = 0 \quad \text{نجد القيمة الحرجة} \quad y = \sqrt{4ap/3}.$$

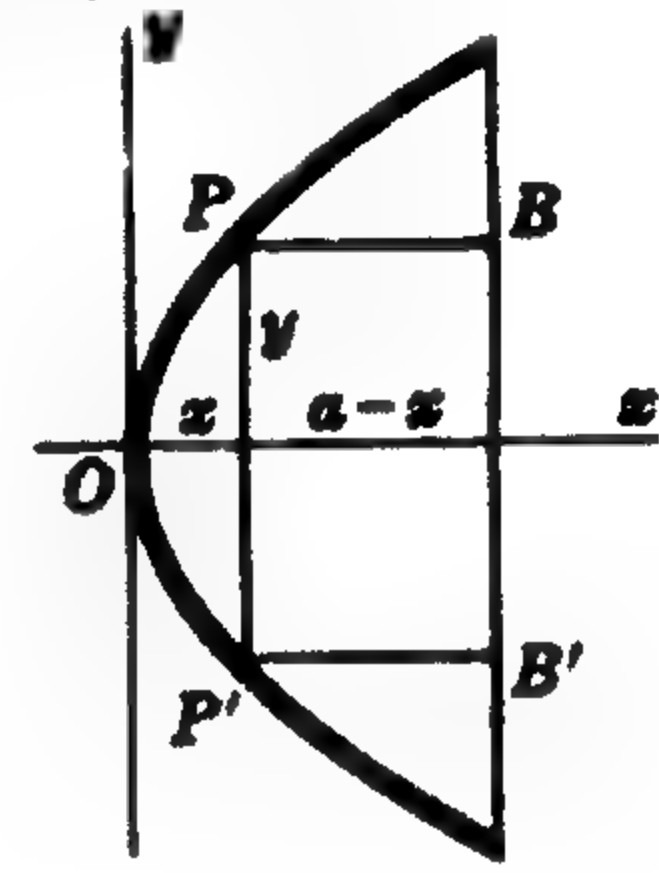
$$\text{إذن بعدا المستطيل هما} \quad 2y = \sqrt{3ap} \quad \text{و} \quad a-x = a - y^2/4p = 2a/3.$$



شكل ٩ - ٧



شكل ٩ - ٦



شكل ٩ - ٥

١١ - أوجد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات حجم أعظم V والتي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها R أنظر الشكل ٩ - ٧.

نفرض أن r هو نصف قطر قاعدة الاسطوانة و $2h$ ارتفاعها.

$$\text{إذن} \quad V = 2\pi r^2 h \quad \text{و} \quad r^2 + h^2 = R^2 \quad \text{عندئذ} \quad dV/dr = 2\pi(r^2 dh/dr + 2rh) \quad \text{and} \quad 2r + 2h dh/dr = 0.$$

$$\text{ومن العلاقة الأخيرة نجد أن} \quad dh/dr = -r/h. \quad \text{إذن} \quad dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh).$$

$$\text{وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن فإن} \quad dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh) = 0 \quad \text{ومن} \quad r^2 = 2h^2.$$

$$\text{وبما أن} \quad r^2 + h^2 = R^2 \quad \text{فإن} \quad 2h^2 + h^2 = R^2 \quad \text{ومن} \quad h = R/\sqrt{3} \quad \text{وارتفاع الاسطوانة} \quad 2h \quad \text{يساوى} \quad 2R/\sqrt{3}.$$

١٢ - يراد تقوية جدار جانبي لبناء بدعامة بحيث تمر هذه الدعامة فوق جدار ارتفاعه h m ويبعد عن الجدار الأول w m. أوجد الطول L لأقصر دعامة يمكن أن تفى بالفرض.

نفرض أن x هى المسافة بين طرف الدعامة الذى يرتكز على الأرض والجدار الموازى وأن y m بعد طرف الدعامة العلوى عن الأرض (أنظر الشكل ٩ - ٧).

$$\text{من الواضح أن} \quad L^2 = (w+x)^2 + y^2 \quad \text{ومن المثلثات المتشابهة نجد} \quad \frac{h}{y} = \frac{x}{x+w} \quad \text{و} \quad y = \frac{h(x+w)}{x}.$$

$$\text{إذن} \quad L^2 = (x+w)^2 \left\{ 1 + \frac{h^2}{x^2} \right\} \quad \text{و} \quad L^2 = (x+w)^2 \left\{ 1 - \frac{wh^2}{x^3} \right\} \quad \text{و} \quad 2L \frac{dL}{dx} = 2(x+w) \left\{ 1 + \frac{h^2}{x^2} \right\} + (x+w)^2 \left\{ -\frac{2h^2}{x^3} \right\} = 2(x+w) \left\{ 1 - \frac{wh^2}{x^3} \right\}$$

والقيمة الحرجة المناسبة هى $x = w^{1/3} h^{2/3}$ وطول أقصر دعامة هو

$$L = (w+x) \left(1 + \frac{h^2}{x^2} \right)^{1/2} = (w + w^{1/3} h^{2/3}) (1 + w^{-2/3} h^{2/3})^{1/2} = (w^{2/3} + h^{2/3})^{3/2}.$$

مسائل إضافية

- ١٣ - عددان موجبين مجموعهما 20 أوجد العددين (أ) إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .
(ب) إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن (ج) إذا كان حاصل ضرب مربع أحدهما بمكعب الآخر أكبر ما يمكن .
ج : (أ) 10, 10 (ب) 10, 10 (ج) 8, 12 .
- ١٤ - عددان موجبين حاصل ضربهما 16 أوجد العددين (أ) إذا كان مجموعهما أصغر ما يمكن .
(ب) إذا كان ناتج جمع أحدهما إلى مربع الآخر أصغر ما يمكن . ج : (أ) 4, 4 (ب) 8, 2 .
- ١٥ - يراد صنع صندوق مفتوح على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مربع وحجمه 216 m^3 . فإذا كانت تكلفة المتر المربع من القاعدة 50 سنتا ومن الجوانب 25 سنتا . فما هي أبعاد الصندوق التي تضمن لنا أقل تكلفة ممكنة .
ج : $6 \times 6 \times 6 \text{ m}$.
- ١٦ - يقع جدار ارتفاعه $3\sqrt{3} \text{ m}$ ، على بعد متر واحد من منزل . ما هو طول أقصر سلم يمكن أن يصل بين الأرض والمنزل بحيث يستند على الجدار من أعلاه . ج : $138/9 \text{ m}$.
- ١٧ - تعرض شركة قائمة الأسعار التالية 30 دولارا قيمة كل ألف إذا كان الطلب 50,000 أو أقل وتنقص قيمة كل ألف $37 \frac{1}{2}$ سنتا لكل ألف يزيد عن 50,000 . فما هو الطلب الذي يجعل الشركة تحصل على أعظم ما يمكن من الدخل . ج 65,000 .
- ١٨ - أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,4) بحيث يقطع من الربيع الأول من المستوى مثلثا مساحته أصغر ما يمكن .
ج : $4x + 3y - 24 = 0$.
- ١٩ - عين النقطة من القطع المكافئ $z = 4 - x^2 - y^2$ الواقعة في الربيع الأول من المستوى بحيث يحدد المماس للقطع عند هذه النقطة مع محوري الإحداثيات مثلثا مساحته أصغر ما يمكن . ج : $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$.
- ٢٠ - أوجد أقصر مسافة بين النقطة (4,2) والقطع المكافئ $z = 8x - y^2$. ج : $2\sqrt{2}$ وحدة .
- ٢١ - يراد رسم مماس للقطع الناقص $x^2/25 + y^2/16 = 1$ بحيث يكون طول جزء المماس المحدد بالمحورين الإحداثيين أقصر ما يمكن . بين أن طول هذا الجزء يساوى 9 وحدات .
- ٢٢ - مستطيل مرسوم داخل القطع الناقص $x^2/400 + y^2/225 = 1$ بأضلاع موازية لمحاور القطع أوجد بعدي المستطيل بحيث تكون (أ) مساحته أكبر ما يمكن (ب) طول محيطه أكبر ما يمكن .
ج : (أ) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$ (ب) 32×18 .
- ٢٣ - أوجد نصف القطر R لمخروط دائري قائم يمكن رسمه على كرة نصف قطرها r بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن .
ج : $R = \frac{2}{3} r \sqrt{2}$.
- ٢٤ - المطلوب رسم اسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط دائري قائم نصف قطره r أوجد نصف قطر الاسطوانة R بحيث يكون (أ) إذا كان حجمها أكبر ما يمكن (ب) إذا كانت مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن .
ج : (أ) $R = \frac{2}{3} r$ (ب) $R = \frac{1}{2} r$.
- ٢٥ - بين أن ارتفاع خيمة مخروطية الشكل ، ذات سعة مفروضة ، يساوى $\sqrt{2}$ مرة من نصف قطر قاعدتها إذا أردنا أن تكلفنا أقل ما يمكن من مادة الصنع .
- ٢٦ - بين أن المثلث المتساوي الأضلاع والذي ارتفاعه $3r$ هو أقل المثلثات المتساوية الساقين مساحة والتي يمكن رسمها على دائرة نصف قطرها r .
- ٢٧ - عين أبعاد اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها 20 cm بحيث تكون مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن . ج : $h = 2r = 20\sqrt{2} \text{ cm}$.
- ٢٨ - ناقش إمكانية رسم اسطوانة دائرية قائمة ذات مساحة عظمى داخل مخروط دائري قائم نصف قطره r وارتفاعه h .
ج : إذا كان $h > 2r$ فإن نصف قطر الاسطوانة يساوى $\frac{1}{2} hr / (h - r)$.

الفصل العاشر

الحركة المستقيمة والدائرية

الحركة المستقيمة :

تتميز حركة جسم P تعيينا تاما على خط مستقيم بالمعادلة $s = f(t)$ حيث $t > 0$ هو الزمن . و s هي بعد P عن نقطة ثابتة O من مسارها .

$$v = \frac{ds}{dt}$$
 إن سرعة P في لحظة ما هي

إذا كانت $v > 0$ فإن P تتحرك في اتجاه تزايد s .

وإذا كانت $v < 0$ فإن P تتحرك في اتجاه تناقص s .

أما إذا كانت $v = 0$ فإن P في وضع السكون آنيا .

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$
 وأما تسارع (عجلة) P في اللحظة t فهي

فإذا كانت $a > 0$ فإن v متزايدة وإذا كانت $a < 0$ فإن v متناقصة .

وعندما تكون كل من a و v لها نفس الإشارة . فإن سرعة P متزايدة .

أما إذا كان a و v إشارتان متعاكستان فإن سرعة P متناقصة .

أنظر المسائل ١ - ٥

الحركة الدائرية :

تتميز حركة جسم P تعيينا تاما على دائرة بالمعادلة $\theta = f(t)$ حيث θ الزاوية المركزية بالتقدير الدائري التي يقطعها المستقيم الذي يصل النقطة P بمركز الدائرة في زمن قدرة t .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$
 إن السرعة الزاوية لـ P في اللحظة t تساوي

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$
 والتسارع الزاوي لـ P في اللحظة t يساوي

إذا كان α ثابتا لجميع قيم t فإن P تتحرك بتسارع زاوي ثابت .

أما إذا كان $\alpha = 0$ صفر لجميع قيم t فإن P تتحرك بسرعة زاوية ثابتة .

أنظر المسألة ٦

مسائل محلولة

تقدر s في المسائل التالية للحركة المستقيمة بالأمتار (m) والزمن بالثواني (s) .

١ - يتحرك جسم في خط مستقيم وفقا للقانون $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$ عين سرعته وتسارعه عندما تضي ثانيتان .

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \quad \text{وعندما } t = 2 \text{ يكون } v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4 \text{ ms}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t \quad \text{وعندما } t = 2 \text{ يكون } a = 3(2) = 6 \text{ ms}^{-2}$$

٢ - تعطى حركة جسم يسير في خط مستقيم بالمعادلة $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$.

- (أ) أوجد a, s عندما $v = 0$.
 (ب) أوجد v, s عندما $a = 0$.
 (ج) متى تكون s متزايدة ؟
 (د) متى تكون v متزايدة ؟
 (هـ) متى يتغير اتجاه الحركة ؟

$$v = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \quad a = dv/dt = 6(t-2)$$

(أ) عندما $v = 0$ فإن $t = 1, 3$ وعندما $t = 1$ تكون $s = 8$ و $a = -6$ وعندما $t = 3$ يكون $a = 6$ و $s = 4$.

(ب) عندما $a = 0$ فإن $t = 2$ وفي اللحظة $t = 2$ تكون $s = 6$ و $v = -3$.

(ج) إن s متزايدة عندما $v > 0$ أي عندما $t < 1$ و $t > 3$.

(د) إن v متناقصة عندما $a > 0$ أي عندما $t > 2$.

(هـ) يتغير اتجاه الحركة عندما $v = 0$ و $a \neq 0$ نستنتج من (أ) أن الاتجاه يتغير عندما $t = 1$ و $t = 3$.

٣ - يتحرك جسم على مستقيم أفق وفق القانون $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

(أ) متى تزايد s ومتى تناقص ؟

(ب) متى تزايد v ومتى تناقص ؟

(ج) متى تكون السرعة القياسية للجسم متزايدة ومتى تكون متناقصة ؟

(د) أوجد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الثواني الخمس الأولى للحركة .

$$v = ds/dt = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) \quad a = dv/dt = 6(t-3)$$

(أ) إن s متزايدة عندما $v > 0$ أي عندما $t < 2$ و $t > 4$.

وإن s متناقصة عندما $v < 0$ أي عندما $2 < t < 4$.

(ب) إن v متزايدة عندما $a > 0$ أي عندما $t > 3$.

وإن v متناقصة عندما $a < 0$ أي عندما $t < 3$.

(ج) إن السرعة القياسية متزايدة عندما يكون v و a الإشارة ذاتها ومتناقصة عندما تكون إشارتهما متعاكستين .

ولكن بما أن v تغير إشارتها عندما $t = 2$ و $t = 4$ في حين تغير a إشارتها عندما $t = 3$ فإنه ينبغي

أن نقارن الإشارات في الفترات التالية $t < 2$ و $2 < t < 3$ و $3 < t < 4$ و $t > 4$.

في الفترة $t < 2$ تكون $v > 0$ و $a < 0$ والسرعة القياسية متناقصة .

وفي الفترة $2 < t < 3$ تكون $v < 0$ و $a < 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

وفي الفترة $3 < t < 4$ تكون $v < 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متناقصة .

وفي الفترة $t > 4$ تكون $v > 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

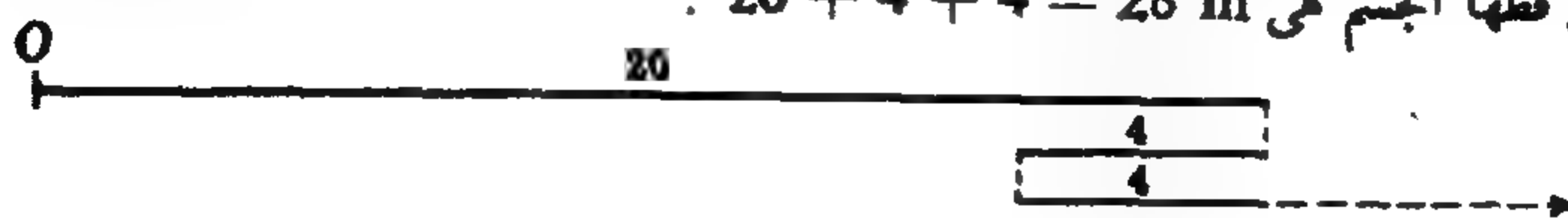
(د) عندما $t = 0$ يكون $s = 0$ والجسم في الموضع O والحركة الابتدائية نحو اليمين ($v > 0$) وتستمر كذلك

مدة ثانيتين يصل الجسم في نهايتها إلى البعد $s = f(2) = 20$ m من O .

بعد ذلك وخلال الثانيةين التاليتين يتحرك الجسم نحو اليسار ويكون في نهاية هذا الزمن على بعد $s = f(4) = 16$ m عن O .

وبعد هذا يعود الجسم للحركة نحو اليمين حيث يصل بعد خمس ثوان من بداية الحركة إلى الموضع $s = f(5) = 20$ m من O .

والمسافة الكلية التي قطعها الجسم هي $20 + 4 + 4 = 28$ m .



شكل ١٠ - ١

٤ - يتحرك جسم في خط مستقيم أفق وفق القانون $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$.

(أ) متى تكون السرعة القياسية متزايدة ومتى تكون متناقصة ؟

(ب) متى يتغير اتجاه الحركة ؟

(ج) أوجد المسافة الكلية التي قطعها الجسم خلال الثواني الثلاث الأولى .

$$v = ds/dt = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)^2(2t-5) \quad a = dv/dt = 12(t-1)(t-2) \quad \text{إن}$$

(أ) قد تغير v إشارتها عندما $t = 1$ و $t = 2.5$ أما a فقد تغير إشارتها عندما $t = 1$ و $t = 2$.

في الفترة $t < 1$ يكون $v < 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متناقصة .

وفي الفترة $1 < t < 2$ يكون $v < 0$ و $a < 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

وفي الفترة $2 < t < 2.5$ يكون $v < 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متناقصة .

وفي الفترة $t > 2.5$ يكون $v > 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

(ب) أما اتجاه الحركة فيتغير عندما $t = 2.5$ لأن $v = 0$ و $a \neq 0$.

أما عند $t = 1$ فلا يتغير اتجاه الحركة لأن v لا تغير إشارتها عندما تزايد t مرة بـ $t = 1$.

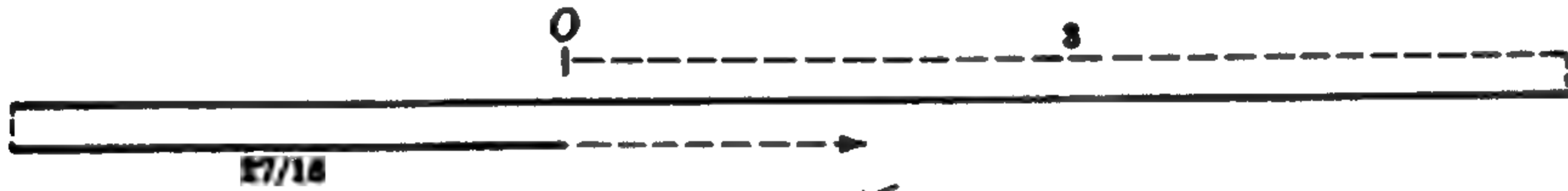
يلاحظ أنه عندما $t = 1$ فإن $v = 0$ و $a = 0$. وبالتالي ليست هناك معلومات يمكن الحصول عليها .

(ج) عندما $t = 0$ تكون $s = 3$ والجسم يبعد ثلاثة أمتار إلى اليمين من O .

وتم الحركة نحو اليسار خلال 2.5 ثانية الأولى حيث يصل الجسم في نهايتها إلى $27/19$ m إلى اليسار من O .

وعندما تصبح $t = 3$ تكون $s = 0$ ويكون بذلك قد تحرك الجسم $27/16$ m إلى اليمين . والمسافة الكلية

$$\text{المقطوعة} = 3 + 27/16 + 27/16 = 51/8$$



شكل ١٠ - ٢

٥ - قذف حجر رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية 34.3 m/s فتتحرك وفق القانون $s = 34.3t - 4.9t^2$ حيث s البعد عن

نقطة الإنطلاق احسب . (أ) السرعة والتسارع عندما $t = 3$ وعندما $t = 4$. (ب) أقصى إرتفاع يصله الحجر .

(ج) متى يصبح إرتفاعه 29.4 m ؟

إن

$$v = ds/dt = 34.3 - 9.8t \quad a = dv/dt = -9.8$$

(أ) عندما $t = 3$ تكون $v = 4.9$ و $a = -9.8$ والحجر صاعداً بمعدل 4.9 m/s .

وعندما $t = 4$ تكون $v = -4.9$ و $a = -9.8$ والحجر هابطاً بمعدل 4.9 m/s .

(ب) يكون الجسم في أعلى نقطة عندما تكون $v = 0$.

$$\text{بحل المعادلة } 0 = 34.3 - 9.8t \text{ نجد أن } t = 3.5$$

وعند هذه اللحظة تكون $s = 60.025$ m .

(ج)

$$29.4 = 34.3t - 4.9t^2, \quad t^2 - 7t + 6 = 0, \quad (t-1)(t-6) = 0, \quad t = 1, 6.$$

في نهاية الثانية الأولى من بدء الحركة يكون الحجر على إرتفاع 29.4 m وهو صاعد لأن $v > 0$ وأما في نهاية الثانية

السادسة فإن الحجر يكون على الإرتفاع ذاته ولكن هابطاً لأن $v < 0$.

٦ - يدور جسم من السكون في عكس اتجاه عقارب الساعة وفق القانون $\theta = t^3/50 - t$ حيث تقاس θ (rad) و t

(sec) احسب الإزاحة الزاوية θ والسرعة الزاوية ω والتسارع الزاوي α في نهاية الثانية العاشرة .

$$\theta = t^3/50 - t = 10 \text{ rad}, \quad \omega = d\theta/dt = 3t^2/50 - 1 = 5 \text{ rad/sec}, \quad \alpha = d\omega/dt = 6t/50 = 6/5 \text{ rad/sec}^2$$

مسائل إضافية

- ٧ - يتحرك جسم في خط مستقيم وفق القانون $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ حيث تقاس المسافة بالأمتار والزمن بالثواني .
حدد موضع الجسم بالنسبة لنقطة البداية ($t = 0$) عند O وأوجد اتجاه الحركة وسرعتها وبين فيما إذا كانت السرعة القياسية متزايدة أو متناقصة عندما (أ) $t = 1/2$ (ب) $t = 3/2$ (ج) $t = 5/2$ (د) $t = 4$.
ج : (أ) $25/8$ m إلى اليمين من O والحركة نحو اليمين بسرعة $v = 15/4$ m/s متناقصة .
(ب) $27/8$ m إلى اليمين من O ، والحركة نحو اليسار بسرعة $v = -9/4$ m/s متزايدة .
(ج) $5/8$ m إلى اليمين من O ، والحركة نحو اليسار بسرعة $v = -9/4$ m/s متناقصة .
(د) 4 m إلى اليمين من O والحركة نحو اليمين بسرعة $v = 9$ m/s متزايدة .
- ٨ - تعطى المسافة التي تفصل قطاراً عن نقطة ثابتة على مساره المستقيم في اللحظة t بالقانون $s = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$ متى كانت حركة القطار نحو الراء ؟ ج . $3 < t < 8$.
- ٩ - ادرس ، كافي المسألة (٢) كلا من الحركات المستقيمة التالية :
(أ) $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ ، (ب) $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$ ، (ج) $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$ ، (د) $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t$.
ج . (أ) تقف الحركة عند $t = 2$ و $t = 4$ مع تغيير في اتجاه الحركة .
(ب) تقف الحركة عند $t = 1$ بدون تغيير في اتجاه الحركة .
(ج) تقف الحركة عند $t = 1$ و $t = 3$ مع تغيير في اتجاه الحركة .
(د) تقف الحركة عند $t = 1$ مع تغيير في اتجاه الحركة ، وتقف عند $t = 3$ دون تغيير في اتجاه الحركة .
- ١٠ - يصعد جسم من الأرض رأسياً لأعلى وفق القانون $s = 19.6t - 4.9t^2$ بين أن الجسم يفقد نصف سرعته خلال 14.7 m الأولى من صعوده .
- ١١ - قذفت كرة رأسياً لأعلى من طرف سقف بناء بحيث تسقط في الشارع تحت السقف بمسافة 34.3 m .
فإذا تحركت الكرة بحيث بعد زمن قدرة t كانت مسافتها s (مقدرة بالأمتار) بدء من السقف تعطى بالعلاقة $s = 29.4 - 4.9t^2$ فأوجد (أ) موضع الكرة وسرعتها واتجاه السرعة عندما $t = 2$.
(ب) سرعتها عندما تصطم بالشارع .
ج . (أ) 73.5 m فوق الشارع والسرعة 9.8 m/s لأعلى .
(ب) 39.2 m/s .
- ١٢ - تدور عجلة زاوية θ rad في t sec بحيث يكون $\theta = 128t - 12t^2$ أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي في نهاية 3 sec .
ج . $\omega = 56$ rad/s ، $\alpha = -24$ rad/s² .
- ١٣ - ادرس المسألتين ٢ ، ٩ لتستنتج أن وقوف الحركة مع تغيير الاتجاه يتم عند قيم t التي تجعل $s = f(t)$ يبلغ قيمة عظمى أو صغرى في حين يتم وقوف الحركة دون تغير الاتجاه عند نقاط الانعطاف .

الفصل الحادى عشر

المعدلات المتعلقة ببعضها

المعدلات المتعلقة ببعضها : إذا كان المتغير x دالة للزمن t فمتناظرة يعطى معدل المتغير الزمنى لـ x بـ dx/dt .
وإذا كان متغيران أو أكثر ، جميعها دوال لـ t ، متعلقة ببعضها بواسطة معادلة فإنه يمكن الحصول على العلاقة بين معدلات تغيرهما باشتقاق المعادلة بالنسبة لـ t .

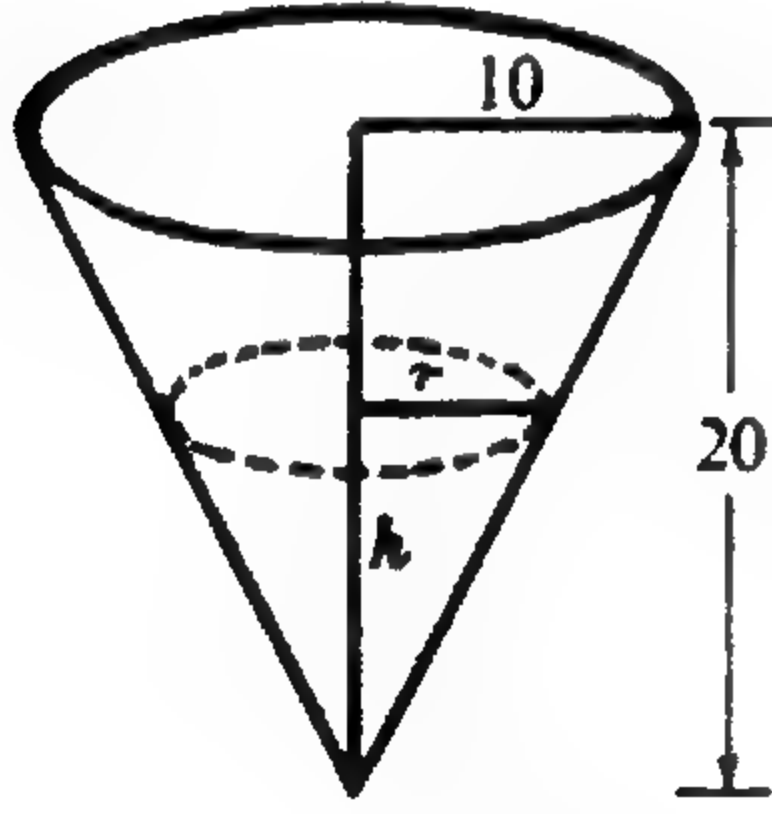
مسائل محلولة

١ - يتسرب غاز من بالون كروى بمعدل $900 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ فبأية سرعة تتقلص مساحة السطح عندما يكون نصف القطر 360 cm ؟
ليكن نصف قطر الكرة فى اللحظة t هو r والحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ومساحة السطح $S = 4\pi r^2$ عندئذ :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dS/dt}{dV/dt} = \frac{2}{r},$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2}{r} \left(\frac{dV}{dt} \right) = \frac{2}{360} (-900) = -5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}. \quad \text{و}$$

٢ - ينسكب ماء من قمع مخروطى بمعدل $5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. فإذا كان نصف قطر قاعدة القمع مساوياً 10 cm وارتفاعه 20 cm ، فأوجد معدل انخفاض مستوى الماء عندما يكون هذا المستوى على بعد 5 cm من قاعدة القمع .



شكل ١١ - ١

ليكن r نصف قطر سطح الماء فى اللحظة t و h ارتفاعه وليكن v حجم الماء فى المخروط .

ومن تشابه المثلثات نجد أن $r/10 = h/20$ أو $r = \frac{1}{2}h$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad \text{و} \quad dV/dt = \frac{1}{4}\pi h^2 dh/dt.$$

وعندما يكون $dv/dt = -5$ و $h = 20 - 5 = 15$

$$\text{فإن } dh/dt = -4/45\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}.$$

٣ - يتساقط رمل من منحدر مشكلا كومة مخروطية ارتفاعها يساوى دائماً $4/3$ نصف قطر قاعدتها :

(أ) فبأى سرعة يتزايد الحجم عندما يكون نصف قطر القاعدة يساوى 1 m . إذا كان نصف القطر هذا يتزايد بمعدل $1/8 \text{ cms}^{-1}$ ؟

(ب) وبأى سرعة يتزايد نصف القطر عندما يكون مساوياً مترين والحجم يتزايد بمعدل $10^4 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ؟

ليكن r نصف قطر القاعدة و h ارتفاع الكومة فى اللحظة t .

$$\text{بما أن } h = \frac{4}{3}r, \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{9}\pi r^3, \quad \text{ومن } \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

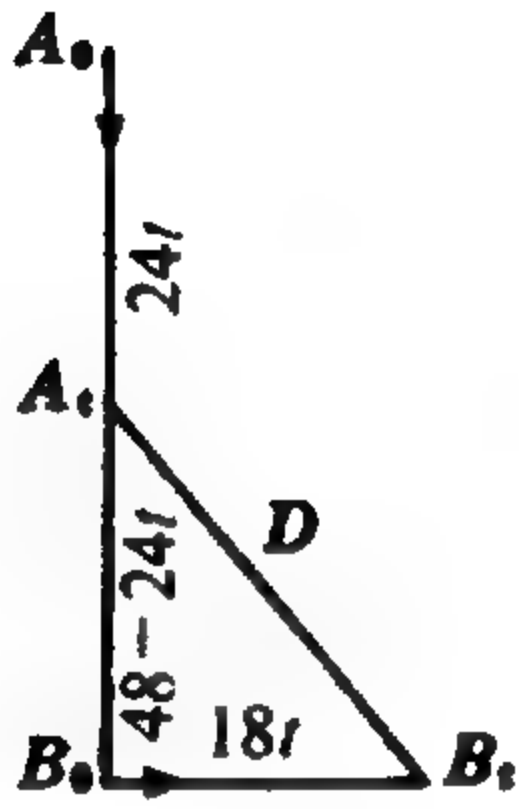
$$(1) \text{ فعندما } r = 100 \text{ و } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8} \text{ يكون } \frac{dV}{dt} = \frac{5000\pi}{3} \text{ cms}^{-1}$$

$$(2) \text{ فعندما } r = 200 \text{ و } \frac{dr}{dt} = 10000 \text{ يكون } \frac{dV}{dt} = \frac{3}{16\pi} \text{ cms}^{-1}$$

٤ - تبحر باخرة A نحو الجنوب بمعدل 24 km hr^{-1} فى حين تبحر باخرة أخرى B تقع على بعد 48 km جنوب A نحو الشرق بمعدل 18 km hr^{-1} .

(1) باى معدل تتقاربان أو تتباعدان بعد مضي ساعة واحدة ؟ (ب) بعد مضي ساعتين (ج) متى تكفان عن الاقتراب من بعضهما وما هى المسافة التى تفصلهما عندئذ ؟

ليكن A_0 و B_0 موضعى البدء للبائرتين ، A_t و B_t موضعيهما بعد $t \text{ hr}$ ولتكن D المسافة بينهما عندئذ .



$$\frac{dD}{dt} = \frac{900t - 1152}{D} \text{ و } D^2 = (48 - 24t)^2 + (18t)^2$$

(1) فعندما $t = 1$ تكون $D = 30$ و $dD/dt = -8.4$ و البائرتان تتقاربان بمعدل 8.4 km hr^{-1} .

(2) فعندما $t = 2$ تكون $D = 36$ و $dt/dD = 18$ و البائرتان تتباعدان بمعدل 18 kmhr^{-1} .

شكل ١١ - ٢

(ج) وتكف البائرتان عن الاقتراب من بعضهما عندما يكون $dD/dt = 0$ أى عندما $t = 1152/900 = 1.28 \text{ hr}$ وعندما تكون المسافة بينهما $D = 28.8 \text{ km}$.

٥ - يتمدد طولاً ضلعين متقابلين من مستطيل بمعدل 2 cms^{-1} بينما يتقلص طولاً الضلعين الآخرين بحيث يبق الشكل مستطيلاً بمساحة ثابتة A تساوى 50 cm^2 ماهو معدل تغير المحيط P عندما يكون طول كل من الضلعين المتمددين (1) 5 cm (2) 10 cm ، (ج) ما هما بعدا المستطيل عندما يكف المحيط عن التناقص ؟

ليكن x طول كل من الضلعين المتمددين فى اللحظة t و y طول كل من الضلعين المتقلصين فى اللحظة نفسها .

$$\text{عندئذ يكون } P = 2(x + y) \text{ و } \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \text{ و } A = xy = 50 \text{ و } x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} = 0.$$

(1) فعندما $x = 5$ و $y = 10$ ، $dx/dt = 2$ يكون :

$$5 \frac{dy}{dt} + 10(2) = 0 \text{ أو } \frac{dy}{dt} = -4 \text{ و } \frac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4 \text{ cms}^{-1} \text{ (و المحيط متناقص) .}$$

(2) فعندما $x = 10$ ، $y = 5$ ، $dx/dt = 2$ يكون :

$$10 \frac{dy}{dt} + 5(2) = 0 \text{ أو } \frac{dy}{dt} = -1 \text{ و } \frac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2 \text{ cms}^{-1} \text{ (و المحيط متزايد) .}$$

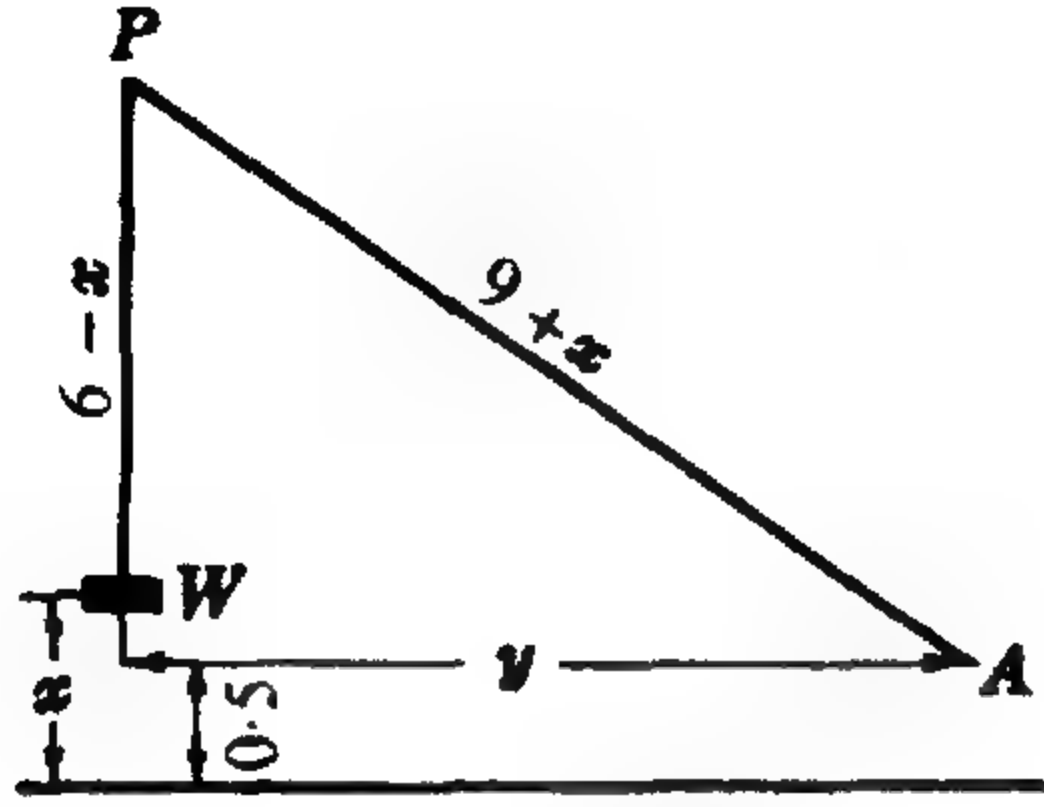
(ج) يكف المحيط عن التناقص عندما يكون $dP/dt = 0$ أى عندما $\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -2$ عندئذ :

$$x(-2) + y(2) = 0 \text{ والمستطيل هو مربع طول ضلعه } x = y = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

٦ - نصف قطر كرة فى اللحظة $t \text{ sec}$ يساوى $r \text{ cm}$. أوجد نصف القطر عندما يكون معدل ازدياد مساحة سطح الكرة ومعدل ازدياد نصف قطرها متساويين عددياً .

$$\text{مساحة سطح الكرة } S = 4\pi r^2 \text{ . إذن } \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

وعندما يكون $\frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$ فإن $\frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ ومنه نجد أن نصف القطر r يساوي $\frac{1}{8\pi}$ cm .



شكل ١١ - ٣

٧- ربط وزن W بطرف جبل طوله 15 m ويمر على بكرة P تعلو 6 m عن سطح الأرض . ربط الطرف الآخر للجبل بشاحنة عند النقطة A تعلو 0.5 m عن سطح الأرض كما هو مبين بالشكل ١١ - ٣ . فإذا تحركت الشاحنة بمعدل 3 ms^{-1} فبأية سرعة يرتفع الوزن عندما يكون هذا الوزن على ارتفاع 2 m فوق سطح الأرض .

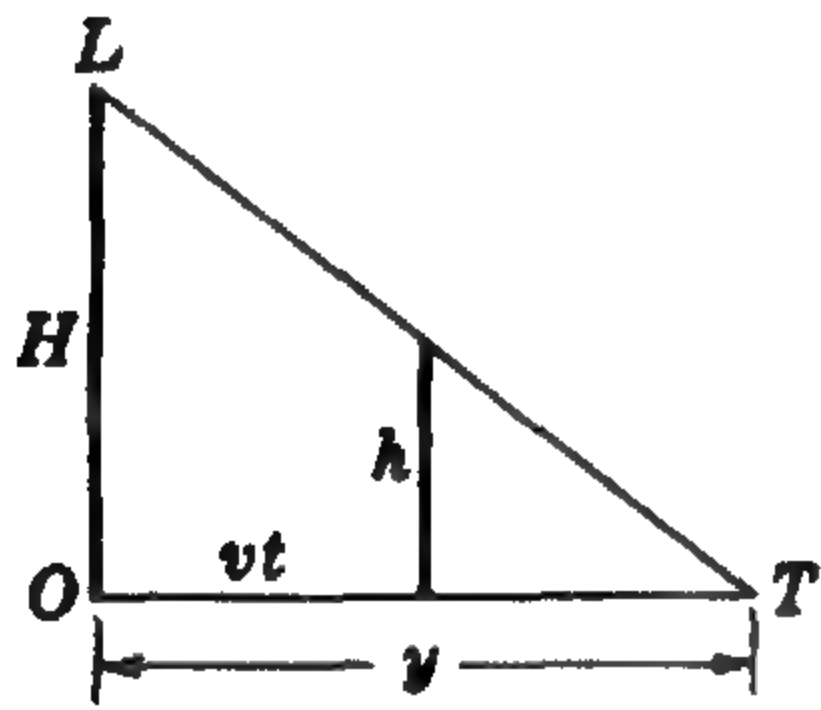
لنرمز بـ x لإرتفاع الوزن عن الأرض وللبعد الأفقي بين النقطة A حيث يرتبط الجبل بالشاحنة والخط الرأسى المار بالبكرة في اللحظة t بـ y .

والمطلوب هو إيجاد dx/dt عندما $x=2$ و $\frac{dy}{dt} = 3$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{9+x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} \quad , \quad y^2 = (9+x)^2 - (5.5)^2$$

فإنه عندما $x=2$ يكون $y=5.5\sqrt{3}$. وبالتالى $\frac{dy}{dt} = 3$. ومنه نجد $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ ms}^{-1}$.

٨- يعلق مصباح كهربائى L على ارتفاع H m فوق الشارع . وضع شيء طوله h m عند الموضع O تحت المصباح الضوئى مباشرة . فإذا تحرك هذا الشيء فى خط مستقيم على طول الشارع بمعدل $v \text{ ms}^{-1}$ فادرس السرعة V لرأس ظل هذا الشيء على الشارع بعد $t \text{ sec}$. أنظر الشكل ١١ - ٤



شكل ١١ - ٤

بعد $t \text{ sec}$ يكون الجسم قد تحرك مسافة قدرها vt . لنفرض y المسافة التى تفصل رأس الشكل عن O .

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{Hv}{H-h} = \frac{1}{1-h/H} v \quad \text{ومنه} \quad y = \frac{Hvt}{H-h} \quad \text{أو} \quad \frac{y-vt}{y} = \frac{h}{H}$$

إذن فسرعة رأس ظل الشيء متناسبة مع سرعة الشيء نفسه ويعتمد ثابت التناسب على النسبة h/H . وعندما $h \rightarrow 0$ نجد $V \rightarrow v$ بينما تزداد V بسرعة أكبر كثيراً عندما $h \rightarrow H$.

مسائل إضافية

٩- حوض على شكل متوازى مستطيلات طوله 2 m وعرضه 0.5 m وعمقه 1 m فإذا كان الماء ينساب فيه بمعدل $900 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ فبأية سرعة يرتفع سطح الماء عندما يكون عمق الماء 25 cm ؟ ج : 0.09 cms^{-1} .

١٠- ينصب ماء فى خزان على شكل اسطوانة رأسية نصف قطرها 2 m بمعدل $3600 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ فبأى سرعة يرتفع سطح الماء ؟ ج : $9/100 \pi \text{ cm s}^{-1}$.

١١- يمشى رجل طوله 1.5 m بمعدل 1.2 ms^{-1} مبتعداً بشكل مباشر عن ضوء الشارع الذى يعلو 6 m عن أرض الشارع (أ) بأى معدل يتغير رأس ظل الرجل ؟ (ب) بأى معدل يتغير طول الظل ؟

ج : (أ) 1.6 ms^{-1} . (ب) 0.4 ms^{-1} .

١٢ - يرتفع بالون رأسياً فوق نقطة A واقعة على الأرض بمعدل 5 ms^{-1} . فإذا كانت B نقطة أخرى على الأرض فى مستوى A وتبعد عنها 20 m فبأى معدل تتغير المسافة بين البالون والنقطة B عندما يكون البالون على بعد 15 m عن A .
ج : 3 ms^{-1} .

١٣ - يستند سلم طوله 5 m على جدار منزل. أوجد (أ) معدل حركة رأس السلم لأسفل إذا كان أسفل السلم على بعد 3 m من الجدار ويعتمد عنه بمعدل 0.5 ms^{-1} . (ب) معدل تناقص ميل السلم.
الجواب : (أ) $3/8 \text{ ms}^{-1}$. (ب) $25/12$ فى الثانية.

١٤ - ينساب ماء من خزان مخروطى نصف قطره 1 m وعمقه 3 m بمعدل $1800 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ فبأى سرعة يهبط سطح الماء عندما يكون عمق الماء مترين. وبأية سرعة يتناقص نصف قطر السطح؟
ج : $81/200\pi \text{ cms}^{-1}$ ، $9/200\pi \text{ cms}^{-1}$.

١٥ - ينخفض ظهر مركب عن مستوى الرصيف 5 m . فإذا سحب هذا المركب بواسطة حبل مربوط بظهره ومار بحلقة على الرصيف. فبأية سرعة يسحب الحبل عندما يكون المركب على بعد 12 m من الرصيف ويقرب منه بمعدل 0.25 ms^{-1} .
(يمل ارتخاء الحبل).
ج : $3/13 \text{ ms}^{-1}$.

١٦ - ترتفع طائرة ورقية يمسك بها صبي 50 m ، فإذا تحركت الطائرة أفقياً مبتعدة عن الصبي بمعدل 6 ms^{-1} . فبأية سرعة يزداد طول الخيط عندما تكون الطائرة على بعد 80 m عن الصبي.
ج : 7.5 ms^{-1} .

١٧ - ينطلق قطار فى الساعة 11 قبل الظهر متجهاً نحو الشرق بمعدل 75 km hr^{-1} فى حين ينطلق قطار آخر ظهراً من نفس الموضع متجهاً نحو الجنوب بمعدل 100 km hr^{-1} . فبأى سرعة يبتعدان عن بعضهما فى الساعة 3 بعد الظهر؟
ج : $87.5\sqrt{2} \text{ km hr}^{-1}$.

١٨ - يوجد مصباح كهربائى على رأس عمود ارتفاعه 28 m . فإذا أسقطت كرة من العلو نفسه ومن نقطة تبعد 7 m عن الضوء وإذا كانت الكرة تسقط وفق القانون $S = 4.9 t^2$ فبأية سرعة يتحرك ظل الكرة على الأرض بعد مضي ثانية واحدة؟
ج : 80 ms^{-1} .

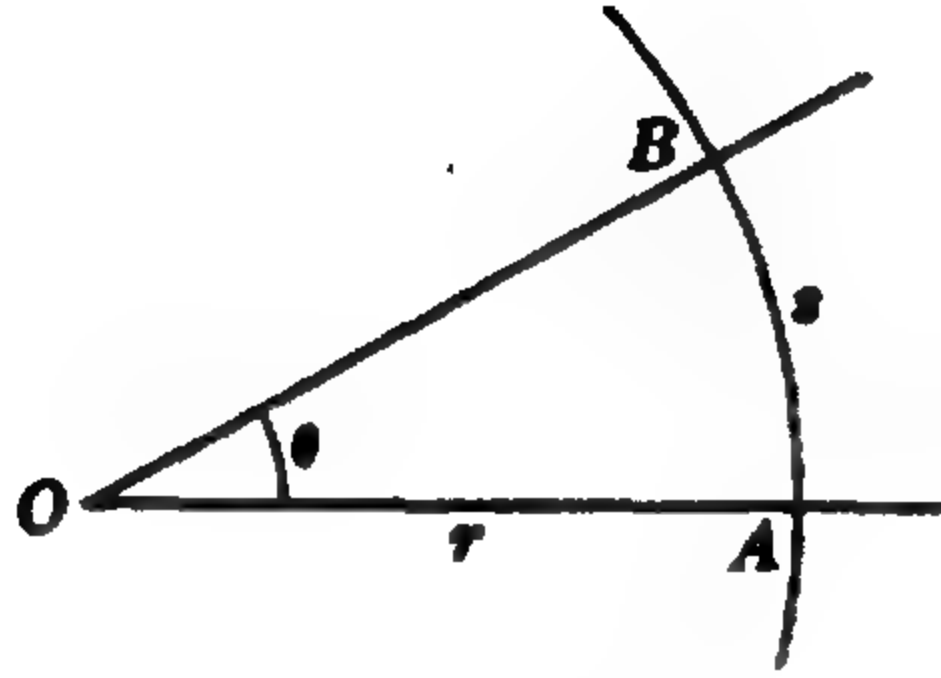
١٩ - تتحرك باخرة A تقع على الشرق من نقطة O ويفصلها عنها 21 km بمعدل 28 km hr^{-1} نحو الغرب فى حين تتحرك باخرة أخرى B تقع على الجنوب من O ويفصلها عنها 84 km بمعدل 21 km hr^{-1} نحو الشمال.
(أ) هل تتقارب الباخرتان أم تتباعدان بعد مضي ساعة واحدة وبأى معدل؟
(ب) يعاد السؤال ، بعد مضي ثلاث ساعات؟
(ج) متى تكونان أقرب ما يكون من بعضهما؟
ج : (أ) تتقاربان $161\sqrt{82} \text{ km hr}^{-1}$. (ب) تتباعدان $4.2\sqrt{10} \text{ km hr}^{-1}$.
(ج) 1 ساعة و 55 دقيقة.

٢٠ - يصب ماء بمعدل $4500 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ فى حوض يتسرب الماء منه وهو على شكل مخروط عمقه 4 m ونصف قطره العلوى 2 m لوحظ أنه عندما يكون عمق الماء 3 m يكون معدل ارتفاع سطح الماء 0.1 cms^{-1} فبأية سرعة يتسرب الماء من الحوض؟
ج : $(4500 - 562.5\pi) \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

٢١ - يرشح محلول من مصفاة مخروطية عمقها 60 cm وقطر قاعدتها 40 cm ، إلى وعاء اسطوانى قطره 30 cm . بأى معدل يرتفع مستوى المحلول فى الإسطوانة عندما يكون المحلول فى المصفاة على ارتفاع 30 cm ومعدل هبوط مستواه 2.5 cm/min .
ج : $10/9 \text{ cm/min}$.

الفصل الثاني عشر

اشتقاق الدوال المثلثية



شكل ١٢ - ١

المقياس الدائري : لنرمز بـ s لطول القوس AB المقابل للزاوية المركزية AOB لدائرة نصف قطرها r ، ولنرمز بـ S لمساحة القطاع AOB (إذا كانت s تساوى $1/360$ من محيط الدائرة فإن $AOB = 1^\circ$ وإذا كان $s = r$ فإن الزاوية AOB تساوى قطرى أى $AOB = 1 \text{ rad}$) .

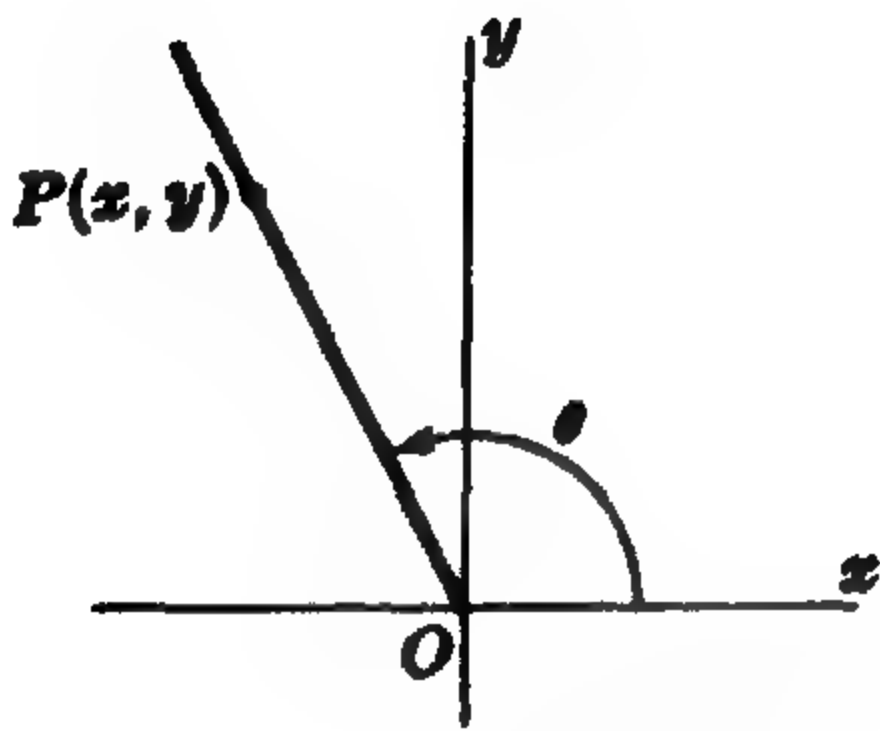
لنفرض الآن أن قياس AOB يساوى α درجة عندئذ :

$$S = \frac{\pi}{360} \alpha r^2 \text{ و } s = \frac{\pi}{180} \alpha r \quad (i)$$

ولنفرض بعد ذلك أن قياس AOB يساوى $\theta \text{ rad}$ عندئذ :

$$S = \frac{1}{2} \theta r^2 \text{ و } s = \theta r \quad (ii)$$

وبمقارنة (i) مع (ii) يتضح لنا فائدة استعمال المقياس القطرى .



شكل ١٢ - ٢

الدوال المثلثية : ليكن θ عدداً حقيقياً . ارسم الزاوية التى قياسها يساوى $\theta \text{ rad}$ بحيث يقع رأسها فى نقطة الأصل من مجموعة محاور إحداثية قائمة وبحيث ينطبق الضلع الأول (الإبتدائى) للزاوية على المحور x الموجب . لتكن $P(x, y)$ على الضلع الثانى (النهائى) للزاوية وعلى بعد يساوى وحدة المسافة عن O عندئذ يكون $\sin \theta = y$ و $\cos \theta = x$ إن حيز التعريف لكل من $\sin \theta$ و $\cos \theta$ هو فئة الأعداد الحقيقية أما مدى $\sin \theta$ فهو $-1 \leq y \leq 1$ ومدى $\cos \theta$ هو $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{ويتبع أن : } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ و } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

مدى كل من $\tan \theta$ و $\sec \theta$ هو فئة الأعداد الحقيقية فى حين يكون حيز التعريف ($\cos \theta \neq 0$) هو $\theta \neq \pm \frac{2n-1}{2} \pi$ و ($n = 1, 2, 3, \dots$) وتترك للقارئ كتمرين ، أن ينظر فى الدالتين $\cot \theta$ و $\csc \theta$ سبرهن فى المسألة ١ أن :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

(أما إذا قدرنا الزاوية بالدرجات فإن النهاية تكون $\pi/180$. ومن أجل هذا السبب يفضل فى حساب التفاضل والتكامل استعمال المقياس القطرى دائماً) .

قواعد الاشتقاق : لتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ :

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \quad ١٧$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx} \quad ١٤$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx} \quad ١٨$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx} \quad ١٥$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \quad ١٩$$

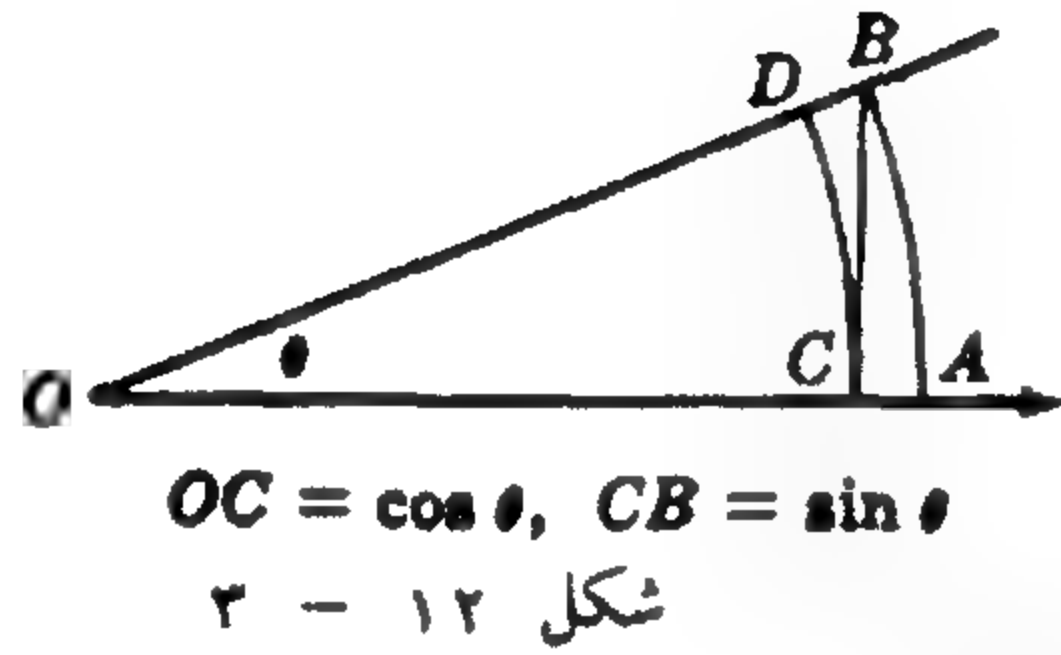
$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx} \quad ١٦$$

أنظر المسائل ٢ - ٢٢

مسائل محلولة

$$١ - \text{أثبت أن } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\text{بما أن } \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ فإننا نكتفي ببرهان } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$



في الشكل ١٢ - ٣ الزاوية $\theta = \angle AOB$ زاوية مركزية موجبة وصغيرة من دائرة نصف قطرها $OA = 1$. لنرمز بـ C لموقع العمود النازل من B على OA ولنرمز بـ D لتقاطع OB مع القوس الذي نصف قطره OC نلاحظ أن :

$$\text{القطاع } AOB = \text{المثلث } COB = \text{القطاع } COD$$

$$\frac{1}{2}\theta \cos^2 \theta \leq \frac{1}{2}\sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{2}\theta$$

وبالقسمة على $\frac{1}{2}\theta \cos \theta > 0$ نجد أن :

$$\cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

فإذا جعلنا $\theta \rightarrow 0^+$ نلاحظ أن $\cos \theta \rightarrow 1$ و $\frac{1}{\cos \theta} \rightarrow 1$ وأن $1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$ وبالتالي فإن

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

٢ - استنتج أن $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$ بفرض u دالة قابلة للاشتقاق في x .

$$y = \sin u \quad \text{ليكن}$$

$$y + \Delta y = \sin(u + \Delta u) \quad \text{عندئذ :}$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u = 2 \cos(u + \frac{1}{2}\Delta u) \sin \frac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos(u + \frac{1}{2}\Delta u) \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \cos(u + \frac{1}{2}\Delta u) \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u} = \cos u$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نجد أن : $\frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{du}(\sin u) \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = \frac{d}{dx}[\sin(\frac{1}{2}\pi - u)] = \frac{d}{du}[\sin(\frac{1}{2}\pi - u)] \frac{du}{dx} = -\cos(\frac{1}{2}\pi - u) \frac{du}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}. - ٣$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) = \frac{\cos u \cdot \cos u \frac{du}{dx} - \sin u \left(-\sin u \frac{du}{dx}\right)}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}. - ٤$$

أوجد المشتق الأول في المسائل ١٢ - ٥ .

$$y = \sin 3x + \cos 2x. \quad y' = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x \frac{d}{dx}(2x) = 3 \cos 3x - 2 \sin 2x. - ٥$$

$$y = \tan x^2. \quad y' = \sec^2 x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \sec^2 x^2. - ٦$$

$$y = \tan^2 x = (\tan x)^2. \quad y' = 2 \tan x \frac{d}{dx}(\tan x) = 2 \tan x \sec^2 x. - ٧$$

$$y = \cot(1 - 2x^2). \quad y' = -\csc^2(1 - 2x^2) \frac{d}{dx}(1 - 2x^2) = 4x \csc^2(1 - 2x^2). - ٨$$

$$y = \sec^2 \sqrt{x} = \sec^2 x^{1/2}. - ٩$$

$$y' = 3 \sec^2 x^{1/2} \frac{d}{dx}(\sec x^{1/2}) = 3 \sec^2 x^{1/2} \cdot \sec x^{1/2} \tan x^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \sec^3 \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$$

$$\rho = \sqrt{\csc 2\theta} = (\csc 2\theta)^{1/2}. - ١٠$$

$$\rho' = \frac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2} \frac{d}{d\theta}(\csc 2\theta) = -\frac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2} \cdot \csc 2\theta \cot 2\theta \cdot 2 = -\sqrt{\csc 2\theta} \cdot \cot 2\theta$$

$$f(x) = x^2 \sin x. \quad f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cos x + 2x \sin x. - ١١$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}. \quad f'(x) = \frac{x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}. - ١٢$$

أوجد المشتقة المشار إليها في المسائل ١٣ - ١٦

$$y = x \sin x; \quad y'''. \quad \begin{aligned} y' &= x \cos x + \sin x \\ y'' &= x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x \sin x + 2 \cos x \\ y''' &= -x \cos x - \sin x - 2 \sin x = -x \cos x - 3 \sin x \end{aligned} - ١٣$$

$$y = \tan^2(3x - 2); \quad y''. \quad \begin{aligned} y' &= 2 \tan(3x - 2) \sec^2(3x - 2) \cdot 3 = 6 \tan(3x - 2) \sec^2(3x - 2) \\ y'' &= 6[\tan(3x - 2) \cdot 2 \sec(3x - 2) \cdot \sec(3x - 2) \tan(3x - 2) \cdot 3 + \sec^2(3x - 2) \sec^2(3x - 2) \cdot 3] \\ &= 36 \tan^2(3x - 2) \sec^2(3x - 2) + 18 \sec^4(3x - 2) \end{aligned} - ١٤$$

$$y = \sin(x + y); \quad y'. \quad y' = \cos(x + y) \cdot (1 + y') \quad \text{and} \quad y' = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}. - ١٥$$

$$\sin y + \cos x = 1; \quad y''. - ١٦$$

$$\cos y \cdot y' - \sin x = 0 \quad \text{and} \quad y' = (\sin x)/(\cos y)$$

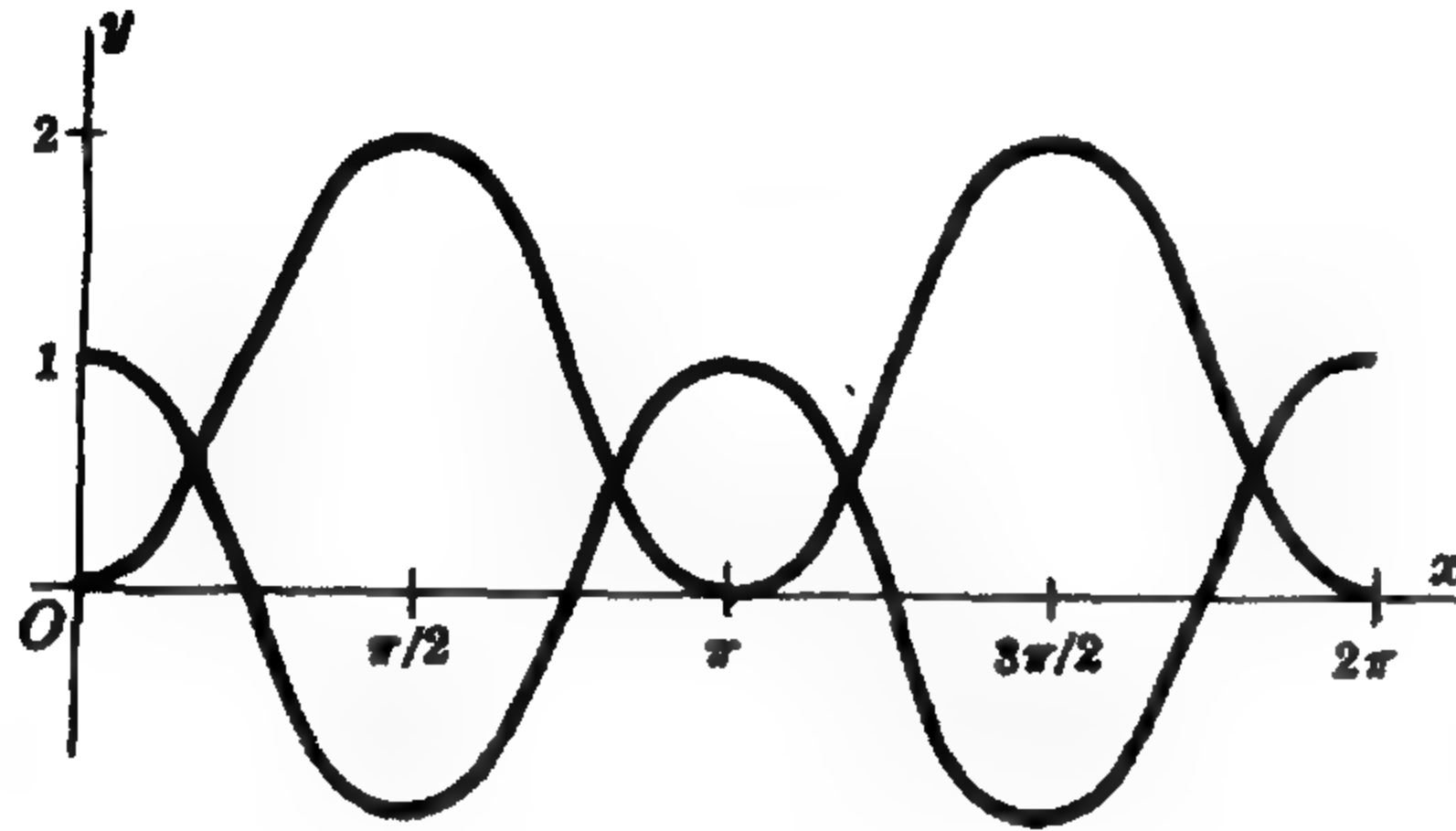
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\cos y \cos x - \sin x (-\sin y) \cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y \cdot y'}{\cos^2 y} \\ &= \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y (\sin x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos^2 y + \sin^2 x \sin y}{\cos^3 y} \end{aligned}$$

١٧- أوجد $f'(\pi/3)$, $f''(\pi/3)$, $f'''(\pi/3)$ بفرض أن $f(x) = \sin x \cos 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin x \sin 3x + \cos 3x \cos x \\ &= (\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) - 2 \sin x \sin 3x \\ &= \cos 4x - 2 \sin x \sin 3x. \end{aligned} \quad f'(\pi/3) = -\frac{1}{2} - 2(\sqrt{3}/2)(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \sin 4x - 2(3 \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x) \\ &= -4 \sin 4x - 2(\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x) - 4 \sin x \cos 3x \\ &= -6 \sin 4x - 4f(x). \end{aligned} \quad f''(\pi/3) = -6(-\sqrt{3}/2) - 4(\sqrt{3}/2)(-1) = 5\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -24 \cos 4x - 4f'(x). \quad f'''(\pi/3) = -24(-\frac{1}{2}) - 4(-\frac{1}{2}) = 14$$



شكل ١٢ - ٤

١٨- أوجد زاوية التقاطع الحادة للمنحنين (١) $y = 2 \sin^2 x$

(٢) $y = \cos 2x$ في الفترة $0 < x < 2\pi$.

(١) نحل المعادلة $2 \sin^2 x = \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

فنحصل على الإحداثيات السينية لنقط التقاطع $\pi/6$ و $5\pi/6$ و $7\pi/6$ و $11\pi/6$.

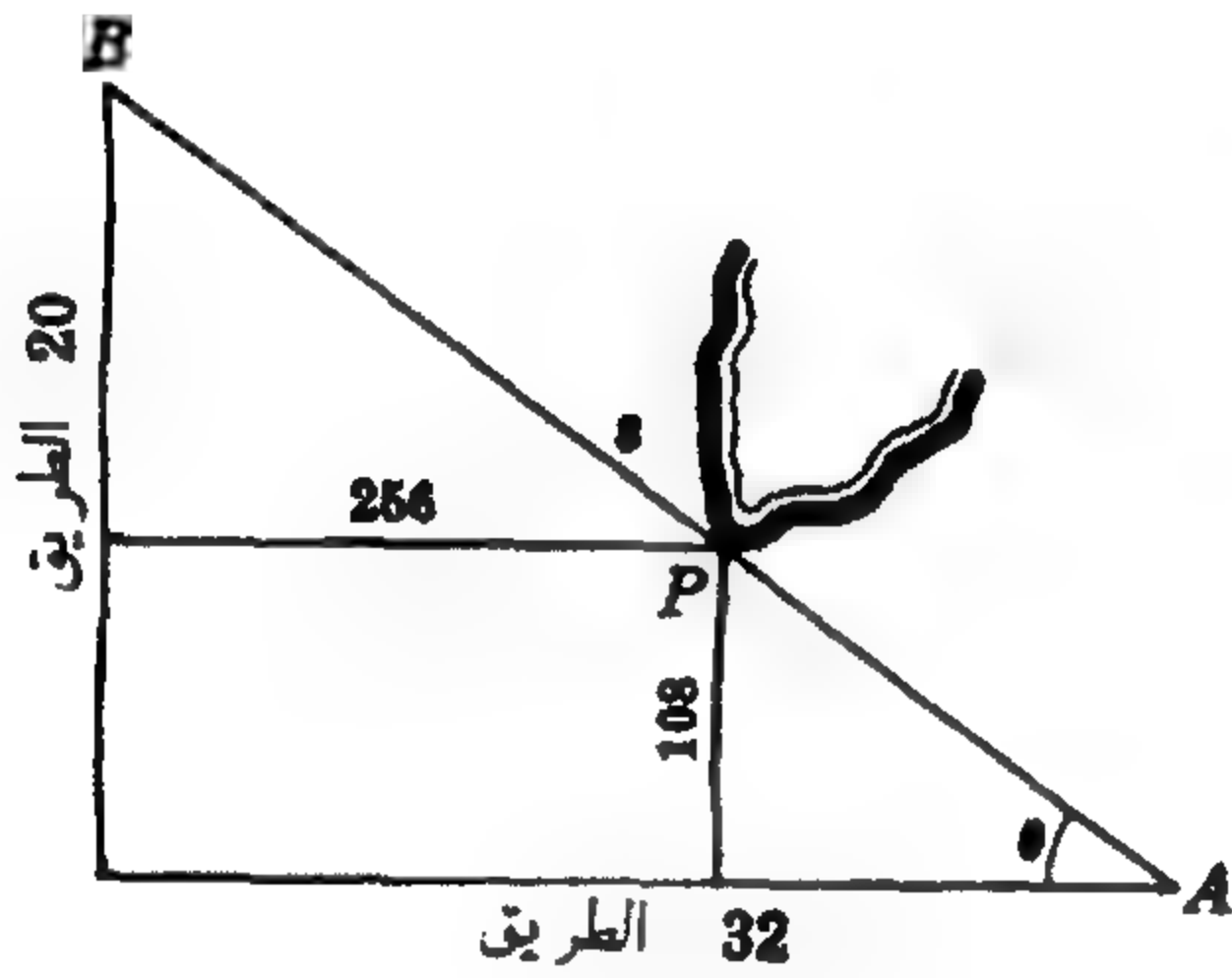
(ب) $y' = 4 \sin x \cos x$ للمنحنى (١)

و $y' = -2 \sin x$ للمنحنى (٢)

ويكون عند النقطة $\pi/6$ ، $m_1 = \sqrt{3}$ و $m_2 = -\sqrt{3}$

(ج) $\tan \phi = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$ وزاوية التقاطع الحادة تساوي 60° كذلك تكون زاوية

التقاطع الحادة عند كل من النقط المتبقية مساوية 60° .



شكل ١٢ - ٥

١٩- ضلعان متجاوران لقطعة أرض مستطيلة يمتدان على الطريقتين العموديتين

20 و 32. يوجد في قطعة الأرض بحيرة صغيرة يعتمد أحد أطرافها

عن الطريق 20 مسافة 256 m وعن الطريق 32 المسافة 256 m.

أوجد أقصر الطرق المستقيمة طولا الذي يقطع الأرض من أحد الطريقتين

العموديتين إلى الآخر بحيث يمر بذلك الطرف المشار إليه من البحيرة.

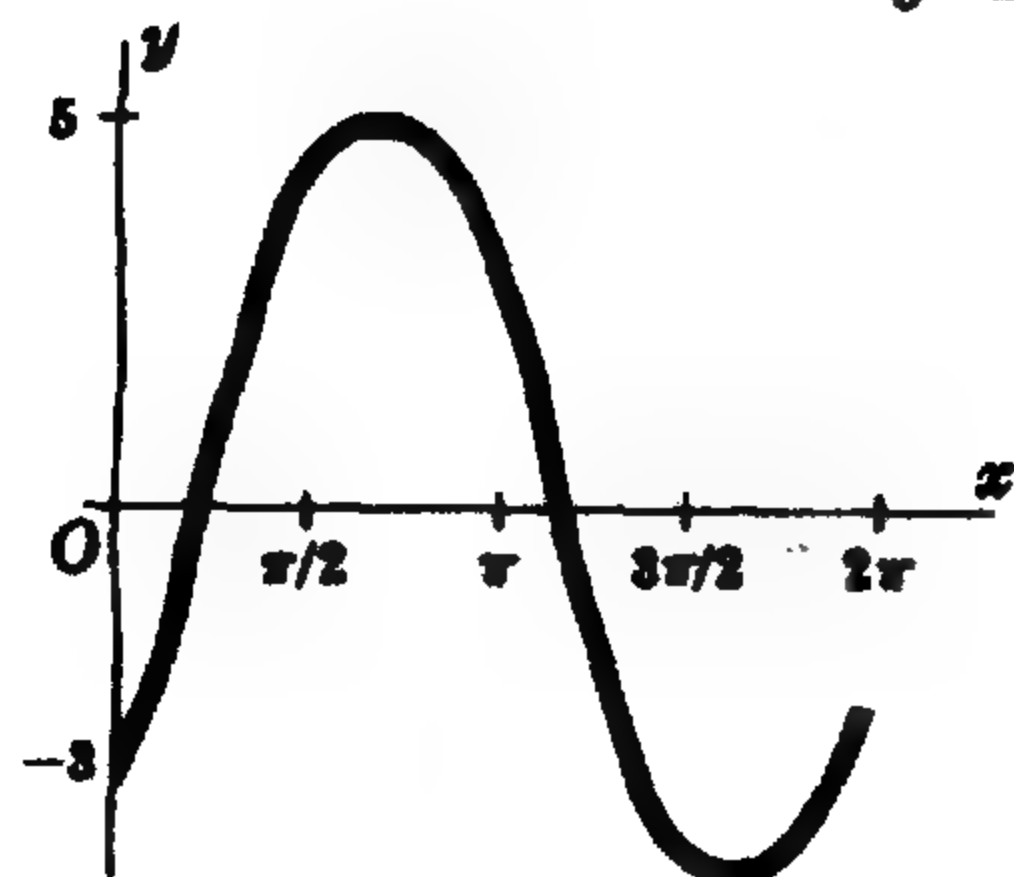
ليكن s طول الطريق المطلوب و θ الزاوية التي يصنعها مع الطريق

العام 32.

$$\begin{aligned} s &= AP + PB = 108 \csc \theta + 256 \sec \theta \\ ds/d\theta &= -108 \csc \theta \cot \theta + 256 \sec \theta \tan \theta \\ &= \frac{-108 \cos^3 \theta + 256 \sin^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad \text{ومن}$$

ومن $-108 \cos^3 \theta + 256 \sin^3 \theta = 0$ ، $\tan^3 \theta = 27/64$ ، والقيمة الحرجة هي $\theta = \arctan 3/4$

وبالتالي فإن $s = 108 \csc \theta + 256 \sec \theta = 108(5/3) + 256(5/4) = 500 \text{ m}$.



شكل ١٢ - ٦

٢٠- ادرس المنحنى $y = f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$ في الفترة $[0, 2\pi]$

عندما $x = 0$ تكون $y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$

وحيث أن $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$ فإذا وضعنا $f(x) = 0$

نجد أن $x = 3/4$ وأن المنحنى يقطع المحور x في $x = 0.64 \text{ rad}$

و $x = \pi + 0.64 = 3.78 \text{ rad}$ وإن $f'(x) = 4 \cos x + 3 \sin x$

فإذا وضعناه $f'(x) = 0$ نجد $\tan x = -4/3$

والقيم الحرجة هي $x = \pi - 0.93 = 2.21$ و $x = 2\pi - 0.93 = 5.35$

وأن $f''(x) = -4 \sin x + 3 \cos x$ فإذا وضعنا $f''(x) = 0$ نجد $\tan x = 3/4$

والتقط المرشحة لتكون نقط انعطاف هي $x = .64$ و $x = \pi + .64 = 3.78$.

وأن $f'''(x) = -4 \cos x - 3 \sin x$.

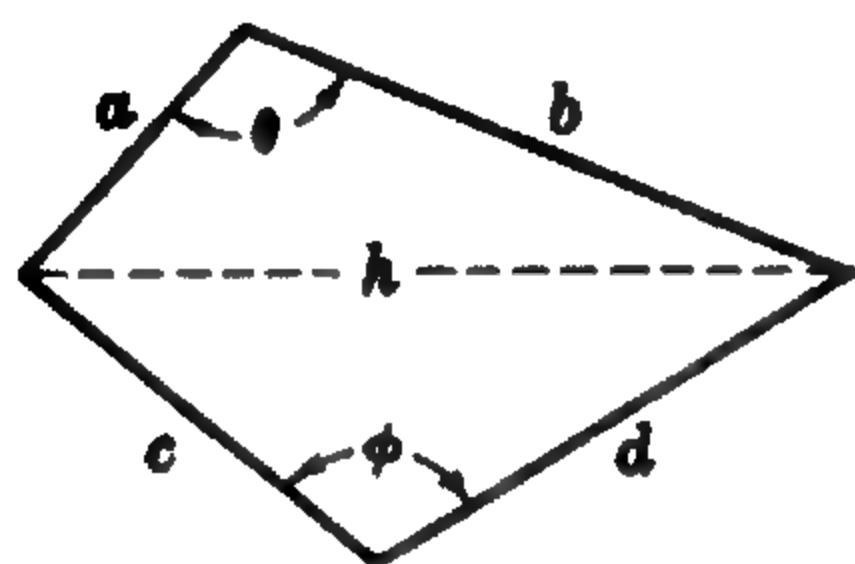
(أ) عندما $x = 2.21$ يكون $\sin x = 4/5$ و $\cos x = -3/5$ و $f''(x) < 0$ و $x = 2.21$ فهناك

قيمة عظمى نسبية $= 5$ ، وعندما $x = 5.35$ نجد قيمة صغرى نسبية $= -5$.

(ب) إن $f''(.64) \neq 0$ و $f''(3.78) \neq 0$ ونقطتي الانعطاف هما : $(.64, 0)$ و $(3.78, 0)$.

(ج) إن المنحنى مقعر لأعلى من $x = 0$ إلى $x = .64$ و مقعر لأسفل من $x = .64$ إلى $x = 3.78$ و مقعر لأعلى من

$x = 3.78$ إلى 2π .



شكل ١٢ - ٧

٢١- ترتبط أربعة قضبان ، أطوالها d, c, b, a مع بعضها لتكون شكلاً رباعياً .

بين أن المساحة A تكون أكبر ما يمكن عندما تكون الزاويتان المتقابلتان متكاملتين .

لنرمز بـ θ للزاوية بين القضيبين اللذين طوليهما b, a وبـ ϕ للزاوية المقابلة .

ولنرمز بـ h لطول القطر المقابل للزاويتين .

والمطلوب البحث عن القيمة العظمى لـ :

$$(١) \quad A = \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin \phi \quad \text{والمقيدة بالشرط}$$

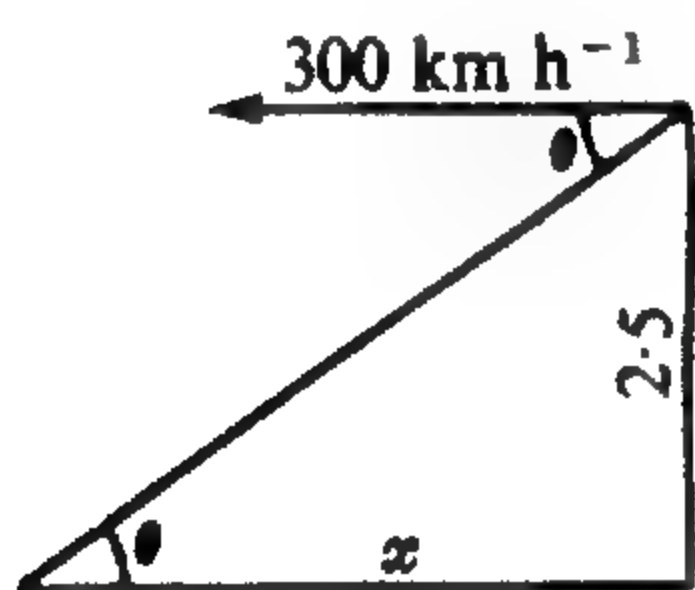
$$(٢) \quad h^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \phi. \quad \text{نجد :}$$

$$(١) \quad \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab \cos \theta + \frac{1}{2}cd \cos \phi \frac{d\phi}{d\theta} = 0 \quad (١) \quad \text{و} \quad \frac{dA}{d\phi} = \frac{1}{2}cd \cos \phi + \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{d\phi} = 0 \quad (٢)$$

ويحل (٢) بالنسبة لـ $d\phi/d\theta$ والتعويض في (١) نحصل على :

$$\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta = \sin(\phi + \theta) = 0 \quad \text{أو} \quad ab \cos \theta + cd \cos \phi \frac{ab \sin \theta}{cd \sin \phi} = 0$$

ومنه نجد $\phi + \theta$ مساوية للصفر أو π ولكن الحالة الأولى مرفوضة كما يتبين بسهولة .



شكل ١٢ - ٨

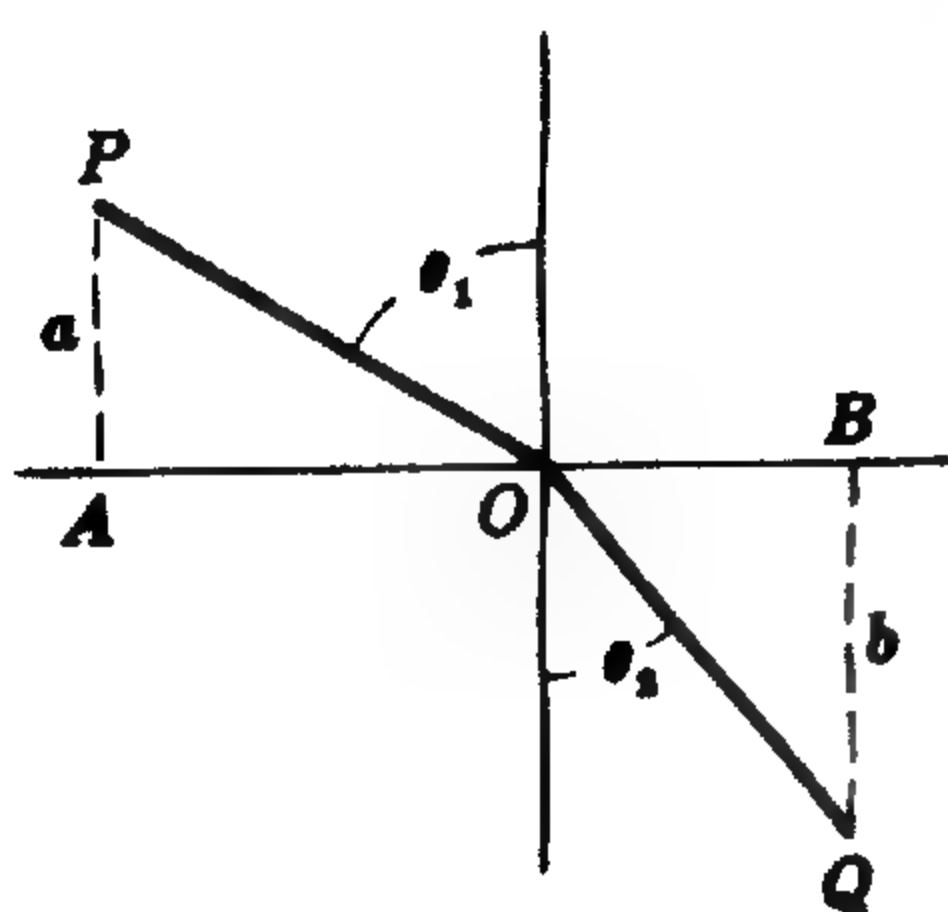
٢٢- قاذف للقنابل مسدد مباشرة نحو هدف على الأرض . فإذا كانت القذيفة تطير على علو

2.5 km فوق الأرض بمعدل 300 km/hr فبأية سرعة ينبغي أن ندير جهاز التسديد عندما

تكون الزاوية بين مسار القذيفة وخط التسديد تساوى 30° ؟

$$x = 2.5 \cot \theta \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = -300 \text{ km h}^{-1}, \theta = 30^\circ,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 30 \text{ rad/hr} = \frac{3}{2\pi} \text{ deg/sec.} \quad \text{و} \quad -300 = -2.5(4) \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{أو} \quad \frac{dx}{dt} = -2.5 \csc^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$



شكل ١٢ - ٩

٢٣- يسير شعاع ضوئي في الهواء بسرعة v_1 من نقطة P على علو a وحدة فوق سطح

جسم مائي إلى نقطة O على السطح ومن ثم يتابع سيره بسرعة v_2 إلى نقطة Q

تقطع على مسافة b وحدة أسفل السطح . فإذا كانت الزاويتان اللتان يصنعهما

OP و OQ مع العمود على السطح هما θ_1, θ_2 فبين أن المسار من P إلى Q

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{أصغر ما يمكن عندما تتحقق العلاقة}$$

لنرمز بـ t للفترة الزمنية اللازمة من P إلى Q وبـ c للمسافة من A إلى B

عندئذ يكون :

$$c = a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2 \quad \text{و} \quad t = \frac{a \sec \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2}{v_2}$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ θ_1 نجد :

$$0 = a \sec^2 \theta_1 + b \sec^2 \theta_2 \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad \text{و} \quad \frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \tan \theta_1}{v_1} + \frac{b \tan \theta_2 \sec \theta_2}{v_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2}$ ولكي تكون t أقصر ما يمكن يجب أن يكون :

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \tan \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2 \tan \theta_2}{v_2} \left(-\frac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2} \right) = 0$$

ومنه تنتج العلاقة المطلوبة .

مسائل إضافية

٢٤ - احسب القيم التالية (أ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$, (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, (ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x \sin^3 3x}$, (د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

الجواب : (أ) 2 (ب) a/b (ج) $8/9$ (د) 0 .

٢٥ - استنتج صيغة الاشتقاق (١٧) باستخدام (أ) $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$ و (ب) $\cot u = \frac{1}{\tan u}$. استنتج أيضاً صيغ الاشتقاق ١٨ و ١٩ .

في المسائل ٢٦ - ٤٥ : أوجد المشتقة dy/dx أو المشتقة $dp/d\theta$.

$6 \cos 2x$: ج	$y = 3 \sin 2x$ - ٢٦
$-2 \sin \frac{1}{2}x$: ج	$y = 4 \cos \frac{1}{2}x$ - ٢٧
$20 \sec^3 5x$: ج	$y = 4 \tan 5x$ - ٢٨
$-2 \csc^3 8x$: ج	$y = \frac{1}{2} \cot 8x$ - ٢٩
$3 \sec \frac{1}{3}x \tan \frac{1}{3}x$: ج	$y = 9 \sec \frac{1}{3}x$ - ٣٠
$y = -\csc 4x \cot 4x$: ج	$y = \frac{1}{4} \csc 4x$ - ٣١
$x \sin x + 2x + 4$: ج	$y = \sin x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$ - ٣٢
$(\cos \theta)/(2\sqrt{\sin \theta})$: ج	$\rho = \sqrt{\sin \theta}$ - ٣٣
$(-2 \cos 2/x)/x^3$: ج	$y = \sin 2/x$ - ٣٤
$2x \sin (1 - x^2)$: ج	$y = \cos (1 - x^2)$ - ٣٥
$y = 2(1 - x) \sin (1 - x)^2$: ج	$y = \cos (1 - x)^2$ - ٣٦
$3 \sin (6x - 4)$: ج	$y = \sin^2 (3x - 2)$ - ٣٧
$-\frac{1}{2} \{ \cos (6x - 9) - \cos (2x - 3) \}$: ج	$y = \sin^2 (2x - 3)$ - ٣٨
$\sin 2x$: ج	$y = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$ - ٣٩
$\frac{-3 \sec 2\theta \tan 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$: ج	$\rho = \frac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ - ٤٠
$2 \frac{\sec^3 2\theta - 4 \csc 4\theta}{(1 - \cot 2\theta)^2}$: ج	$\rho = \frac{\tan 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ - ٤١
$x^2 \cos x$: ج	$y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ - ٤٢
$\frac{2 \sin 2x}{\cos y}$: ج	$\sin y = \cos 2x$ - ٤٣
$\frac{2 \sec^2 2x}{3 \sin 3y}$: ج	$\cos 3y = \tan 2x$ - ٤٤
$\frac{\cos y - \cos (x + y)}{x \sin y + \cos (x + y)}$: ج	$x \cos y = \sin (x + y)$ - ٤٥

٤٦ - يفرض أن $x = A \sin kt + B \cos kt$ حيث A, B, k ثوابت بين أن $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ و $\frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n}x$.

٤٧ - بين أن : (أ) $y'' + 4y = 0$ إذا كان $y = 3 \sin(2x + 3)$

(ب) $y''' + y'' + y' + y = 0$ إذا كان $y = \sin x + 2 \cos x$.

٤٨ - ادرس وارسم في الفترة $0 \leq x < 2\pi$:

(أ) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ (ب) $y = \cos^2 x - \cos x$ (ج) $y = x - 2 \sin x$ (د) $y = 4 \cos^2 x - 3 \cos x$ (هـ)

(ب) $y = \cos^2 x - \cos x$ (د) $y = \sin x (1 + \cos x)$

الجواب :

(أ) قيمة عظمى عند $x = \pi/4$ و $5\pi/4$ وقيمة صغرى عند $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; ونقط انعطاف عند $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

(ب) قيمة عظمى عند $x = 0, \pi$ وقيمة صغرى عند $x = \pi/3, 5\pi/3$;

ونقط انعطاف عند $x = 32^\circ 32', 126^\circ 23', 283^\circ 37', 327^\circ 28'$

(ج) قيمة عظمى عند $x = 5\pi/3$ وقيمة صغرى عند $x = \pi/3$ ونقط انعطاف عند $x = 0, \pi$.

(د) قيمة عظمى عند $x = \pi/3$ وقيمة صغرى عند $x = 5\pi/3$ ونقط انعطاف عند $x = 0, \pi, 104^\circ 29', 255^\circ 31'$

(هـ) قيمة عظمى عند $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ وقيمة صغرى عند $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$;

ونقط انعطاف عند $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

٤٩ - إذا كانت زاوية ارتفاع الشمس 45° وإذا تناقصت هذه الزاوية بمعدل $1/4 \text{ rad/hr}$ فبأية سرعة يزداد طول

الظل الملقى على سطح الأرض لمود طوله 16 m .

ج : 8 m/hr .

٥٠ - تعلق طائرة ورقية 60 m عن الأرض وتحرك أفقياً بمعدل 5 m/sec فبأية نسبة يتناقص ميل المحيط عن الأفق

بفرض أن طول المحيط الخارجي 120 m .

الجواب : $1/48 \text{ rad/sec}$.

٥١ - منارة دائرة موضوعة على بعد 1200 m من شاطئ مستقيم. فإذا كانت هذه المنارة تدور بمعدل $4\pi \text{ rad/min}$

فبأية سرعة يمسح الشعاع الضوئي الشاطئ (أ) عند أقرب نقطة منه؟ (ب) عند النقطة التي تبعد 1600 m من النقطة الأقرب؟

ج : (أ) $80\pi \text{ m/s}$.

(ب) $2000\pi/9 \text{ m/s}$.

٥٢ - طولاً ضلعي مثلث 6 m و 8 m على الترتيب (T) بأية سرعة يزداد طول الضلع الثالث عندما تكون الزاوية

بين الضلعين المقروضين 60° وتزداد بمعدل 2° كل ثانية؟ (ب) بأية سرعة تزداد المساحة؟

ج : (أ) $2\pi/5\sqrt{39}$.

(ب) $2\pi/15 \text{ m}^2/\text{s}$.

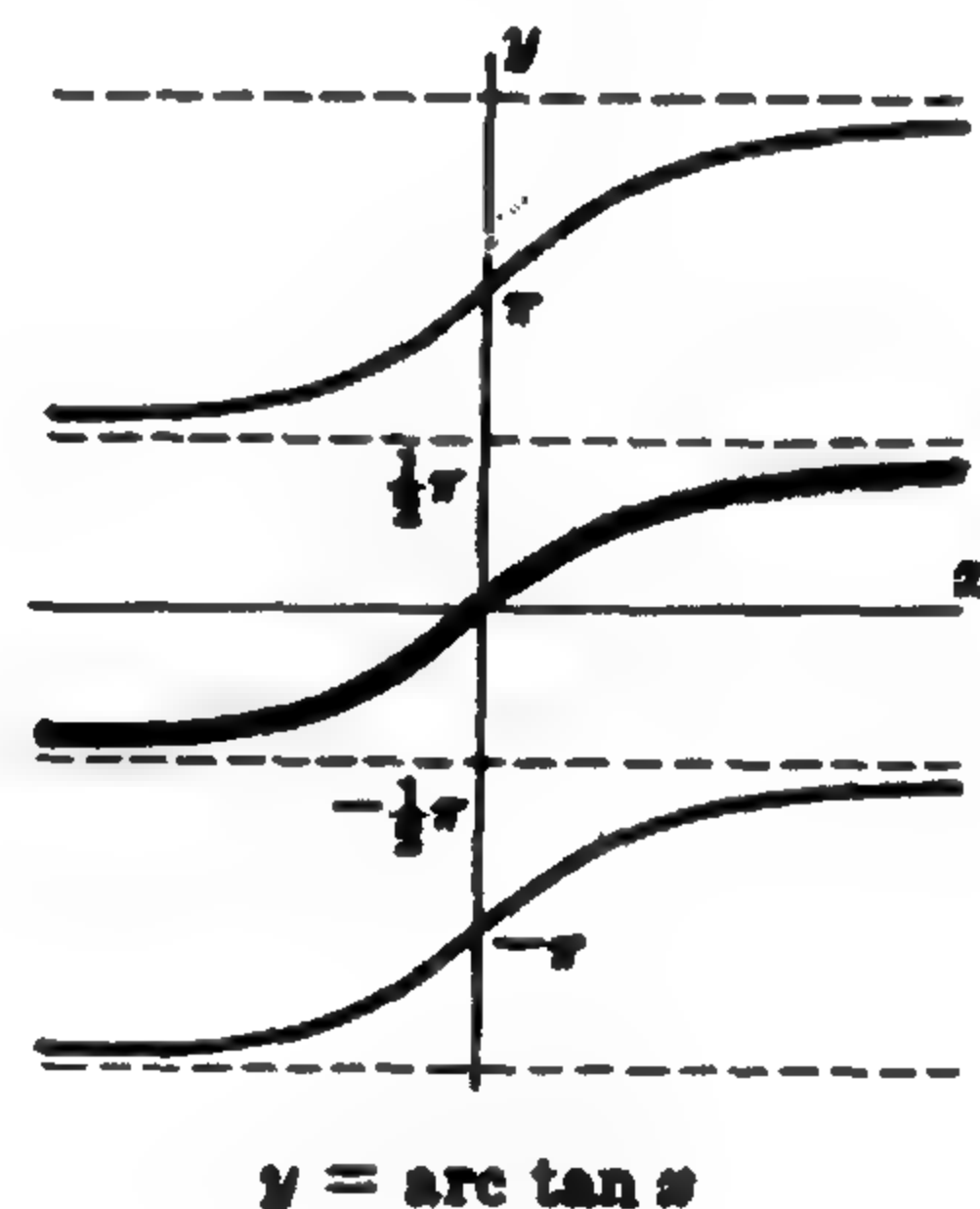
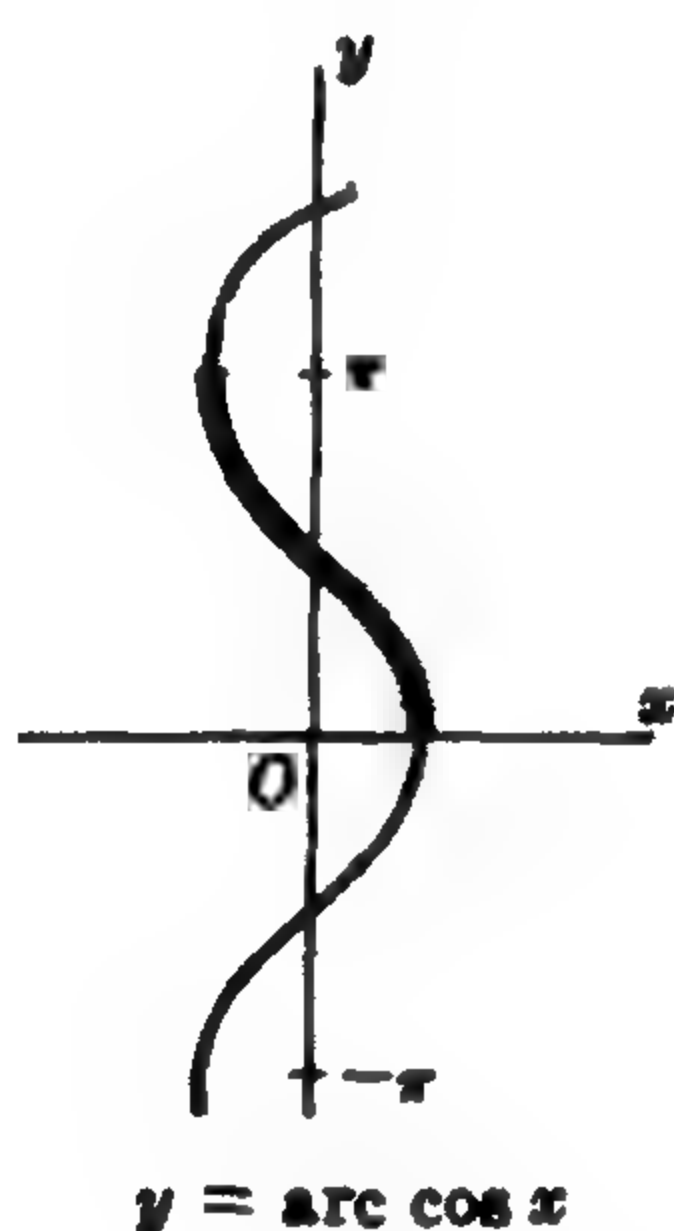
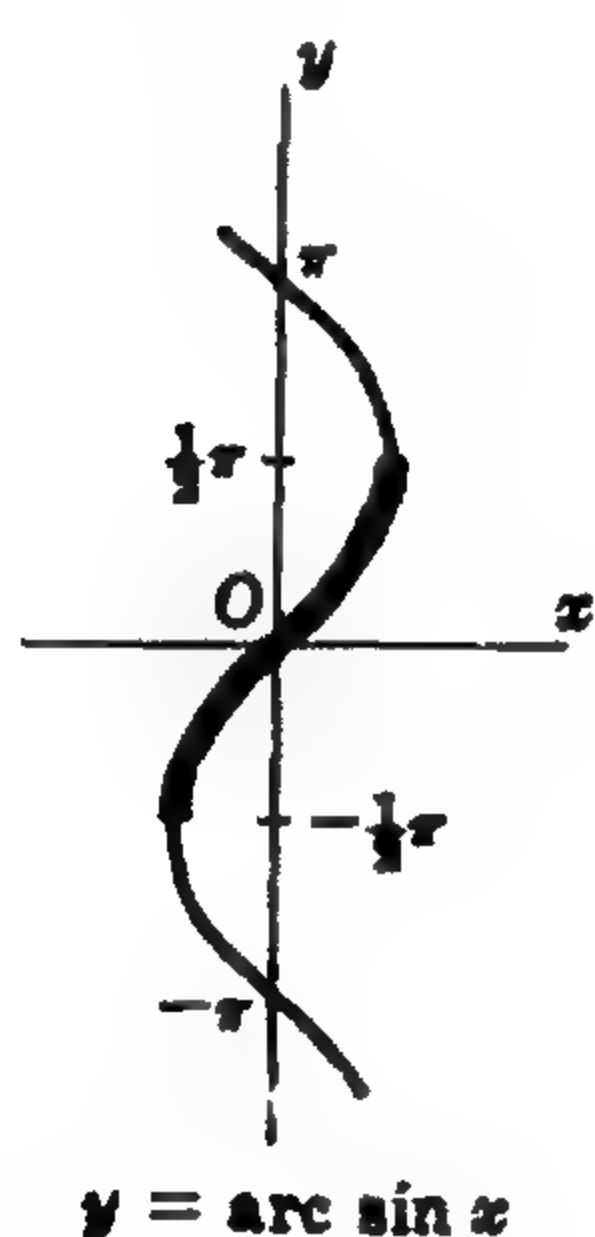
الفصل الثالث عشر

اشتقاق الدوال المثلثية العكسية

الدوال المثلثية العكسية :

إذا كانت $x = \sin y$ فإن الدالة العكسية تكتب بالشكل $y = \arcsin x$. حيز التعريف لـ $\arcsin x$ هو $-1 \leq x \leq 1$ ومدى $\sin y$ أو $\arcsin x$ هو فئة الأعداد الحقيقية وهو حيز التعريف لـ $\sin y$. ويمكن بشكل مماثل الحصول على غير التعريف وعلى مدى كل من الدوال المثلثية العكسية الأخرى.

إن الدوال المثلثية العكسية متعددة القيم. ومن المتفق عليه أن يقسم المنحنى إلى أقواس وحيدة القيم. نعرف فيما يلي قوساً من هذا النوع (يسمى الفرع الرئيسي) لكل دالة. ولقد ميزنا في المنحنيات المرافقة الفرع الرئيسي بخط أسود عريض.



شكل ١٣ - ١

الفرع الرئيسي

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\pi &\leq y \leq \frac{1}{2}\pi \\ 0 &\leq y \leq \pi \\ -\frac{1}{2}\pi &< y < \frac{1}{2}\pi \\ 0 &< y < \pi \\ -\pi &\leq y < -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leq y < \frac{1}{2}\pi \\ -\pi &< y \leq -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 < y \leq \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

الدالة

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ y &= \arccos x \\ y &= \arctan x \\ y &= \operatorname{arccot} x \\ y &= \operatorname{arcsec} x \\ y &= \operatorname{arccsc} x \end{aligned}$$

قواعد الاشتقاق : لتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ يكون :

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad ٢٣ \quad \frac{d}{dx} (\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad ٢٠$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad ٢٤ \quad \frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad ٢٥$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad ٢٥ \quad \frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad ٢٦$$

مسائل محلولة

١ - استتج (١) $\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ (ب) $\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

(١) ليكن $y = \arcsin u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ يكون $u = \sin y$ ومنه

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dy}(\sin y) \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-u^2} \frac{dy}{dx}$$

لقد اخترنا الإشارة الموجبة لأن $\cos y \geq 0$ في الفترة $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ وهكذا نجد $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

(ب) ليكن $y = \arccos u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ يكون $u = \cos y$ ومنه

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dy}(\cos y) \frac{dy}{dx} = -\sin y \frac{dy}{dx} = -u\sqrt{1-u^2} \frac{dy}{dx}$$

لقد اخترنا الإشارة الموجبة لأن $\tan y \geq 0$ في الفترتين $0 \leq y < \frac{1}{2}\pi$ و $-\pi \leq y < -\frac{1}{2}\pi$ وهكذا نجد .

$$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

أوجد المشتقة الأولى - في كل من المسائل ٢ - ٩ :

$$y = \arcsin(2x-3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}} \quad - ٢$$

$$y = \arccos x^2 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad - ٣$$

$$y = \arctan 3x^2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x^2)^2} \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4} \quad - ٤$$

$$f(x) = \operatorname{arccot} \frac{1+x}{1-x} \quad - ٥$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \quad - ٦$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot \frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y = x \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} \quad - ٧$$

$$y' = x \left[\frac{-1}{\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \right] + \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan x\right) \quad - ٨$$

$$y' = \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \tan x\right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \tan x\right) = \frac{1}{ab} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 x} \cdot \frac{b}{a} \sec^2 x$$

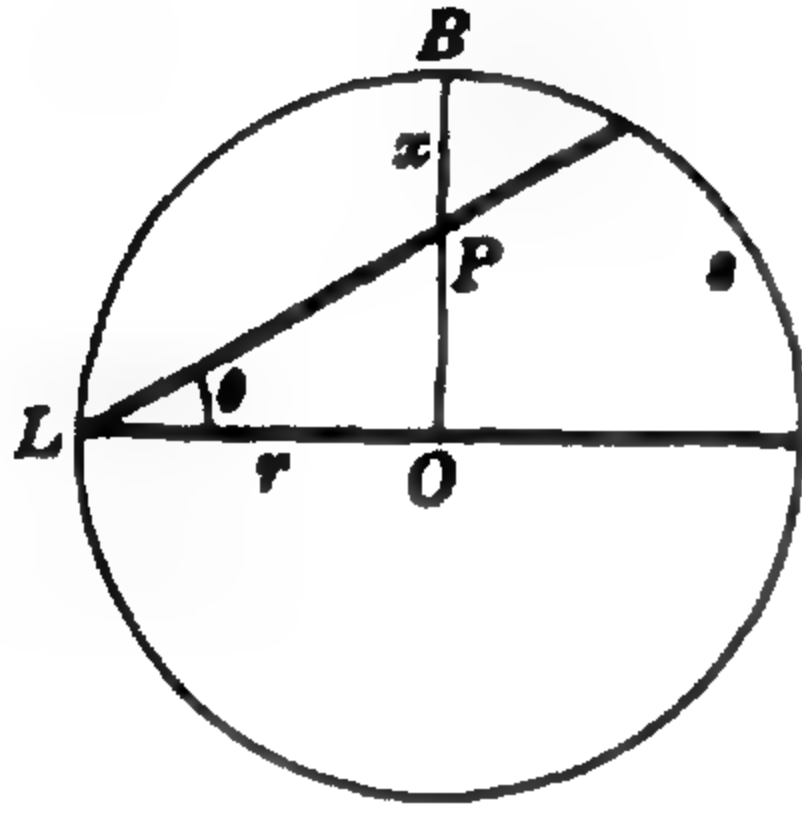
$$= \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} = \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$y^2 \sin x + y = \arctan x$$

$$2yy' \sin x + y^2 \cos x + y' = \frac{1}{1+x^2} \quad - ٩$$

$$y'(2y \sin x + 1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2 \cos x \quad \therefore y' = \frac{1 - (1+x^2)y^2 \cos x}{(1+x^2)(2y \sin x + 1)}$$

١٠ - في النقطة L من ميدان سباق دائري يوجد منبع ضوئي . لنفرض أن صبيا انطلق من B راكضا بمعدل 3 ms^{-1} متجها نحو المركز O . فبأي معدل يتحرك ظله على محيط الميدان وذلك عندما يكون الصبي في منتصف المسافة من B إلى O ؟



لتكن P التي تبعد عن B بمقدار $x \text{ m}$ ، موضع الصبي في اللحظة t ولنرمز بـ r لنصف قطر الميدان وبـ θ للزاوية OLP وبـ S للقوس الدائري الذي تحدده θ عندئذ

شكل ١٣ - ٢

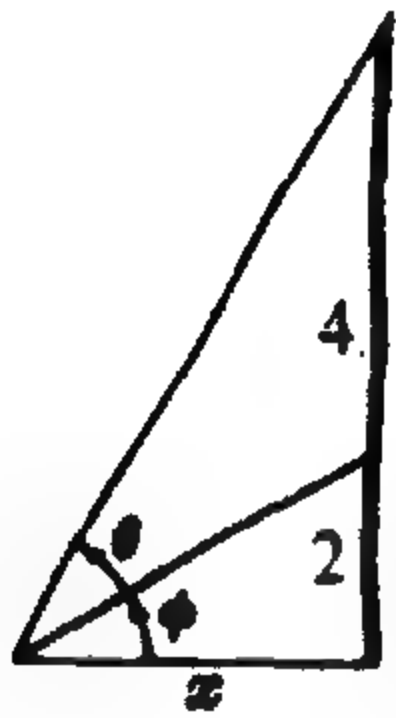
$$\theta = \arctan OP/LO = \arctan (r-x)/r. \quad \text{و} \quad s = r(2\theta)$$

$$\frac{ds}{dt} = 2r \frac{d\theta}{dt} = 2r \cdot \frac{1}{1 + [(r-x)/r]^2} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2}{x^2 - 2rx + 2r^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = \frac{1}{2}r$ و $dx/dt = 3$ نجد $ds/dt = -4.8 \text{ ms}^{-1}$.

والظل يتحرك على جدار الميدان بمعدل 4.8 ms^{-1} .

١١ - يرتفع الطرف الأسفل لصورة عن الأرض 4 m ويعلو عن عيني مشاهد 2 m فإذا قلنا أنه يمكن الحصول على أفضل مشهد عندما تكون الزاوية التي يرى المشاهد من خلالها الصورة أكبر ما يمكن ، فأوجد على أي بعد من الجدار ينبغي أن يقف المشاهد ؟



لنرمز بـ θ للزاوية التي يرى المشاهد من خلالها الصورة وبـ x لبعده عن الجدار . من

الشكل ١٣ - ٢ نجد $\tan \phi = 2/x$ و $\tan(\theta + \phi) = 6/x$.

$$\tan \theta = \tan \{(\theta + \phi) - \phi\} = \frac{\tan(\theta + \phi) - \tan \phi}{1 + \tan(\theta + \phi) \tan \phi} = \frac{6/x - 2/x}{1 + (6/x)(2/x)} = \frac{4x}{x^2 + 12}$$

ومن $\theta = \arctan \frac{4x}{x^2 + 12}$ وبالتالي $\frac{d\theta}{dx} = \frac{4(-x^2 + 12)}{x^4 + 40x^2 + 144}$ والقيمة الحرجة شكل ١٣ - ٢

هي $x = 2\sqrt{3} = 3.5$ وهكذا نجد أن على المشاهد أن يقف على بعد 3.5 m من الجدار .

مسائل إضافية

١٢ - استنتج صيغة الاشتقاق ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٥

أوجد dy/dx في كل من المسائل ١٣ - ٢٠

$$١٣ - y = \arcsin 3x \quad : \text{ج} \quad y = x^2 \arccos 2/x - ١٧ \quad \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \quad : \text{ج} \quad y = x^2 \arccos \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad 2x$$

$$١٤ - y = \arccos \frac{1}{3}x \quad : \text{ج} \quad y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} - ١٨ \quad - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad : \text{ج} \quad y = \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}} \quad : \text{ج}$$

$$١٥ - y = \arctan 3/x \quad : \text{ج} \quad y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} - ١٩ \quad - \frac{3}{x^2+9} \quad : \text{ج} \quad y = 2\sqrt{2ax-x^2}$$

$$١٦ - y = \arcsin (x-1) \quad : \text{ج} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - ٢٠ \quad \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \quad : \text{ج} \quad y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{2} - ٢٠ \quad \frac{8}{x^2\sqrt{x^2-4}} \quad : \text{ج}$$

٢١ - يراد وضع منبع ضوئي فوق المركز مباشرة لقطعة أرض دائرية الشكل نصف قطرها 10 m على أن يكون ارتفاع المنبع من المركز بحيث تكون شدة الإضاءة على حواف القطعة أكبر ما يمكن . أوجد هذا الارتفاع بفرض أن شدة الإضاءة عند أي نقطة من الحواف تتناسب طرديا مع جيب تمام زاوية السقوط (الزاوية بين شعاع الضوء والعمود) وعكسيا مع مربع البعد عن المنبع .

إرشاد : لنفرض x الارتفاع المطلوب ، ولنرمز بـ y لبعد المنبع عن نقطة من الحواف وبـ θ لزاوية

$$\text{السقوط عندئذ يكون} \quad I = k \frac{\cos \theta}{y^2} = \frac{kx}{(x^2+100)^{3/2}} \quad : \text{ج} \quad 5\sqrt{2} \text{ m}$$

٢٢ - تبدأ باخترتان في الإبحار من نقطة A في آن واحد ، غير أن واحدة منها تبحر نحو الجنوب بمعدل 24 km hr^{-1} في حين تبحر الثانية نحو الشرق بمعدل 40 km hr^{-1} لمدة ساعة واحدة ثم تدور نحو الشمال . أوجد سرعة دوران المستقيم الذي يصل بين الباخرتين وذلك بعد مضي 3 hr . ج : $30/193 \text{ rad/hr}$.

الفصل الرابع عشر

اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

يعرف العدد e كما يلي :

$$e = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{1/k}$$

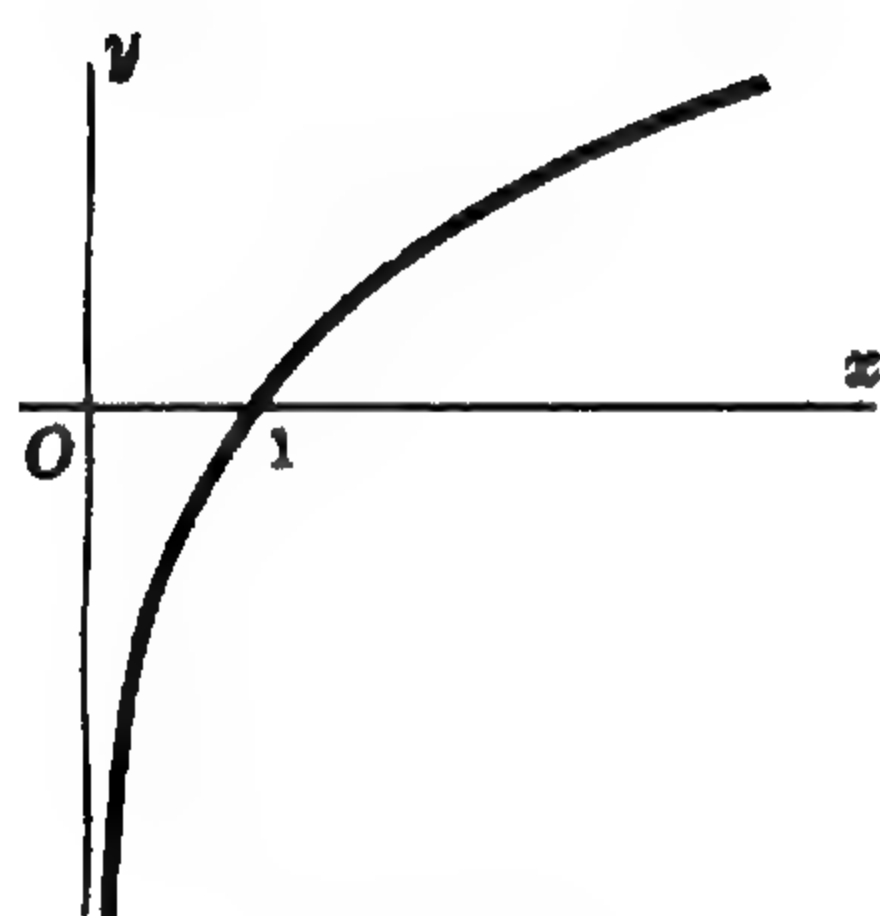
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.718\ 28\ldots$$

انظر المألة ١

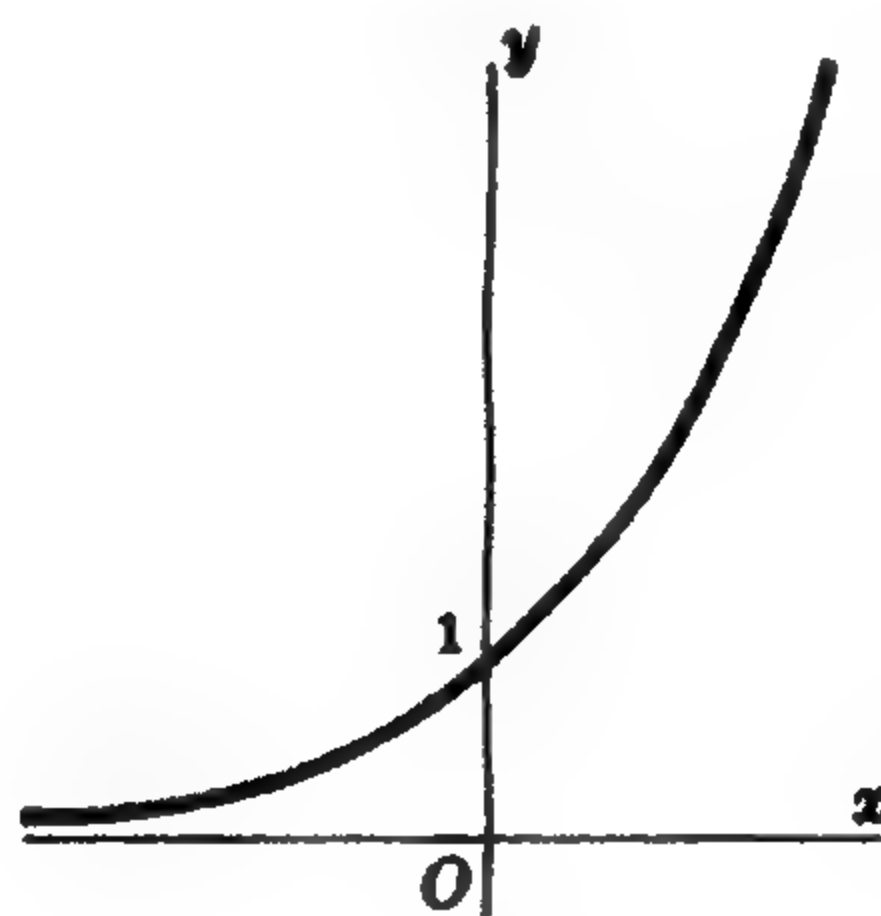
ملاحظة : إذا كان $a > 0$ و $a \neq 1$ وإذا كان $a^y = x$ فإن $y = \log_a x$.

$$y = \log_e x = \ln x \quad y = \log_{10} x = \log x$$

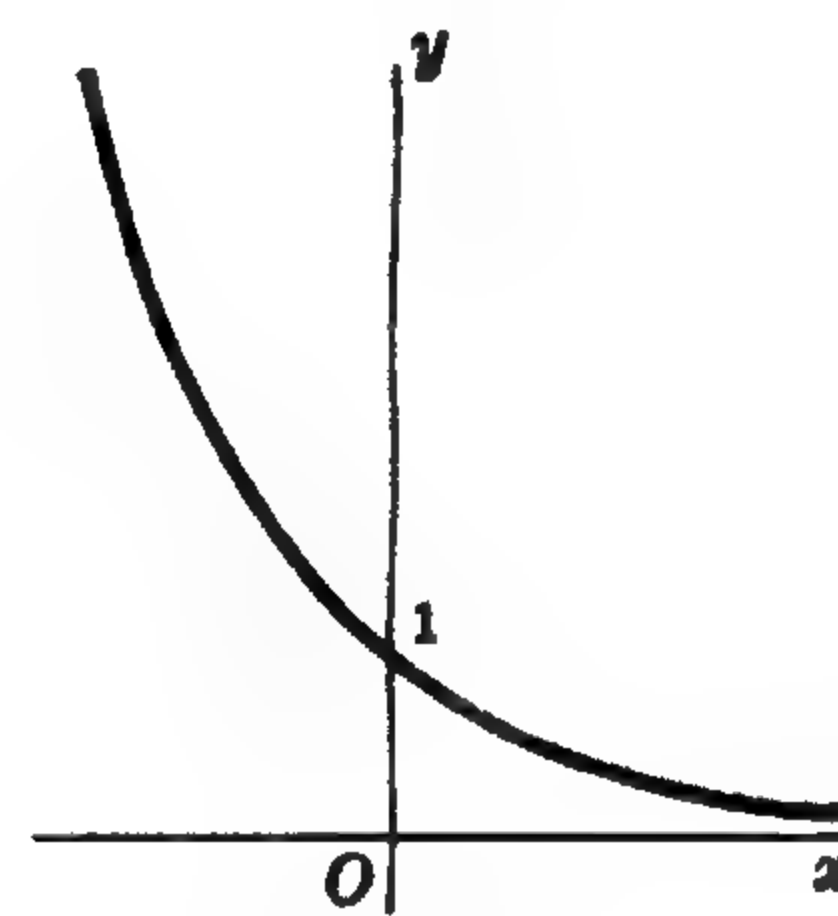
إن حيز التعريف $x \geq 0$ وأما المدى فهو فئة الأعداد الحقيقية .



$y = \ln x$



$y = e^x$



$y = e^{-x}$

شكل ١٤ - ١

قواعد الاشتقاق : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن :

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}, (a > 0) - ٢٨ \quad \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}, (a > 0, a \neq 1) - ٢٦$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx} - ٢٩$$

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - ٢٧$$

انظر المسائل ٢ - ١٧

الاشتقاق اللوغاريتمى : إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق $y = f(x)$ مكونة من حاصل ضرب عدة عوامل فإنه يمكن تبسيط طريقة اشتقاقها ، وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للدالة قبل الاشتقاق ، أى اننا ، بعبارة مكافئة ، نستعمل الصيغة :

$$\frac{d}{dx}(y) = y \frac{d}{dx}(\ln y) \quad - ٣٠$$

انظر المسائل ١٨ - ١٩

مسائل محلولة

$$١ - \text{نحقق من كون } 2 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

باستخدام نظرية ذات الحدين ، عندما n عدد صحيح موجب نجد :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{3!} \\ &\quad + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned} \quad (i)$$

ومن يتضح أنه لجميع قيم $n \neq 1$ فإن $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ كذلك إذا استبدلنا فى (i) كل فرق من $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots$ العدد 1 الذى يكبره فإننا نجد :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \left(\text{لأن } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &< 3 \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 \text{ لأن } \dots \right) \end{aligned}$$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad \text{وبالتالى فإن}$$

فإذا جعلنا الآن $n \rightarrow \infty$ على القيم الصحيحة الموجبة فإنه يكون :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \rightarrow \frac{1}{k!} \quad , \quad 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1, \quad 1 - \frac{2}{n} \rightarrow 1, \quad \dots,$$

ويترتب على هذه النتيجة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots = 2.718 \, 28 \dots$$

$$٢ - \text{امنتج } \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx} (\log_e u) = \frac{1}{u} \log_e e \frac{du}{dx}$$

لتكن $y = \log_a u$ ، حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ يكون :

$$y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u = \log_a \frac{u + \Delta u}{u} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right) = \frac{1}{u} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u} \log_a \left\{ \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u} \right\} = \frac{1}{u} \log_a e$$

$$\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{d}{du} (\log_a u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}.$$

وهكذا نجد ، باستخدام قاعدة السلسلة :

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}.$$

فإذا كان $a = e$ يكون $\log_a e = \log_e e = 1$ وبالتالي

$$y = \log_a (3x^2 - 5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 - 5} \log_a e \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 - 5) = \frac{6x}{3x^2 - 5} \log_a e \quad - \text{٢}$$

$$y = \ln (x+3)^2 = 2 \ln (x+3) \quad \frac{dy}{dx} = 2 \frac{1}{x+3} \cdot \frac{d}{dx} (x+3) = \frac{2}{x+3} \quad - \text{٤}$$

$$y = \ln^2 (x+3) \quad - \text{٥}$$

$$y' = 2 \ln (x+3) \cdot \frac{d}{dx} [\ln (x+3)] = 2 \ln (x+3) \cdot \frac{1}{x+3} \cdot \frac{d}{dx} (x+3) = \frac{2 \ln (x+3)}{x+3}$$

$$y = \ln (x^2 + 2)(x^2 + 3) = \ln (x^2 + 2) + \ln (x^2 + 3) \quad - \text{٦}$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 2) + \frac{1}{x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 3) = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$f(x) = \ln \frac{x^4}{(3x-4)^2} = \ln x^4 - \ln (3x-4)^2 = 4 \ln x - 2 \ln (3x-4) \quad - \text{٧}$$

$$f'(x) = 4 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x) - 2 \frac{1}{3x-4} \frac{d}{dx} (3x-4) = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x-4}$$

$$y = \ln \sin 3x \quad y' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{d}{dx} (\sin 3x) = 3 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = 3 \cot 3x \quad - \text{٨}$$

$$y = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \quad - \text{٩}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)}{x + (1+x^2)^{1/2}} = \frac{1 + x(1+x^2)^{-1/2}}{x + (1+x^2)^{1/2}} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \frac{du}{dx} \quad - \text{١٠}$$

ليكن $y = a^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x . عندئذ يكون $\ln y = u \ln a$

$$\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}.$$

فإذا كان $a = e$ يكون $\ln a = \ln e = 1$ وبالتالي نجد

$$y = e^{-1/2x} \quad y' = e^{-1/2x} \frac{d}{dx} (-\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2} e^{-1/2x} \quad - \text{١١}$$

$$y = e^{x^2} \quad y' = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2) = 2xe^{x^2} \quad - \text{١٢}$$

$$y = a^{3x^2} \quad y' = a^{3x^2} \ln a \cdot \frac{d}{dx}(3x^2) = 6xa^{3x^2} \ln a \quad - ١٣$$

$$y = x^3 3^x \quad y' = x^3 \cdot \frac{d}{dx}(3^x) + 3^x \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = x^3 3^x \ln 3 + 3^x 2x = x 3^x (x \ln 3 + 2) \quad - ١٤$$

$$y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} \quad y' = \frac{(e^{ax} + e^{-ax}) \frac{d}{dx}(e^{ax} - e^{-ax}) - (e^{ax} - e^{-ax}) \frac{d}{dx}(e^{ax} + e^{-ax})}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} \quad - ١٥$$

$$= \frac{(e^{ax} + e^{-ax})[a(e^{ax} + e^{-ax})] - (e^{ax} - e^{-ax})[a(e^{ax} - e^{-ax})]}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$$

$$= a \frac{(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) - (e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} = \frac{4a}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$$

١٦ - أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-x} \ln x$

$$y' = e^{-x} \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x \frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x} \frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x = -e^{-x} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x \right)$$

١٧ - أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-2x} \sin 3x$

$$y' = e^{-2x} \frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x \frac{d}{dx}(e^{-2x}) = 3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x = 3e^{-2x} \cos 3x - 2y$$

$$y'' = 3e^{-2x} \frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3 \cos 3x \frac{d}{dx}(e^{-2x}) - 2y'$$

$$= -9e^{-2x} \sin 3x - 6e^{-2x} \cos 3x - 2(3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x)$$

$$= -e^{-2x} (12 \cos 3x + 5 \sin 3x)$$

استخدم الاشتقاق اللوغاريتمى للحصول على المشتقة الأولى

$$y = (x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^4 \quad \ln y = \ln (x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^4 = 3 \ln (x^2 + 2) + 4 \ln (1 - x^2) \quad - ١٨$$

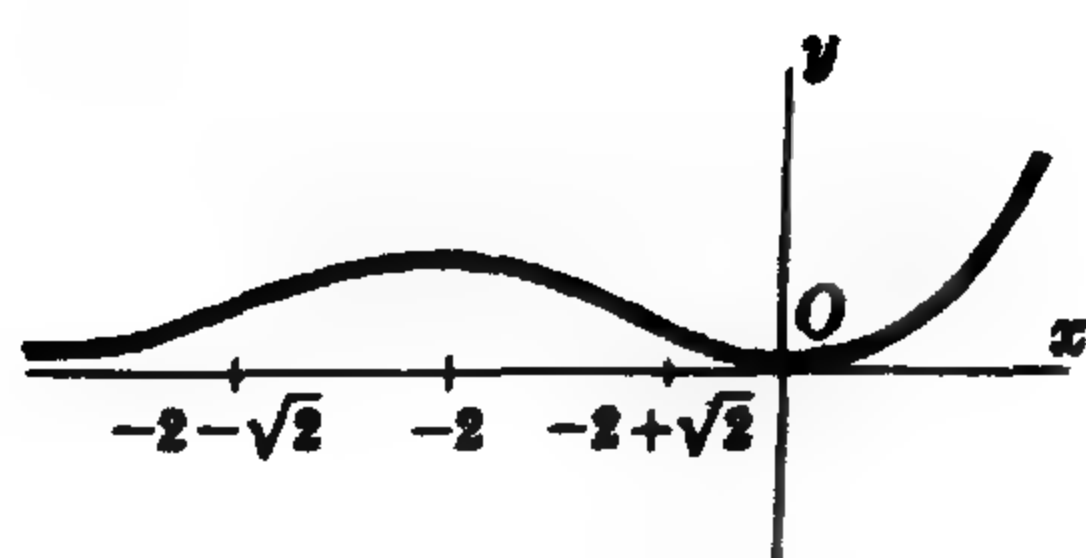
$$y' = y \frac{d}{dx} [3 \ln (x^2 + 2) + 4 \ln (1 - x^2)] = (x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^4 \left[\frac{6x}{x^2 + 2} - \frac{12x}{1 - x^2} \right]$$

$$= 6x(x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^3 (1 - 4x - 3x^2)$$

$$y = \frac{x(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^{1/2}} \quad \ln y = \ln x + 2 \ln (1 - x^2) - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) \quad - ١٩$$

$$y' = \frac{x(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{x} - \frac{4x}{1 - x^2} - \frac{x}{1 + x^2} \right] = \frac{(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^{1/2}} - \frac{4x^2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^{1/2}} - \frac{x^2(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(1 - 5x^2 - 4x^4)(1 - x^2)}{(1 + x^2)^{3/2}}$$



شكل ١٤ - ٢

٢٠ - حدد (أ) مواضع نقاط القيم العظمى والصغرى النسبية (ب) مواضع نقاط الانعطاف للمنحنى $y = f(x) = x^2 e^x$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$$

$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x = e^x (2 + 4x + x^2)$$

$$f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2 e^x = e^x (6 + 6x + x^2)$$

فالمنحنى المفروض يهتز بين المنحنين $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ و $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$ بماذا لهذا عند النقط المذكورة .

$$\begin{aligned} y' &= f'(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t) \\ y'' &= f''(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \{(\frac{1}{2} - 4\pi^2) \sin 2\pi t - 2\pi \cos 2\pi t\} \end{aligned} \quad (ج)$$

وعندما $y' = 0$ ، $2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t = 0$ أى أن $\tan \pi t = 4\pi$ فإذا كانت $t = \xi = .237$ أصغر زاوية موجبة محققة لهذه العلاقة فإن النقط الحرجة تكون $\dots, \xi + 1, \xi + \frac{1}{2}, \xi, \xi - \frac{1}{2}, \xi - 1, \dots$

وحيث أن إشارتي $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ و $f''(\xi \pm \frac{n+1}{2})$ متعاكستان عندما $n = 0, 1, 2, \dots$ وإشارتي $f''(\xi \pm \frac{n+2}{2})$ و $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ متماثلتان فإن القيم الحرجة تعطى على المنحنى نقطاً عظمى وصغرى بالتناوب .
وهذه النقط تقع قريبة من نقط الالتصاق مع المنحنين $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ و $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$.

$$\tan 2\pi t = \frac{2\pi}{\frac{1}{2} - 4\pi^2} = \frac{8\pi}{1 - 16\pi^2} \quad (د) \text{ عندما}$$

وإذا كانت $t = \eta = .475$ أصغر زاوية موجبة محققة لهذه العلاقة فإن نقط الانقلاب الممكنة هي $t = \eta = .475$ ، إن هذه النقط ، والتي تقع على يسار نقط تقاطع المنحنى مع المحور ، وقريبة منها ، هي فعلاً نقط انعطاف .

٢٤- تمثل المعادلة $s = ce^{-kt} \sin(kt + \theta)$ ، حيث k, b, c, θ ثوابت ، حركة اهتزازية مخمدة (مبطأة) بين أن $a = -2bv - (k^2 + b^2)s$.

$$\begin{aligned} v &= ds/dt = ce^{-kt} [-b \sin(kt + \theta) + k \cos(kt + \theta)] \\ a &= dv/dt = ce^{-kt} [(b^2 - k^2) \sin(kt + \theta) - 2bk \cos(kt + \theta)] \\ &= ce^{-kt} [-2b\{-b \sin(kt + \theta) + k \cos(kt + \theta)\} - (k^2 + b^2) \sin(kt + \theta)] \\ &= -2bv - (k^2 + b^2)s \end{aligned}$$

مسائل إضافية

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في المسائل ٢٥ - ٣٥ :

$$2/(\sin 2x \ln \tan x) : ج \quad y = \ln(\ln \tan x) - ٣١ \quad 4/(4x - 5) : ج \quad y = \ln(4x - 5) - ٢٥$$

$$(2 - 4 \ln x)/x^3 : ج \quad y = (\ln x^2)/x^2 - ٣٢ \quad x/(x^2 - 3) : ج \quad y = \ln \sqrt{3 - x^2} - ٢٦$$

$$x^4 \ln x : ج \quad y = \frac{1}{3}x^3(\ln x - \frac{1}{3}) - ٣٣ \quad 5/x : ج \quad y = \ln 3x^5 - ٢٧$$

$$2 \sin \ln x : ج \quad y = x(\sin \ln x - \cos \ln x) - ٣٤ \quad (6x + 3)/(x^2 + x - 1) : ج \quad y = \ln(x^2 + x - 1)^2 - ٢٨$$

$$\ln(4 + x^2) : ج \quad y = x \ln(4 + x^2) + 4 \arctan \frac{1}{2}x - 2x - ٣٥ \quad \ln x : ج \quad y = x \cdot \ln x - x - ٢٩$$

$$\sec x : ج \quad y = \ln(\sec x + \tan x) - ٣٠$$

٣٦ - أوجد معادلة مماس المنحنى $y = \ln x$ عند أى نقطة من نقطه (x_0, y_0) .

استخدم نقطة تقاطع المماس مع المحور y كى تحصل على إنشاء بسيط للمستقيم المماس .

٣٧ - ناقش $y = x^2 \ln x$ وارسمه . ج : قيمة صغرى عند $x = 1/\sqrt{e}$ ونقطة انعطاف عند $x = 1/e^{3/2}$.

٣٨ - بين أن زاوية تقاطع المنحنى $y = \ln(x-2)$ مع المنحنى $y = x^2 - 4x + 3$ عند النقطة $(3, 0)$ هى $\phi = \arctan 1/3$.

أوجد dy/dx فى المسائل ٣٩ - ٤٦ .

٣٩ - $y = e^{2x}$ ج $5e^{2x}$	٤٣ - $y = e^{-x} \cos x$ ج $-e^{-x}(\cos x + \sin x)$
٤٠ - $y = e^{x^2}$ ج $2x^2 e^{x^2}$	٤٤ - $y = \arcsin e^x$ ج $e^x/\sqrt{1-e^{2x}}$
٤١ - $y = e^{\sin 3x}$ ج $3e^{\sin 3x} \cos 3x$	٤٥ - $y = \tan^2 e^{2x}$ ج $6e^{2x} \tan e^{2x} \sec^2 e^{2x}$
٤٢ - $y = 3^{-x^2}$ ج $-2x \cdot 3^{-x^2} \ln 3$	٤٦ - $y = e^{x^2}$ ج $e^{(x^2+e^x)}$

٤٧ - إذا كانت $y = x^2 e^x$ بين أن $y''' = (x^2 + 6x + 6) e^x$.

٤٨ - إذا كانت $y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ بين أن $y'' + 4y' + 8y = 0$.

٤٩ - ناقش وارسم (أ) $y = x^2 e^{-x^2}$ (ب) $y = x^2 e^{-x^2}$.

ج : (أ) قيمة عظمى عند $x = 2$ وقيمة صغرى عند $x = 0$ ونقطتا انعطاف عند $x = 2 \pm \sqrt{2}$.
 (ب) قيمة عظمى عند $x = \pm 1$ وقيمة صغرى عند $x = 0$ ونقط انعطاف عند $x = 1.51$ و $x = \pm 0.47$.

٥٠ - ابحث عن المستطيل ذى المساحة العظمى الذى يقع أحد أضلاعه على المحور تحت المنحنى $y = e^{-x^2}$.

إرشاد : $A = 2xy = 2xe^{-x^2}$ حيث $P(x, y)$ رأس المستطيل على المنحنى .

ج : $A = \sqrt{2/e}$.

٥١ - بين أن المنحنيين $y = e^{ax} \cos ax$ و $y = e^{ax}$ متماثلان عند النقط التى لها $x = 2n\pi/a$, $(n=1,2,3,\dots)$ وأن المنحنيين $y = e^{-ax/a^2}$ و $y = e^{ax} \cos ax$ متماثلان عند النقط نفسها .

٥٢ - للمنحنى $y = x e^x$ بين (أ) أن النقطة $(-1, -1/e)$ هى نقطة قيمة صغرى نسبية (ب) وأن النقطة $(-2, -2/e^2)$ هى نقطة انعطاف (ج) وأن المنحنى مقعر لأسفل على يسار نقطة الانعطاف ومقعر لأعلى على يمينها .

استخدم الاشتقاق اللوغاريتمى لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ فى المسائل ٥٣ - ٥٦ .

٥٣ - $y = x^x$ ج $x^x(1 + \ln x)$	٥٥ - $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$ ج $x^2 e^{2x} \cos 3x \{2/x + 2 - 3 \tan 3x\}$
٥٤ - $y = x^{\ln x}$ ج $2x^{(\ln x - 1)} \ln x$	٥٦ - $y = x^{e^{-x^2}}$ ج $e^{-x^2} x^{e^{-x^2}} (1/x - 2x \ln x)$

٥٧ - بين أن (أ) $\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x+n)e^x$ (ب) $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

الفصل الخامس عشر

اشتقاق الدوال الزائدية

تعريف الدوال الزائدية : إذا كان u عددا حقيقيا ، باستثناء ما أشير إليه ، فإن :

$$\begin{aligned}\sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} & \coth u &= \frac{1}{\tanh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0) \\ \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} & \operatorname{sech} u &= \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \\ \tanh u &= \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} & \operatorname{csch} u &= \frac{1}{\sinh u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)\end{aligned}$$

صيغ الاشتقاق : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\coth u) &= -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} & - ٣٤ & \frac{d}{dx}(\sinh u) &= \cosh u \frac{du}{dx} & - ٣١ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} & - ٣٥ & \frac{d}{dx}(\cosh u) &= \sinh u \frac{du}{dx} & - ٣٢ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) &= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} & - ٣٦ & \frac{d}{dx}(\tanh u) &= \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} & - ٣٣\end{aligned}$$

انظر المسائل ١ - ١٢

تعريف الدوال الزائدية العكسية :

$$\begin{aligned}\sinh^{-1} u &= \ln(u + \sqrt{1+u^2}), \quad \text{all } u & \coth^{-1} u &= \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}, \quad (u^2 > 1) \\ \cosh^{-1} u &= \ln(u + \sqrt{u^2-1}), \quad (u \geq 1) & \operatorname{sech}^{-1} u &= \ln \frac{1 + \sqrt{1-u^2}}{u}, \quad (0 < u \leq 1) \\ \tanh^{-1} u &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1) & \operatorname{csch}^{-1} u &= \ln \left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|} \right), \quad (u \neq 0)\end{aligned}$$

(القيم الرئيسية لـ $\cosh^{-1} x$ و $\operatorname{sech}^{-1} x$ متضمنة هنا فقط)

صيغ الاشتقاق : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 > 1) - ٤٠ & \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} & - ٣٧ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) &= \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (0 < u < 1) - ٤١ & \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) &= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad (u > 1) - ٣٨ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) &= \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (u \neq 0) - ٤٢ & \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 < 1) - ٣٩\end{aligned}$$

انظر المسائل ١٣ - ١٩

مسائل محلولة

١ - برهن أن $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \frac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

٢ - استنتج $\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$ ، حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x .

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

أوجد dy/dx في المسائل ٣ - ١٠

$\frac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) = 3 \cosh 3x$ $y = \sinh 3x$ - ٣

$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{1}{2}x \cdot \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2} \sinh \frac{1}{2}x$ $y = \cosh \frac{1}{2}x$ - ٤

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(1+x^2) \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2) = 2x \operatorname{sech}^2(1+x^2)$ $y = \tanh(1+x^2)$ - ٥

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x^2} \operatorname{csch}^2 \frac{1}{x}$ $y = \coth \frac{1}{x}$ - ٦

$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x^2) + \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x)$ $y = x \operatorname{sech} x^2$ - ٧
 $= x(-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2)2x + \operatorname{sech} x^2$
 $= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 + \operatorname{sech} x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{csch}(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(x^2+1)]$ $y = \operatorname{csch}^2(x^2+1)$ - ٨
 $= 2 \operatorname{csch}(x^2+1)[- \operatorname{csch}(x^2+1) \coth(x^2+1) \cdot 2x]$
 $= -4x \operatorname{csch}^2(x^2+1) \coth(x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\cosh 2x)2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \sinh^2 x$ $y = \frac{1}{2} \sinh 2x - \frac{1}{2}x$ - ٩

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tanh 2x}(2 \operatorname{sech}^2 2x) = \frac{2}{\sinh 2x \cosh 2x} = 4 \operatorname{csch} 4x$ $y = \ln \tanh 2x$ - ١٠

١١ - أوجد إحداثي القيمة الصغرى للسلسلة $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

$$f'(x) = \frac{1}{a} \left(a \sinh \frac{x}{a} \right) = \sinh \frac{x}{a}, \quad f''(x) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \right)$$

عندما $f'(x) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = 0$ يكون $x=0$ ويكون $f''(0) > 0$ والنقطة $(0, a)$ هي نقطة قيمة صغرى.

١٢ - اعث عن نقط الانعطاف للدوال التالية

$$y = \sinh x \quad (أ) \quad y = \cosh x \quad (ب) \quad y = \tanh x \quad (ج)$$

$$f'''(x) = \cosh x, \quad f''(x) = \sinh x, \quad f'(x) = \cosh x, \quad (أ)$$

إن $f''(x) = \sinh x = 0$ عندما $x = 0$ وحيث أن $f'''(0) \neq 0$ فإن النقطة $(0,0)$ هي نقطة الانعطاف

(ب) إن $f'(x) = \sinh x, f''(x) = \cosh x \neq 0$ مهما كانت x ولذلك فلا يوجد نقطة انعطاف .

$$f'''(x) = \frac{4 \sinh^2 x - 2}{\cosh^4 x}, \quad f'(x) = \operatorname{sech}^2 x, \quad f''(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x = -2 \frac{\sinh x}{\cosh^3 x}, \quad (ج)$$

إن $f''(x) = 0$ عندما $x = 0$ وحيث أن $f'''(0) \neq 0$ فالنقطة $(0,0)$ هي نقطة انعطاف .

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{لجميع قيم } x \quad (أ) \quad \text{استنتج}$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad (ب) \quad \text{عندما } 0 < x \leq 1$$

$$\sinh^{-1} x = y; \quad \text{عندئذ } x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \quad \text{أو} \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

ويحل هذه المعادلة بالنسبة لـ e^y نجد $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ لأن $e^y > 0$ وهكذا يكون $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$$\cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \operatorname{sech}^{-1} x, \quad x = \operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}, \quad \cosh y = \frac{1}{x}, \quad \text{عندئذ } \operatorname{sech}^{-1} x = y; \quad (ب) \quad \text{ليكن}$$

$$\cosh y = \frac{1}{x} \quad \text{كذلك} \quad x = \operatorname{sech} y = \frac{2}{e^y + e^{-y}} \quad \text{أو} \quad e^{2y} x - 2e^y + x = 0.$$

ويحل هذه المعادلة بالنسبة لـ e^y نجد $e^y = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$ عندما $y \geq 0$ وهكذا نجد $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$ عندما $0 < x \leq 1$.

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}, \quad \text{استنتج} \quad (أ) \quad \text{استنتج}$$

ليكن $y = \sinh^{-1} u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ يكون $\sinh y = u$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx} \quad \text{و} \quad \cosh y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

أوجد dy/dx في المسائل ١٥ - ١٨ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3x)^2 + 1}} \cdot \frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$$

$$y = \sinh^{-1} 3x \quad - ١٥$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

$$y = \cosh^{-1} e^x \quad - ١٦$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{1}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan \frac{1}{2}x)$$

$$y = 2 \tanh^{-1}(\tan \frac{1}{2}x) \quad - ١٧$$

$$= 2 \frac{1}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} \sec^2 \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sec^2 \frac{1}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} = \sec x$$

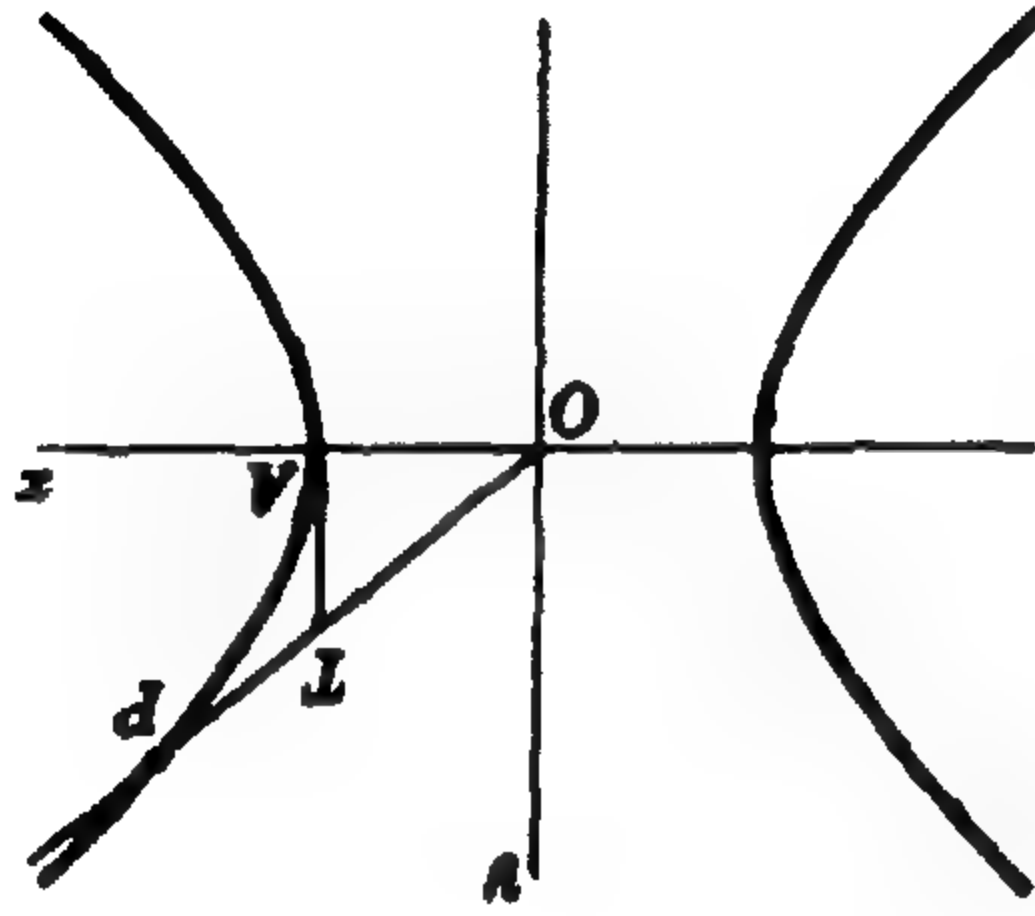
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2 - 1} \quad , \quad y = \coth^{-1} \frac{1}{x} \quad - ١٨$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} = \sec x \quad , \quad y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x) \quad - ١٩$$

مسائل إضافية

٢٠ - (١) ارسم المنحنيين $y = e^x$, $y = -e^{-x}$ ثم خذ متوسط ترتيبى (الاحداثيتين

الثانيتين) المنحنيين لقيم مختلفة لـ x لتحصل على نقط من المنحنى $y = \sinh x$ أتمم المنحنى .



(ب) أعد العمل كما في (١) مستخدماً $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ لتحصل على المنحنى $y = \cosh x$.

٢١ - لقطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ بين (١) أن النقطة $P(\cosh u, \sinh u)$ تقع عليه .

(ب) أن المستقيم المماس عند A يقطع المستقيم OP في $T(1, \tanh u)$. أرجع إلى الشكل ١٥ - ١ .

شكل ١٥ - ١

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (١) \quad - ٢٢$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (ب)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad (ج)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 \quad (د)$$

$$= 2 \sinh^2 x + 1$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \quad (هـ)$$

أوجد dy/dx في كل من المسائل ٢٣ - ٢٨

$$\frac{1}{2} \cosh \frac{1}{2}x \quad ج \quad y = \sinh \frac{1}{2}x \quad - ٢٣$$

$$3 \sinh 6x \quad ج \quad y = \cosh^3 3x \quad - ٢٤$$

$$2 \operatorname{sech}^2 2x \quad ج \quad y = \tanh 2x \quad - ٢٥$$

$$\tanh x \quad ج \quad y = \ln \cosh x \quad - ٢٦$$

$$\operatorname{sech} x \quad ج \quad y = \arctan \sinh x \quad - ٢٧$$

$$2 \operatorname{csch} 4x \quad ج \quad y = \ln \sqrt{\tanh 2x} \quad - ٢٨$$

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{فإن } y = a \cosh \frac{x}{a} \quad - ٢٩$$

(ب) وأنه إذا كان $y = A \cosh bx + B \sinh bx$ حيث b, A, B ثوابت فإن $y'' = b^2 y$.

$$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), u \geq 1 \quad (أ) - ٣٠$$

$$\tanh^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, u^2 < 1. \quad (ب)$$

٣١ - (أ) ارسم المنحنى $y = \sinh^{-1} x$ وذلك بعكس المنحنى $y = \sinh x$ بالنسبة للمستقيم الذى ميله 45° .

(ب) ارسم الفرع الرئيسى لـ $y = \cosh^{-1} x$ وذلك بعكس النصف الأيمن للمنحنى $y = \cosh x$ بالنسبة للمستقيم الذى ميله 45° .

٣٢ - استنتج صيغ الاشتقاق ٣٢ - ٣٦ و ٣٨ - ٤٠ و ٤٢

أوجد dy/dx فى كل من المسائل ٣٣ - ٣٦

$$1/\sqrt{x^2 + 4} \quad : ج \quad y = \sinh^{-1} \frac{1}{2}x \quad - ٣٣$$

$$-1/x\sqrt{1-x^2} \quad : ج \quad y = \cosh^{-1}(1/x) \quad - ٣٤$$

$$\sec x \quad : ج \quad y = \tanh^{-1}(\sin x) \quad - ٣٥$$

$$-y/\sqrt{a^2 - y^2} \quad : ج \quad x = a \operatorname{sech}^{-1}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2} \quad - ٣٦$$

الفصل السادس عشر

التمثيل البارامتري للمنحنيات

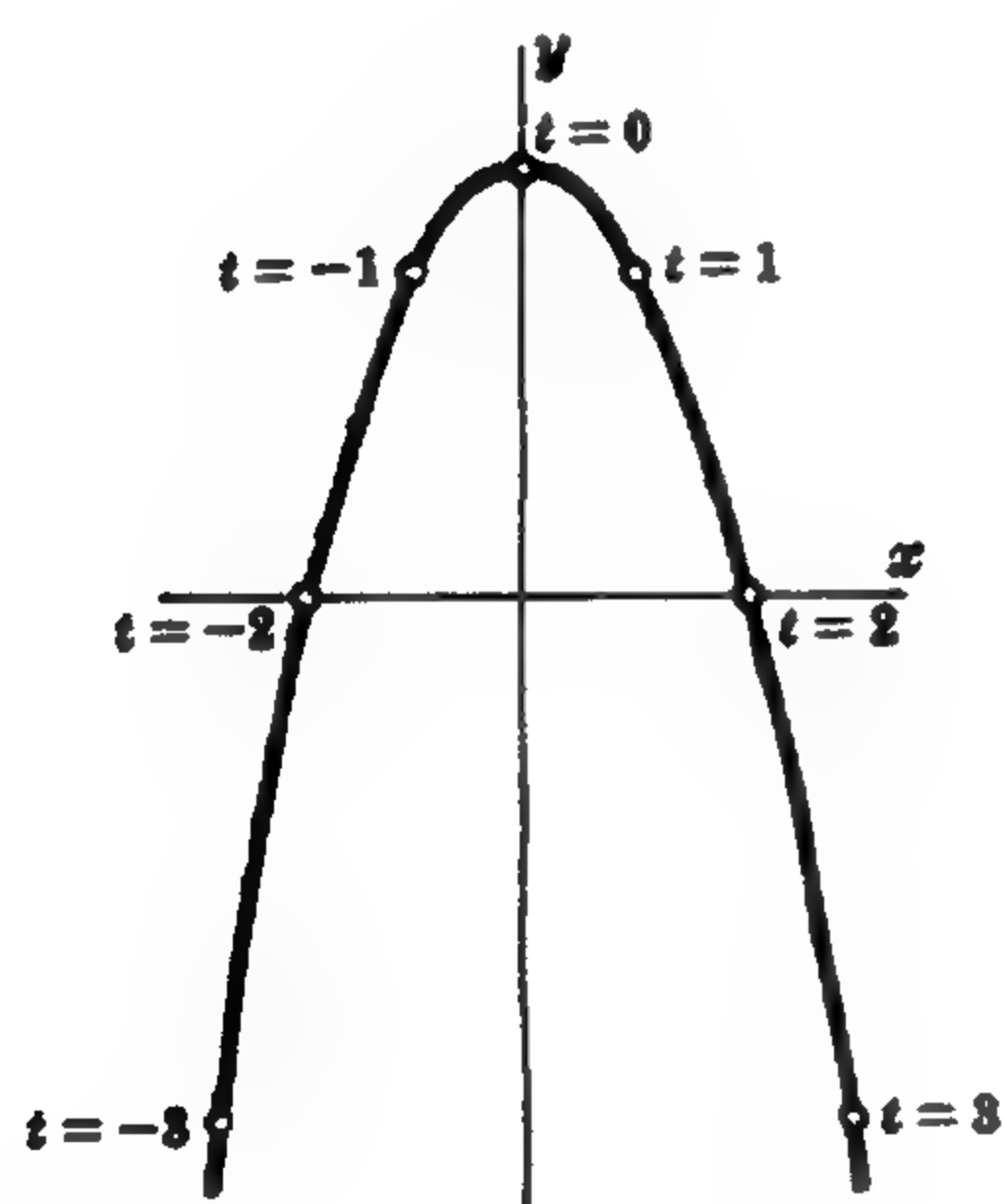
المعادلات البارامتريّة : إذا أعطيت الإحداثيات (x, y) لنقطة P من منحنى على شكل دالتين $x = f(u)$, $y = g(u)$ لمتغير ثالث أو بارامتر u ، فإننا نسمي المعادلتين $x = f(u)$, $y = g(u)$ المعادلتين البارامتريتين للمنحنى .

مثال :

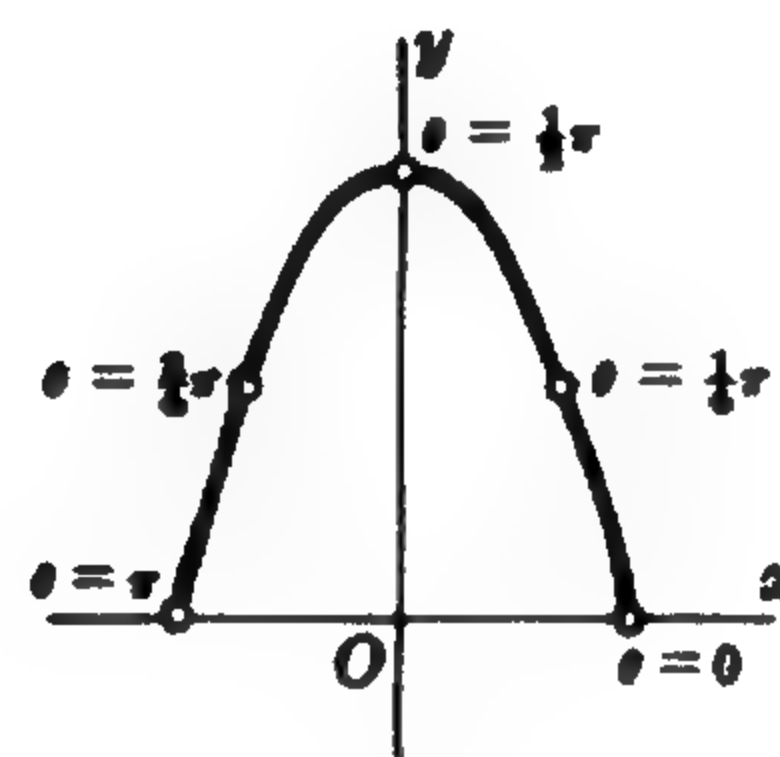
(أ) $x = \cos \theta$, $y = 4 \sin^2 \theta$ هما معادلتان بارامتريتان بالبارامتر θ . لقطع المكافئ $4x^2 + y = 4$ ، لأن

$$4x^2 + y = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta = 4.$$

(ب) $x = \frac{1}{2}t$, $y = 4 - t^2$ هما تمثيل بارامتري آخر ، بالبارامتر t للمنحنى ذاته .



(ب)



(أ)

شكل ١٦ - ١

نلاحظ أن التمثيل البارامتري الأول يمثل جزءا من القطع المكافئ فقط ، في حين يمثل التمثيل الثاني المنحنى بأكمله .

وتعطي المشتقة الأولى : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du}$.

وتعطي المشتقة الثانية : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{du}{dx}$.

مسائل محلولة

١ - أوجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ بفرض أن $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad , \quad \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos \theta - 1}{(1 - \cos \theta)^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta} = -\frac{1}{(1 - \cos \theta)^2}$$

٢ - أوجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ بفرض أن $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2}{(\cos t - \sin t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

٣ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $x = \sqrt{t}$, $y = t - 1/\sqrt{t}$ عند النقطة التي عندما $t = 4$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

وعند $t = 4$: $x = 2$, $y = 7/2$, يكون $m = dy/dx = 17/4$.

ومعادلة المماس هي $(y - 7/2) = (17/4)(x - 2)$ أو $17x - 4y = 20$.

٤ - يعطى موضع جسم ، يتحرك على منحنى ، عند اللحظة t بالمعادلتين

البارامترين $x = 2 - 3 \cos t$, $y = 3 + 2 \sin t$ حيث x و y مقاسة

بالأمتار و t بالثواني . أوجد المعدل الزمني واتجاه التغير لـ

(١) (الإحداثي السيني) عندما $t = \pi/3$ ، (ب) الإحداثي الصادي ،

عندما $t = 5\pi/3$ ، (ج) زاوية ميل المماس عندما $t = 2\pi/3$.

$$dx/dt = 3 \sin t, \quad dy/dt = 2 \cos t, \quad \tan \theta = dy/dx = \frac{2}{3} \cot t$$

(١) عندما $t = \pi/3$, $dx/dt = 3\sqrt{3}/2$ ، والإحداثي السيني متزايد بمعدل

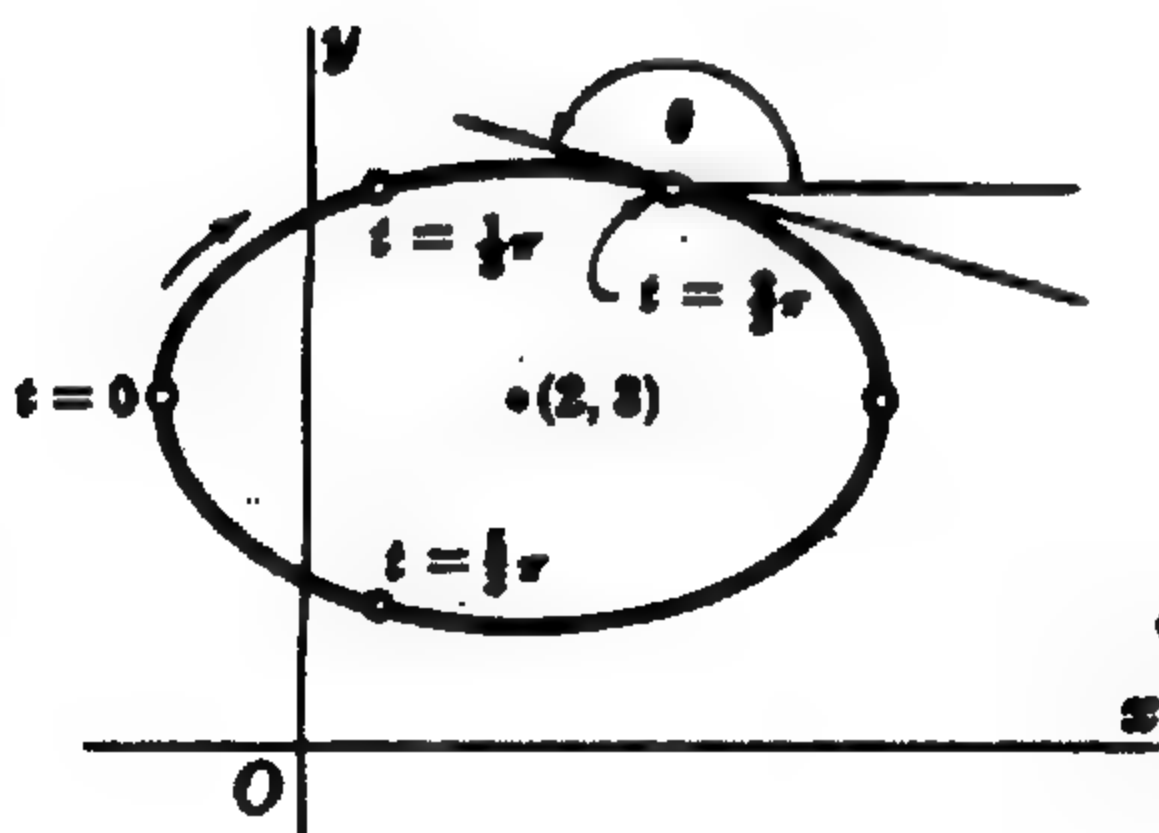
$$3\sqrt{3}/2 \text{ ms}^{-1}.$$

(ب) عندما $t = 5\pi/3$, $dy/dt = 2(\frac{1}{2}) = 1$ ، والإحداثي الصادي متزايد

بمعدل 1 m/sec .

(ج) أن $\theta = \arctan(\frac{2}{3} \cot t)$ ، ومنه $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6 \csc^2 t}{9 + 4 \cot^2 t}$ ، وعندما $t = 2\pi/3$ ،

يكون $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9 + 4(-1/\sqrt{3})^2} = -\frac{24}{31}$ rad/sec .



شكل ١٦ - ٢

مسائل إضافية

أوجد dy/dx و d^2y/dx^2 في كل من المسائل ٥ - ٩ .

- ٥ - $x = 2 + t, y = 1 + t^2$ ج : $dy/dx = 2t, d^2y/dx^2 = 2$
 ٦ - $x = t + 1/t, y = t + 1$ ج : $dy/dx = t^2/(t^2 - 1), d^2y/dx^2 = -2t^3/(t^2 - 1)^3$
 ٧ - $x = 2 \sin t, y = \cos 2t$ ج : $dy/dx = -2 \sin t, d^2y/dx^2 = -1$
 ٨ - $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ج : $dy/dx = -\tan \theta, d^2y/dx^2 = 1/(3 \cos^4 \theta \sin \theta)$
 ٩ - $x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi), y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$ ج : $dy/dx = \tan \phi, d^2y/dx^2 = 1/(a \phi \cos^3 \phi)$

١٠ - أوجد ميل المنحنى $x = e^{-t} \cos 2t, y = e^{-2t} \sin 2t$ عند النقطة $t = 0$ ج : - 2 .

١١ - أوجد الإحداثيين القائمين لأصل نقطة من المنحنى $x = 96t, y = 96t - 16t^2$.
 إرشاد : t التي تكون عندها y عظمى ج : (288, 144) .

١٢ - أوجد معادلة المماس ومعادلة العمود لكل من المنحنيين التاليين (١) $x = 3e^t, y = 5e^{-t}$ عند $t = 0$,
 (ب) $x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta$ عند $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

ج : (١) $5x + 3y - 30 = 0, 3x - 5y + 16 = 0$; (ب) $2x + 2y - a = 0, x - y = 0$

١٣ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ أى عند نقطة $P(x, y)$ منه . بين أن الطول المقطوع من المماس بين المحورين الإحداثيين يساوى a .

ج : $x \sin t + y \cos t = \frac{1}{2}a \sin 2t$

١٤ - حدد كل المنحنى $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$ التلقا الذى يكون عندها المماس (١) أفقياً (ب) رأسياً .
 بين أن مماس المنحنى متعامدان عند التلقا الذى يقطع فيها المنحنى نفسه .

ج : (١) $t = \pm\sqrt{3}/3$, (ب) $t = 0$.

الفصل السابع عشر

الانحناء (التقوس)

اشتقاق طول القوس :

لتكن $y = f(x)$ دالة مشتقتها الأولى مستمرة . ولتكن A (انظر الشكل ١٧ - ١) نقطة ثابتة على المنحنى ، ولنرمز بـ s لطول القوس المقاس من A إلى أى نقطة أخرى على المنحنى . لتكن $P(x, y)$ نقطة اختيارية و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطة مجاورة على المنحنى . لنرمز بـ Δs لطول القوس من P إلى Q .

إن معدل تغير القوس $s (= AP)$ بمقدار الوحدة لكل تغير في x ومعدل تغير هذا القوس لكل وحدة تغير في y هما على الترتيب :

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

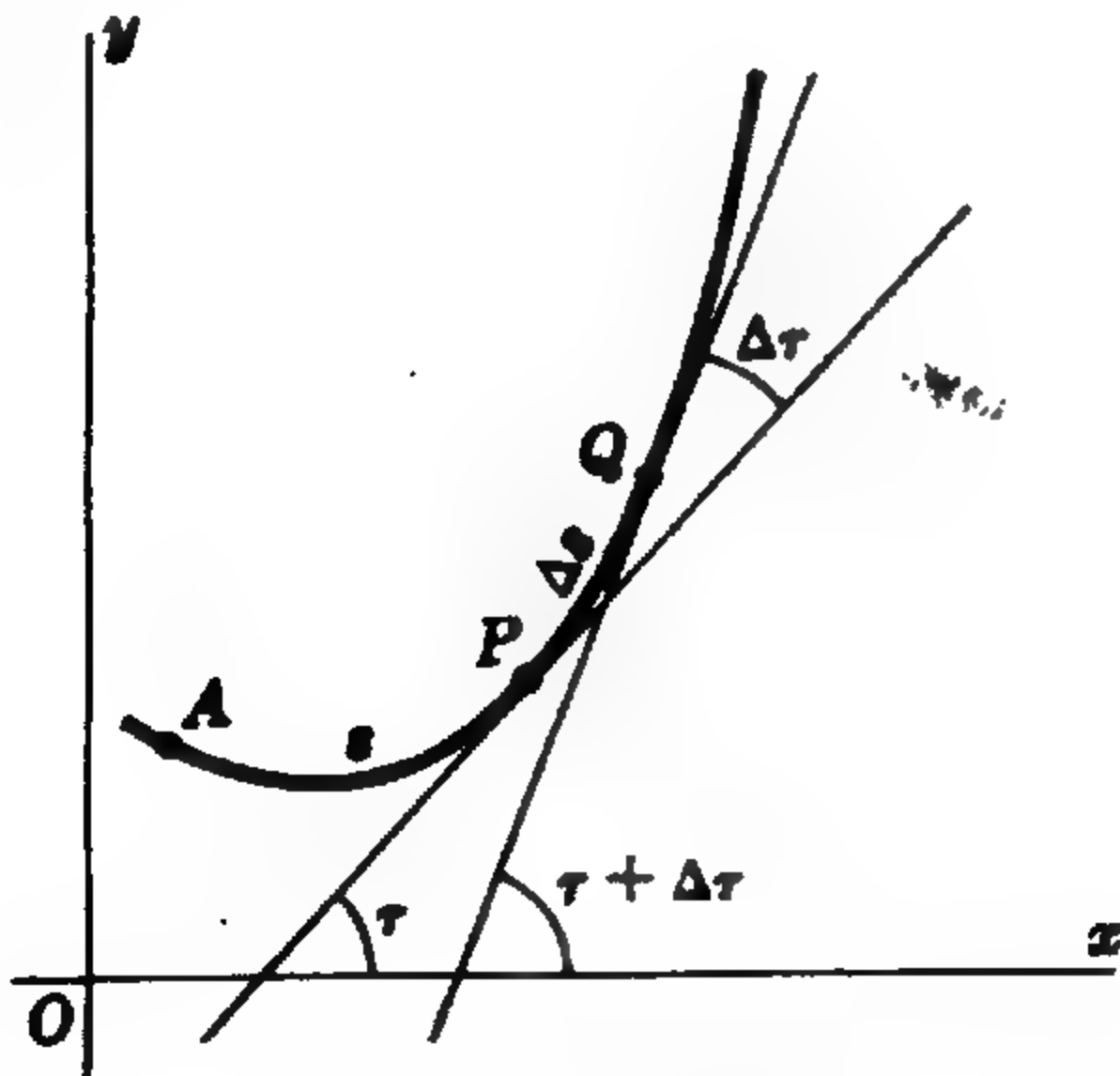
عل أن تؤخذ الإشارة الموجبة أو الإشارة السالبة في العلاقة الأولى حسباً تزداد s أو تتناقص عندما تزداد x ، وفي العلاقة الثانية حسباً تزداد s أو تتناقص عندما تزداد y .

وعندما يعطى المنحنى بالمعادلتين البارامتريتين $x = f(u)$ ، $y = g(u)$ ، فإن معدل تغير s بالنسبة لـ u يعطى

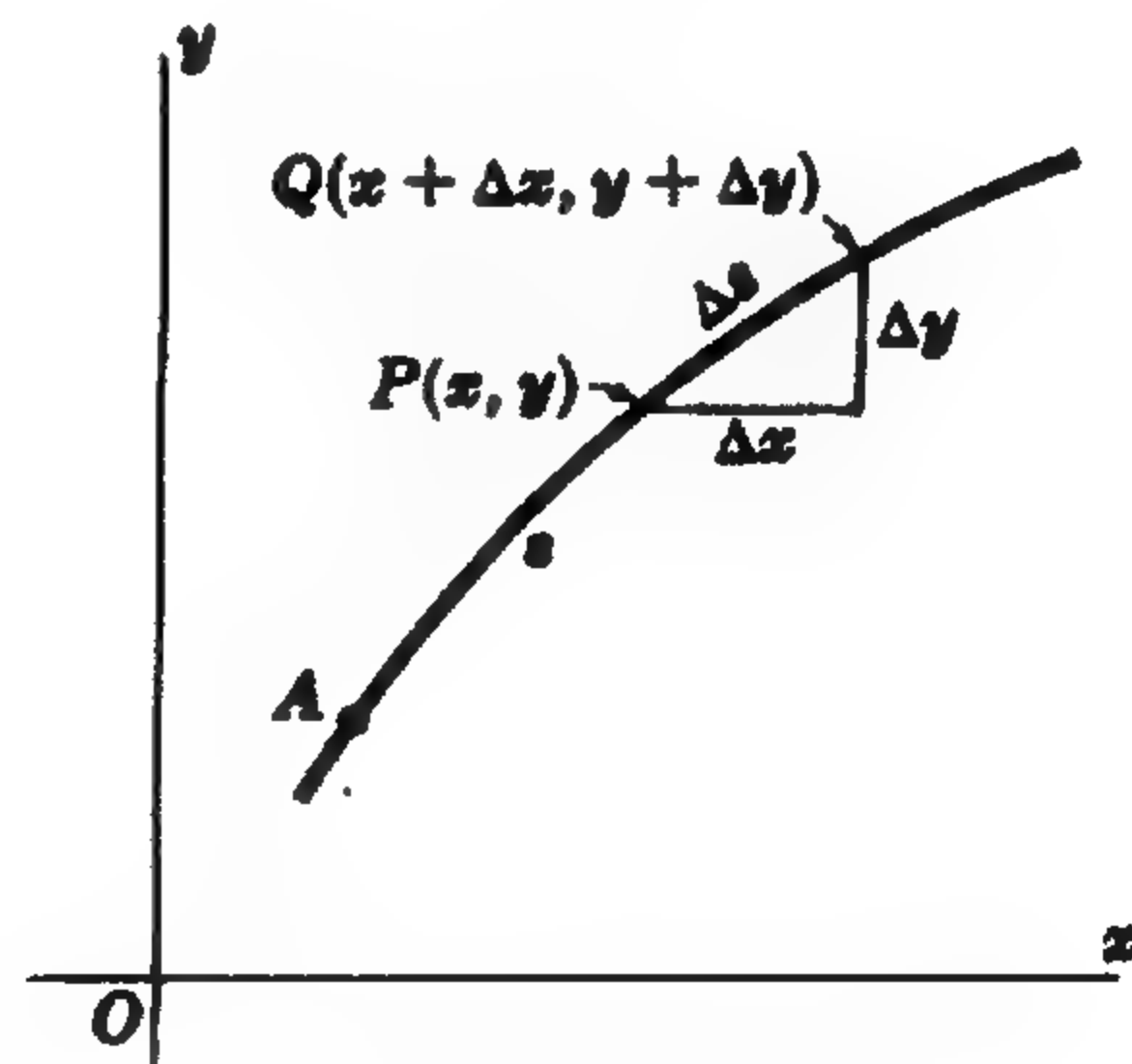
$$\frac{ds}{du} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}$$

وهنا تؤخذ الإشارة الموجبة أو السالبة حسباً تزداد s أو تتناقص عندما تزداد u وكى نتحاشى تكرار الإشارات الغامضة سنفرض فيما يأتى أن كل منحنى قد اختير بحيث تكون مشتقة طول القوس موجبة .

انظر المسائل ١ - ٥



شكل ١٧ - ٢



شكل ١٧ - ١

الانحناء (التقوس) :

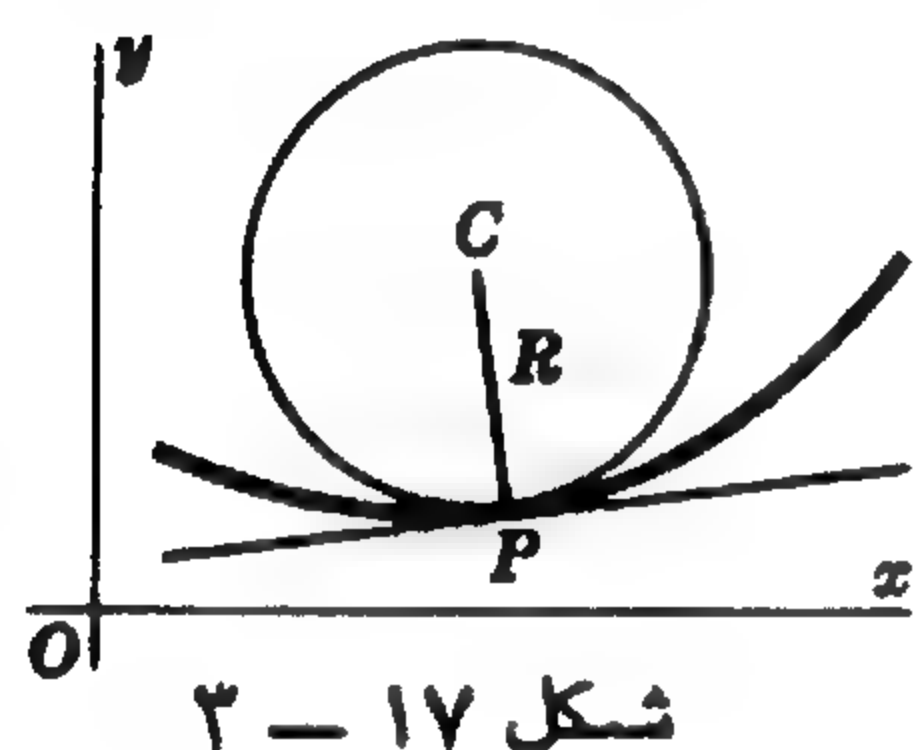
إن الانحناء K لمنحنى $y = f(x)$ عند أى نقطة P منه هو معدل تغير الاتجاه (أى زاوية الميل τ لمس المنحنى عند P) لكل وحدة طول لقوس s (انظر الشكل ١٧ - ٢) .

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} ; \quad K = \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}} ; \quad \text{إذن :}$$

يتضح من العلاقة الأولى أن K موجب عندما تكون P على قوس مقعر لأعلى وسالب عندما تكون P على قوس مقعر لأسفل .

سيجد القارئ أن K قد يعرف أحيانا بحيث يكون موجبا ، أى يعرف على أنه القيمة العددية للقيمة المطلقة في العلاقة السابقة . ينبى ، إذا أخذنا بهذا التعريف ، أن نتجاهل إشارة K في الأجوبة التى نحصل عليها أدناه .

نصف قطر الانحناء R : عند نقطة P من المنحنى يعطى بـ $R = |1/K|$ ، بفرض أن $K \neq 0$.



دائرة الانحناء : أو الدائرة المماسقة لمنحنى عند نقطة P منه هي الدائرة التى نصف

قطرها R والواقعة في جهة تقعر المنحنى والمماس له عند P .

لرسم دائرة الانحناء : ابدأ بإقامة العمودى على المنحنى عند النقطة P نحو جهة تقعره

ثم خذ عليه $PC = R$. فتكون النقطة C مركز الدائرة المطلوبة .

مركز الانحناء : عند النقطة $P(x, y)$ من المنحنى هي المركز C لدائرة الانحناء عند P . ويعطى الاحداثيات

(α, β) لمركز الانحناء بـ .

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\alpha = x + \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}, \quad \beta = y - \frac{\frac{dx}{dy} \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]}{\frac{d^2x}{dy^2}} \quad \text{أو}$$

منشئ المنحنى : هو المحل الهندسى لمراكز الانحناء للمنحنى المفروض .

انظر المسائل ٦ - ١٣

مسائل محلولة

$$١ - \text{أوجد : } \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 .$$

ارجع إلى الشكل ١٧ - ١ لترمز على المنحنى $y = f(x)$ حيث L مشتقة مسطرة بـ s لطول القوس اعتباراً من نقطة ثابتة A إلى نقطة متغيرة $P(x, y)$ ، ولترمز لـ Δs لطول القوس اعتباراً من النقطة P إلى نقطة مجاورة $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ على المنحنى وبـ PQ لطول الوتر الذي يصل P بـ Q .

$$(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \text{ وبما أن } \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x} \text{ إن}$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} \text{ فإن}$$

وعندما تقترب Q من P على المنحنى فإن $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ و $\frac{\Delta s}{PQ} = \frac{\text{القوس}}{\text{الوتر}} \rightarrow 1$ (لبرهان الجزء

الأخير انظر الفصل ١٤ (المسألة ٢٢) . وبالتالي :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

٢ - أوجد $\frac{ds}{dx}$ عند النقطة $P(x, y)$ على القطع المكافئ $y = 3x^2$.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (6x)^2} = \sqrt{1 + 36x^2}$$

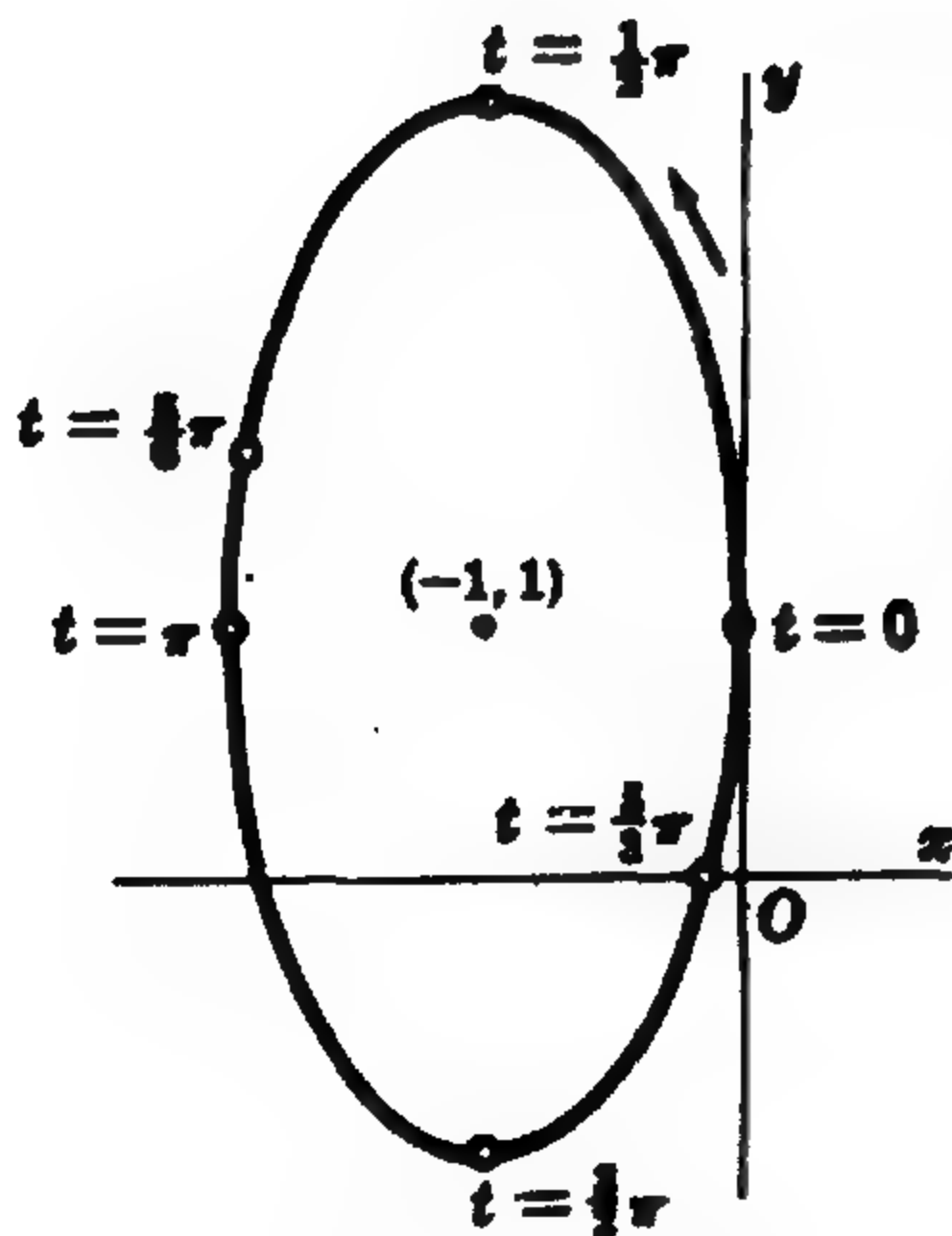
٣ - أوجد $\frac{ds}{dx}$ و $\frac{ds}{dy}$ عند النقطة $P(x, y)$ على القطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 8$.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}; \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{16y^2} = \frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2} \quad (1)$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2 + 3y^2}{2 - y^2}} \quad , \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}; \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{16y^2}{x^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{x^2} = \frac{2 + 3y^2}{2 - y^2} \quad (2)$$

٤ - أوجد $\frac{ds}{d\theta}$ عند النقطة $P(\theta)$ على المنحنى $x = \sec \theta, y = \tan \theta$.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\sec^2 \theta \tan^2 \theta + \sec^4 \theta} = |\sec \theta| \sqrt{\tan^2 \theta + \sec^2 \theta}$$



شكل ١٧ - ٤

٥ - يعطى الاحداثيان (x, y) المقاسان بالأمتار لجسيم متحرك P بـ $x = \cos t - 1, y = 2 \sin t + 1$ ، حيث t هو الزمن المقاس بالثواني . بأي معدل تتحرك P على المنحنى عندما (أ) $t = 5\pi/3$ ، (ب) $t = 5\pi/6$ ، (ج) تتحرك بأقصى سرعة ؟

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} \text{ إن}$$

$$ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{3}{4})} = \sqrt{13}/2 \text{ ms}^{-1} \text{ عندما } t = 5\pi/6 \text{ (أ)}$$

$$ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{1}{4})} = \sqrt{7}/2 \text{ ms}^{-1} \text{ عندما } t = 5\pi/3 \text{ (ب)}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-3 \cos t \sin t}{S} \text{ . عندئذ } S = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} \text{ . ليكن (ج)}$$

$$\text{وبحل } dS/dt = 0 \text{ نجد القيم الحرجة } t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2.$$

فإذا كان $t = 0$ أو π يكون المعدل $ds/dt = \sqrt{1 + 3(1)} = 2 \text{ ms}^{-1}$ أسرع مايمكن

٦- أما إذا كان $t = \pi/2$ أو $3\pi/2$ يكون المعدل : ms^{-1} $ds/dt = \sqrt{1+3(0)}$ أبطأ ما يمكن .

٧- أوجد انحناء القطع المكافئ $y^2 = 12x$ عند النقطة (أ) $(3, 6)$ ، (ب) $(\frac{3}{4}, -3)$ ، (ج) $(0, 0)$.

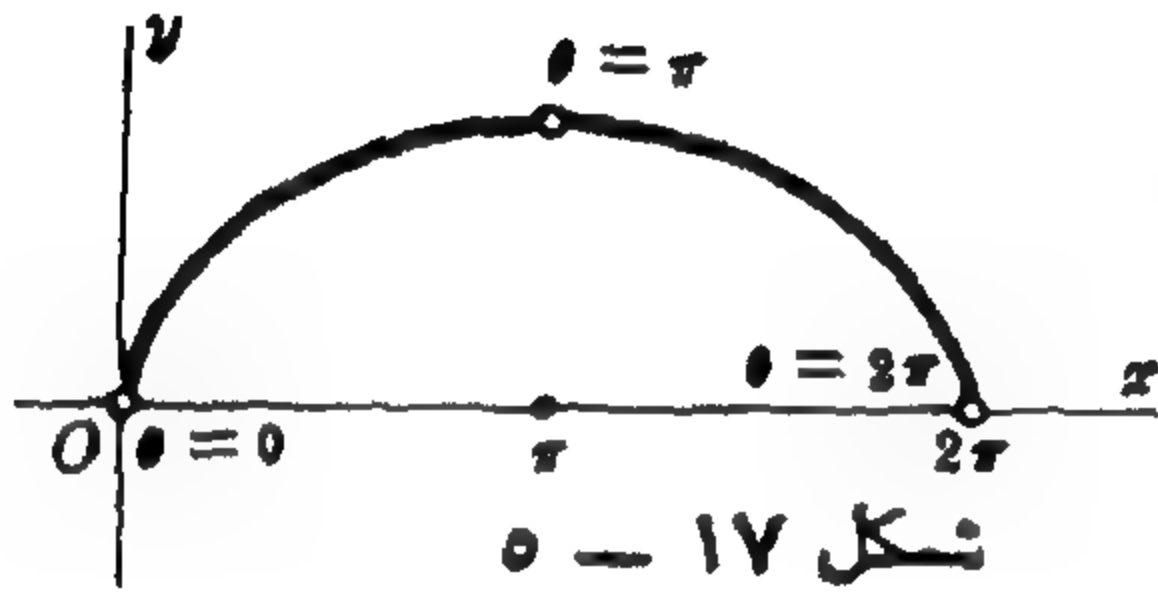
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{36}{y^3} , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2},$$

(أ) عند $(3, 6)$: يكون $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6}$ ، $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2$ ، $\frac{dy}{dx} = 1$ ، ومنه $K = \frac{-1/6}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$.

(ب) عند $(\frac{3}{4}, -3)$: يكون $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3}$ ، $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$ ، $\frac{dy}{dx} = -2$ ، ومنه $K = \frac{4/3}{5^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{75}$.

(ج) عند $(0, 0)$ يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف ولكن $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{6}$ ، $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1$ ، $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} = 0$ ، ومنه $K = -\frac{1}{6}$.

٧- أوجد انحناء الترويرى (السيكلويد) $x = \theta - \sin \theta$ ، $y = 1 - \cos \theta$ ، عند أعلى نقطة للقوس .



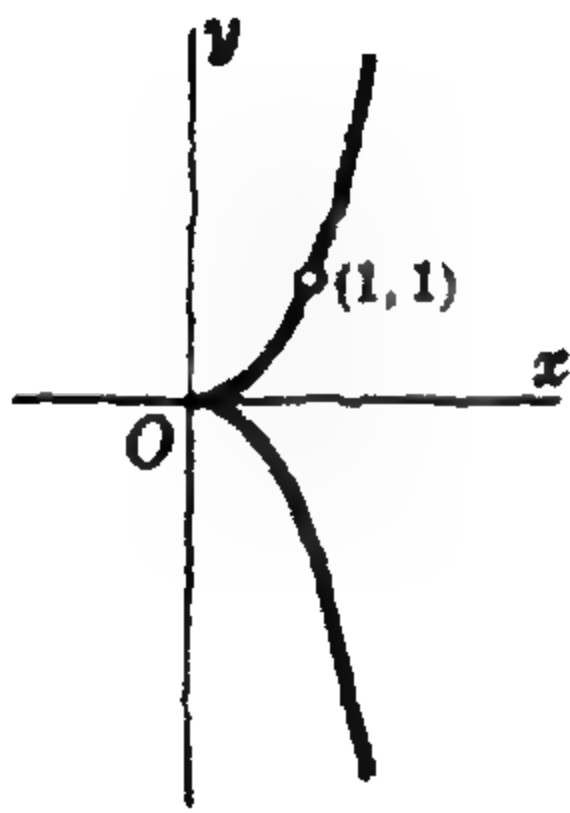
الحصول على أعلى نقطة على الفترة $0 < x < 2\pi$ نلاحظ أن $dy/d\theta = \sin \theta$ والقيمة الحرجة على الفترة المذكورة هي $x = \pi$ وبما أن $d^2y/d\theta^2 = \cos \theta < 0$ عندما $\theta = \pi$ فالنقطة $\theta = \pi$ هي نقطة قيمة عظمى نسبية وهي أعلى نقطة من المنحنى على الفترة المذكورة .

الحصول على الانحناء :

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{(1 - \cos \theta)^2}$$

وعند $\theta = \pi$ يكون $dy/dx = 0$ ، $d^2y/dx^2 = -1/4$ ، ومنه $K = -1/4$.

٨- أوجد انحناء المنحنى المستوي السبى (السيرويد) $y^2(2-x) = x^3$ عند النقطة $(1, 1)$.



نشتق المعادلة المطاة ضمنياً بالنسبة لـ x فنجد

$$(أ) \quad -y^2 + (2-x)2yy' = 3x^2$$

$$(ب) \quad -2yy' + (2-x)2yy'' + (2-x)2(y')^2 - 2yy' = 6x$$

من (أ) عندما $x = y = 1$ ، $-1 + 2y' = 3$ ، ومنه $y' = 2$.

من (ب) عندما $x = y = 1$ ، $-4 + 2y'' + 8 - 4 = 6$ ، ومنه $y'' = 3$.

$$K = 3/(1+4)^{3/2} = 3\sqrt{5}/25. \quad \text{إذن}$$

٩- أوجد نقطة أقصى انحناء على المنحنى $y = \ln x$.

$$K = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},$$

ومن $\frac{dK}{dx} = \frac{2x^2 - 1}{(1+x^2)^{5/2}}$ ، والقيمة الحرجة هي $x = 1/\sqrt{2}$. وبالتالي فإن النقطة المطلوبة هي $(1/\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \ln 2)$.

١٠ - عين موضع مركز الانحناء C المنحنى $y=f(x)$ عند إحدى نقاطه $P(x, y)$ التى يكون عندها $y' \neq 0$.
(انظر الشكل ١٧ - ٢) .

يقع مركز الانحناء $C(a, \beta)$ (١) على المستقيم العمودى عند P و (٢) على مسافة R عن P مقاسة نحو جهة تقعر المنحنى . لذلك فإن :

$$(a-x)^2 + (\beta-y)^2 = R^2 = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2} \quad (٢) \quad \text{و} \quad \beta-y = -\frac{1}{y'}(a-x) \quad (١)$$

ومن (١) نجد $a-x = -y'(\beta-y)$; بالتعويض فى (٢) نجد

$$\beta-y = \pm \frac{1+(y')^2}{y''} \quad \text{ومن} \quad (\beta-y)^2 [1+(y')^2] = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2}$$

ولتحديد الإشارة الصحيحة نلاحظ أن تقعر المنحنى يكون لأعلى عندما $y'' > 0$ وبما أن C عندئذ تقع فوق P فإن $\beta-y > 0$. والإشارة المناسبة فى هذه الحالة هى + (ونترك للقارئ أن يبرهن أن الإشارة هى كذلك + عندما $y'' < 0$). وهكذا :

$$\alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''} \quad \text{ومن (١) نجد} \quad \beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$$

١١ - أوجد معادلة دائرة الانحناء للمنحنى $2xy + x + y = 4$ عند النقطة $(1, 1)$.

إن $2y + 2xy' + 1 + y' = 0$ عند $(1, 1)$. يكون $y' = -1$. إذن $1 + (y')^2 = 2$.

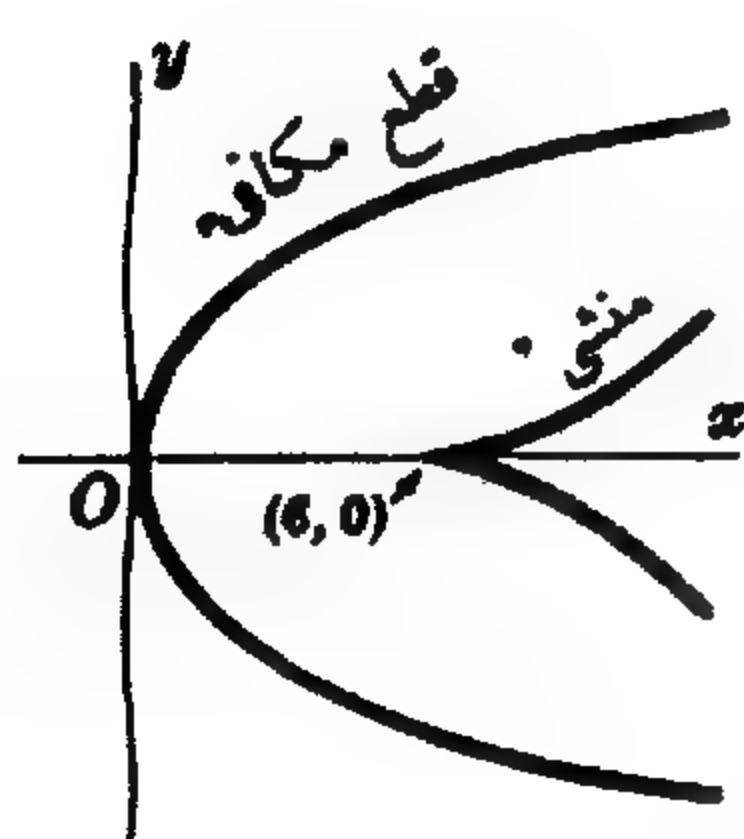
وإن $4y' + 2xy'' + y'' = 0$ عند $(1, 1)$. يكون $y'' = 4/3$.

$$\text{ومن} \quad K = \frac{4/3}{2\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{كذلك} \quad \beta = 1 + \frac{2}{4/3} = \frac{5}{2}, \quad \alpha = 1 - \frac{-1(2)}{4/3} = \frac{5}{2}$$

والمعادلة المطلوبة هى $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ أو $(x-5/2)^2 + (y-5/2)^2 = 9/2$.

١٢ - أوجد معادلة منحنى (المحل الهندسى لمركز الانحناء) القطع المكافئ $y^2 = 12x$

$$\text{عند } P(x, y) \text{ يكون : } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2} = 1 + \frac{3}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{36}{y^3} = -\frac{\sqrt{3}}{2x^{3/2}}$$



شكل ١٧ - ١

$$\alpha = x - \frac{\sqrt{3/x}(1+3/x)}{-\sqrt{3}/2x^{3/2}} = x + \frac{2\sqrt{3}(x+3)}{\sqrt{3}} = 3x+6$$

$$\beta = y + \frac{1+36/y^2}{-36/y^3} = y - \frac{y^3+36y}{36} = -\frac{y^3}{36}$$

ويمكن اعتبار المعادلتين $\alpha = 3x+6$, $\beta = -y^3/36$ المعادلتين البارامتريتين للمنحنى

حيث x و y المرتبطتان بمعادلة القطع المكافئ بارامتريتين . غير أنه من السهل نسبياً

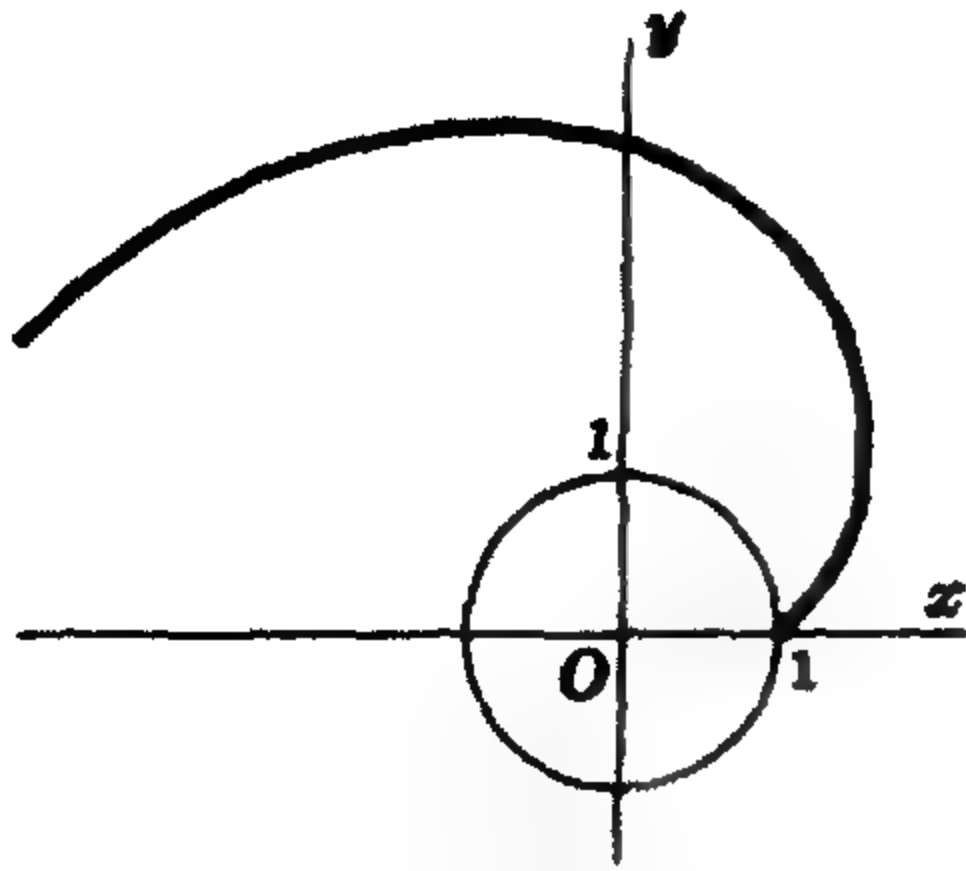
فى هذه المسألة ، حذف البارامتريتين وفى هذه الحالة $x = (\alpha-6)/3$, و $y = -\sqrt[3]{36\beta}$,

وبالتعويض فى معادلة القطع المكافئ نجد أن :

$$81\beta^2 = 4(\alpha-6)^3 \quad \text{أو} \quad (36\beta)^{2/3} = 4(\alpha-6)$$

١٣ - أوجد معادلة منحنى المنحنى $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$,

$$y = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



شكل ١٧ - ٨

عند $P(x, y)$ يكون $\frac{dx}{d\theta} = \theta \cos \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \theta \sin \theta$, $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2 \theta}{\theta \cos \theta} = \frac{\sec^3 \theta}{\theta},$$

$$\alpha = x - \frac{\tan \theta \sec^2 \theta}{(\sec^3 \theta)/\theta} = x - \theta \sin \theta = \cos \theta$$

$$\beta = y + \frac{\sec^2 \theta}{(\sec^3 \theta)/\theta} = y + \theta \cos \theta = \sin \theta$$

والمعادلتان $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$ هما المعادلتان البارامترتان للمنحنى.

مسائل إضافية

في المسائل ١٤ - ١٩ أوجد المشتقة المشار إليها لطول القوس :

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 25 & -14 \\ y^2 = x^2 & -15 \\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} & -16 \\ 6xy = x^4 + 3 & -17 \\ 27ay^2 = 4(x-a)^3 & -18 \\ y = a \cosh x/a & -19 \\ ds/dx = 5/\sqrt{25-x^2}, ds/dy = 5/\sqrt{25-y^2} & : ج \\ ds/dx = \frac{1}{2}\sqrt{4+9x}, ds/dy = \sqrt{4+9y^{2/3}}/3y^{1/3} & : ج \\ ds/dx = (a/x)^{1/2}, ds/dy = (a/y)^{1/2} & : ج \\ ds/dx = (x^4+1)/2x^2 & : ج \\ ds/dx = \sqrt{(x+2a)/3a} & : ج \\ ds/dx = \cosh x/a & : ج \end{array}$$

٢٠ - للمنحنى $x = f(u)$, $y = g(u)$, استنتج $(ds/du)^2 = (dx/du)^2 + (dy/du)^2$.في المسائل ٢١ - ٢٤ أوجد ds/dt .

$$\begin{array}{ll} x = 2 \cos t, y = 3 \sin t & -22 \\ x = \cos^3 t, y = \sin^3 t & -23 \\ x = t^2, y = t^3 & -21 \\ x = \cos t, y = \sin t & -24 \\ \sqrt{4+5 \cos^2 t} & : ج \\ \frac{3}{2} \sin 2t & : ج \\ dx/ds = \cos \tau, dy/ds = \sin \tau & \text{أوجد} \\ \tau = \arctan \left(\frac{dy}{dx} \right) & \text{باستخدام} \\ K = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{3/2}} & \text{أوجد} \end{array}$$

٢٧ - أوجد انحناء كل من المنحنيات التالية عند النقطة المذكورة.

$$\begin{array}{ll} y = x^3/3 \text{ at } x=0, x=1, x=-2 & (أ) \\ x^2 = 4ay \text{ at } x=0, x=2a & (ب) \\ y = \sin x \text{ at } x=0, x=\frac{1}{2}\pi & (ج) \\ y = e^{-x^2} \text{ at } x=0 & (د) \\ 0, \sqrt{2}/2, -4\sqrt{17}/289 & : ج \\ \frac{1}{2a}, \frac{\sqrt{2}}{8a} & : ج \\ 0, -1 & : ج \\ -2 & : ج \end{array}$$

٢٨ - بين (أ) أن انحناء الخط المستقيم يساوى صفر (ب) وأن انحناء الدائرة يساوى عدديا مقلوب نصف

قطرها.

٢٩ - أوجد النقطة التي عندها الانحناء نهاية عظمى لـ (أ) $y = e^x$, (ب) $y = x^3/3$.

$$ج : (أ) x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}, (ب) x = 1/\sqrt{5}$$

٣٠- تتكون خطوط سكك حديدية في مجموعة إحداثية معينة من جزء من الاتجاه السالب للمحور x حتى نقطة الأصل O

ثم من المنحنى الانتقال $y = \frac{1}{4}x^4$ حتى $A(1, \frac{1}{4})$ وبعد ذلك من قوس الدائرة $144x^2 + 144y^2 - 96x - 264y + 9 = 0$. أثبت أن (أ) المنحنى الانتقال يمس المستقيم والمسار الدائري عند نقطتي ارتباطهما (ب) الانحناء للمنحنى الانتقال يساوى الصفر عند O ويساوى مقلوب نصف قطر المقطع الدائري عند A .

٣١- أوجد نصف قطر الانحناء لـ (أ) $x^3 + xy^2 - 6y^3 = 0$ عند $(3, 3)$ (ب) $x = a \operatorname{sech}^{-1} y/a - \sqrt{a^2 - y^2}$

عند (x, y) , (ج) $x = 2a \tan \theta$, $y = a \tan^2 \theta$, (د) $x = a \cos^4 \theta$, $y = a \sin^4 \theta$.

ج : (أ) $5\sqrt{5}$, (ب) $a\sqrt{a^2 - y^2}/|y|$, (ج) $2a |\sec^3 \theta|$, (د) $2a (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^{3/2}$

٣٢- أوجد مركز الانحناء لـ (أ) المسألة ٣١- (أ) (ب) $y = \sin x$ عند نقطة النهاية العظمى.

ج : (أ) $C(-7, 8)$, (ب) $C(\frac{1}{2}\pi, 0)$

٣٣- أوجد معادلة دائرة الانحناء للقطع المكافئ $y^2 = 12x$ عند النقطتين $(0, 0)$ و $(3, 6)$.

ج : $(x - 6)^2 + y^2 = 36$, $(x - 15)^2 + (y + 6)^2 = 288$

٣٤- أوجد معادلة المتثنى لـ :

(أ) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (ب) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (ج) $x = 2 \cos t + \cos 2t$, $y = 2 \sin t + \sin 2t$.

ج : (أ) $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ (ب) $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$

(ج) $\alpha = \frac{1}{3}(2 \cos t - \cos 2t)$, $\beta = \frac{1}{3}(2 \sin t - \sin 2t)$

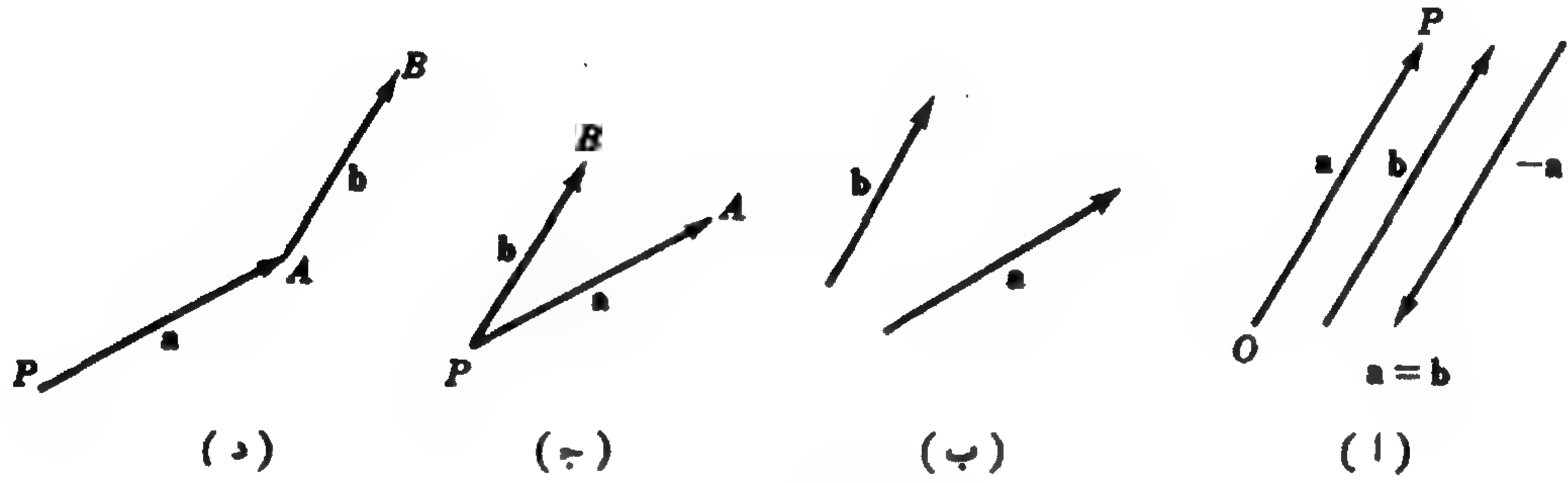
الفصل الثامن عشر

المتجهات المستوية

الكميات العددية والمتجهات : تسمى الكميات مثل الزمن ودرجة الحرارة والسرعة القياسية والتي لها مقادير فقط ، كميات عددية ، أو قياسية . والكميات العددية إذن هي مجرد أعداد تخضع لقوانين الجبر العادية مثل :

$$5 \text{ sec} + 3 \text{ sec} = 8 \text{ sec}$$

أما الكميات مثل القوة والسرعة والتسارع (العجلة) وكمية الحركة والتي لها مقدار واتجاه معا فإنها تسمى كميات متجهة أو متجهات . وتمثل المتجهات هندسياً بأجزاء مستقيمة موجهة (سهم) . واتجاه السهم (الزاوية التي يصنعها المتجه مع مستقيم ثابت من المستوى) هو اتجاه المتجه ، ويمثل طول السهم (بدلالة وحدة قياس نختارها) قياس المتجه أو طوله . سنرمز للمقادير العددية بأحرف من النوع العادي a, b, c, \dots في حين نرمز للمتجهات بأحرف داكثة مثل $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ أو مثل \mathbf{OP} [انظر الشكل ١٨ - ٢ (١)] وسنرمز لطول متجه \mathbf{a} أو \mathbf{OP} بـ $|\mathbf{a}|$ أو $|\mathbf{OP}|$.



شكل ١٨ - ١

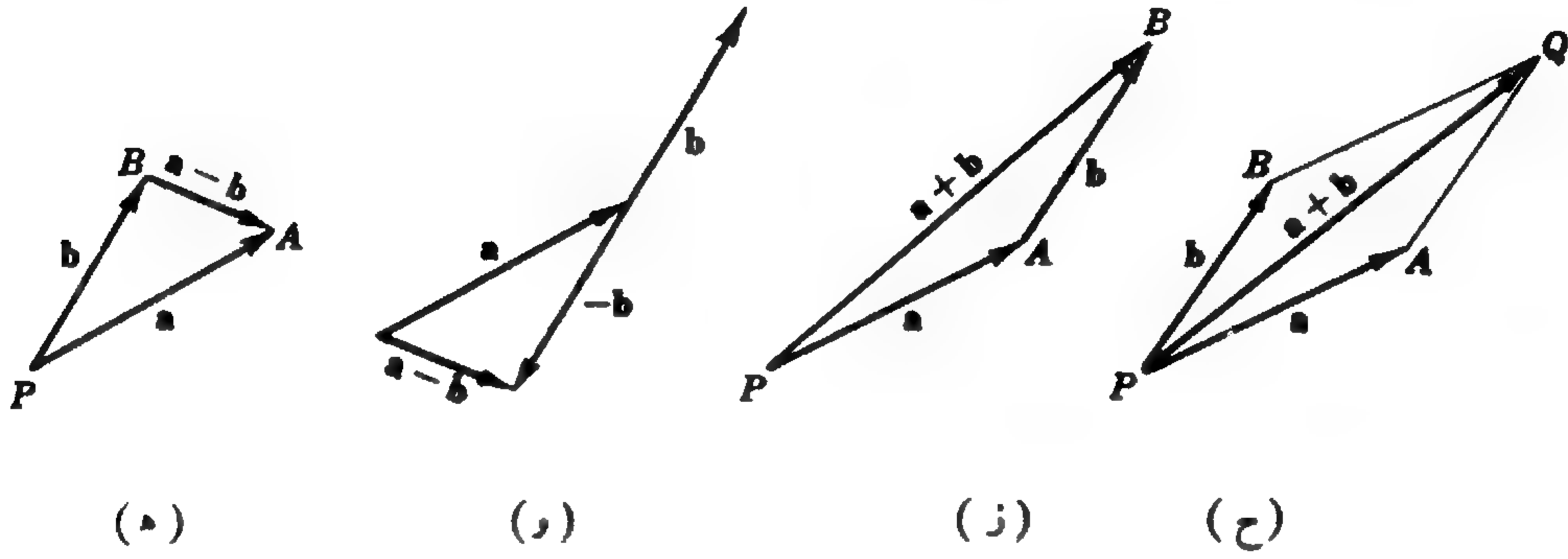
نقول عن متجهين \mathbf{a} و \mathbf{b} إنهما متساويان ، إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه . وأما المتجه الذي له قياس \mathbf{a} ولكن اتجاهه عكس اتجاه \mathbf{a} فإننا نسميه المتجه المعاكس لـ \mathbf{a} ونرمز له بـ $-\mathbf{a}$. وبوجه عام : إذا كان \mathbf{a} متجهاً و k مقداراً عددياً فإن $k\mathbf{a}$ متجه له اتجاه \mathbf{a} ومقداره يساوي k مرة طول \mathbf{a} إذا كان k موجباً ، ولكن اتجاهه يعاكس \mathbf{a} وطوله يساوي $|k|$ مرة طول \mathbf{a} إذا كان k سالباً .

ليس لمتجه مفروض موضع ثابت في المستوى ، ما لم يذكر عكس ذلك ، ولذلك يمكننا تحريك المتجه بإزاحات متوازية في المستوى . وبشكل خاص إذا كان \mathbf{a} و \mathbf{b} متجهين [انظر الشكل ١٨ - ١ (ب)] فإنه يمكن وضع هذين المتجهين بحيث يكون لهما بداية أو نقطة بدء مشتركة P [انظر الشكل ١٨ - ١ (ج)] أو يمكن وضع نقطة بداية المتجه \mathbf{b} على نقطة نهاية المتجه \mathbf{a} [انظر الشكل ١٨ - ١ (د)] .

مجموع وفرق متجهين : إذا كان a و b متجهي الشكل ١٨ - ١ (ب) فإنه يمكن الحصول على مجموعهما أو محصلتهما $a + b$.

(i) بوضع المتجهين كما في الشكل ١٨ - ١ (ج) ثم إكمال متوازي الأضلاع $PAQB$ كما في الشكل ١٨ - ٢ (أ) فيكون المتجه PQ هو المجموع المطلوب.

(ii) بوضع المتجهين كما في الشكل ١٨ - ١ (د) وإكمال المثلث PAB كما في الشكل ١٨ - ٢ (و) وهنا يكون المتجه PB هو المجموع المطلوب.



شكل ١٨ - ٢

ينتج من الشكل ١٨ - ٢ (و) أنه يمكن إزاحة متجهات ثلاثة لتشكيل مثلثا ، شريطة أن يكون أحدهما هو مجموع المتجهين الآخرين أو معاكسا لهذا المجموع.

إذا كان a و b متجهي الشكل ١٨ - ١١ (ب) فإنه يمكن إيجاد الفرق بينهما $a - b$:

(iii) من العلاقة $a - b = a + (-b)$ كما في الشكل ١٨ - ٢ (ز) .

(iv) بوضع المتجهين كما في الشكل ١٨ - ١ (ج) وإكمال المثلث . في الشكل ١٨ - ٢ (ح) نجد أن $BA = a - b$

وإذا كانت a, b, c ثلاثة متجهات و k مقدارا عدديا فإن

$$a + b = b + a \quad - ١ \quad (\text{قانون الإبدال})$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad - ٢ \quad (\text{قانون الدمج})$$

$$k(a + b) = ka + kb \quad - ٣ \quad (\text{قانون التوزيع})$$

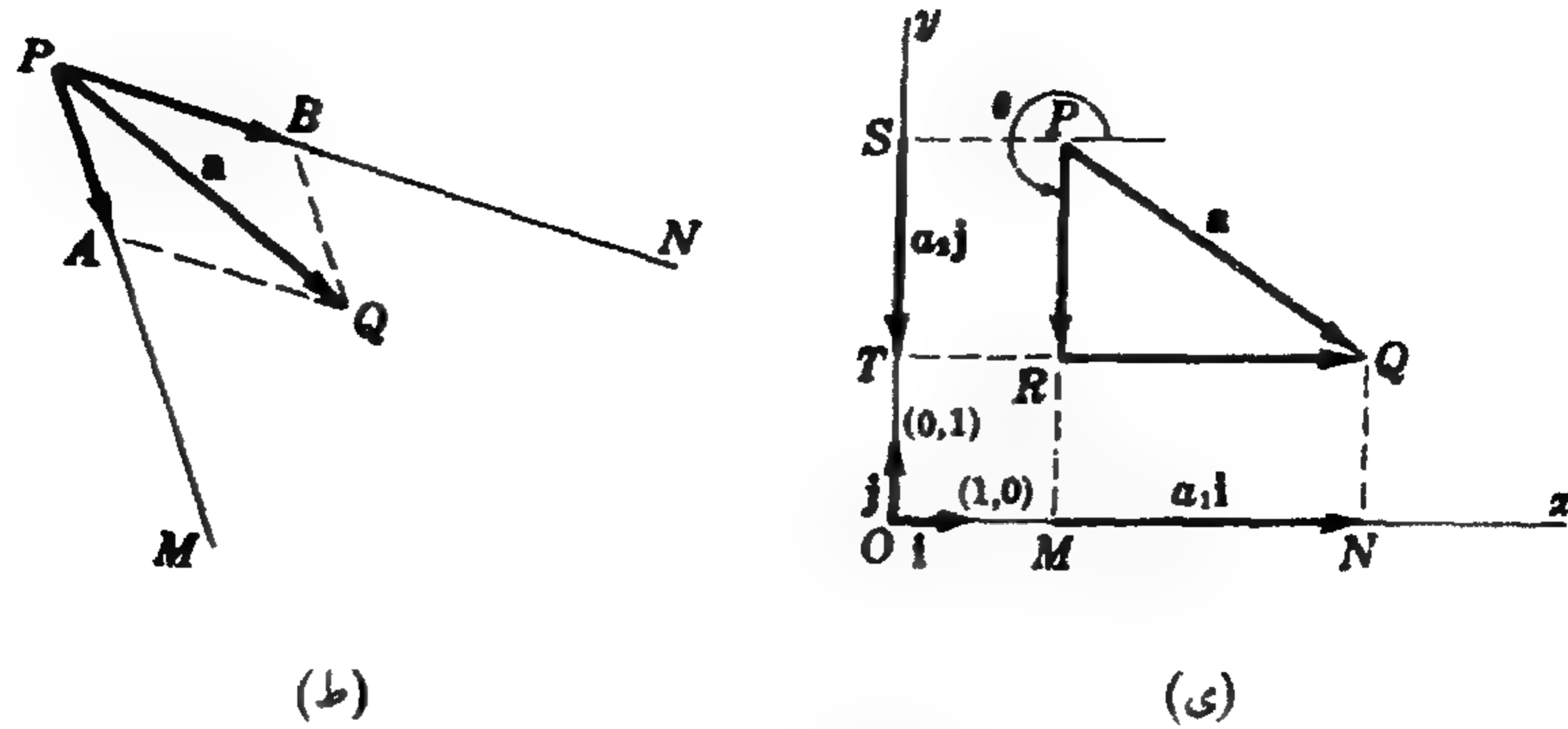
انظر المسائل - ١ ٤

مركبات متجهة : ليكن $a = PQ$ في الشكل ١٨ - ٣ (ط) متجها مفروضا وليكن PM و PN

مستقيمين (اتجاهاين) آخرين مارين بـ P ولننشئ متوازي الأضلاع $PAQB$ فيكون

$$a = PA + PB$$

ويقال عن a إنه حلل في الاتجاهاين PM و PN ونسمي PA و PB المركبتين المتجهتين لـ a في الاتجاهاين PM و PN .



شكل ١٨ - ٣

اعتبر بعد ذلك المتجه \mathbf{a} في مجموعة الإحداثيات المتعامدة [شكل ١٨-٣ (ب)] وله وحدات قياس متساوية على المحورين . لنزمر بـ \mathbf{i} للمتجه من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ وبـ \mathbf{j} للمتجه من $(0,0)$ إلى $(0,1)$. ويكون اتجاه \mathbf{i} هو الاتجاه الموجب للمحور x واتجاه \mathbf{j} هو الاتجاه الموجب للمحور y ، وكلا المتجهين متجهان وحدة ، أي أن مقدار كل منهما يساوي وحدة الأطوال .

من نقطتي البداية P والنهاية Q للمتجه \mathbf{a} إسقط عمودين على المحور x يلاقياه في M و N على الترتيب ونسقط كذلك عمودين آخرين على المحور y يلاقياه في T و S على الترتيب . والآن نجد أن $MN = a_1 \mathbf{i}$ حيث a_1 موجبا . وأن $ST = a_2 \mathbf{j}$ حيث a_2 سالبا .

إذن $MN = RQ = a_1 \mathbf{i}$ ، $ST = PR = a_2 \mathbf{j}$ ، وبالتالي :

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} \quad (١)$$

نسمو $a_1 \mathbf{i}$ و $a_2 \mathbf{j}$ المركبتين المتجهيتين لـ \mathbf{a} (ليس من الضروري هنا ذكر الاتجاهين) ونسمو a_1 و a_2 المركبتين العدديتين أو المركبتين على x و y أو بشكل أكثر بساطة ، نسموهما مركبتى \mathbf{a} .

لنفرض أن اتجاه \mathbf{a} معطى بالزاوية θ ، $0 \leq \theta < 2\pi$ ، المقاسة في الاتجاه المخالف لحركة عقارب الساعة من الاتجاه الموجب لـ x إلى المتجه عندئذ :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (٢)$$

$$\tan \theta = a_2/a_1 \quad (٣)$$

ويتعين الربيع الذى تقع فيه θ بـ :

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos \theta, \quad a_2 = |\mathbf{a}| \sin \theta$$

وإذا كان $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ ، $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$ فنحن نرى :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} - \text{٦} & \mathbf{a} = \mathbf{b} - \text{٤} & \text{إذا (وإذا فقط) كان } a_1 = b_1 \text{ و } a_2 = b_2 \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} - \text{٧} & k\mathbf{a} &= ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j} - \text{٥} \end{aligned}$$

انظر المسألة .

حاصل الضرب العددي أو القياسي : يعرف حاصل الضرب العددي أو القياسي

لمتجهين a و b :

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (٤)$$

حيث θ أصغر زاوية بين المتجهين عندما يرسمان من نقطة بداية مشتركة (انظر الشكل ١٨ - ٤) .

ومن المعادلة (٤) ينتج أن :

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(قانون الإبدال)}$$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} \quad \text{أو} \quad a \cdot a = |a| |a| = |a|^2$$

$$a \cdot b = 0 \quad (i) \quad \text{إذا كان } a = 0, \text{ أو } b = 0, \text{ أو } a \text{ عمودياً على } b$$

$$i \cdot i = j \cdot j = 1; i \cdot j = 0 \quad (ii)$$

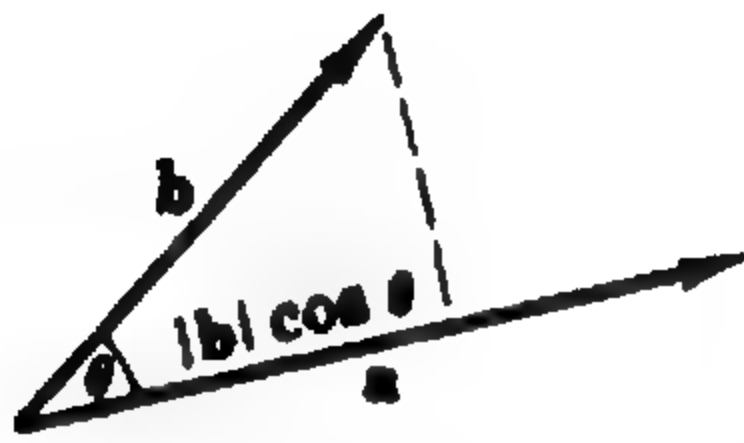
$$a \cdot b = (a_1 i + a_2 j) \cdot (b_1 i + b_2 j) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (iii)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(قانون التوزيع)}$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

المسقط العددي والمتجه : يمكن تسمية a_1 في المعادلة (١) المسقط العددي لـ a

على أي متجه يتفق في الاتجاه مع المحور x الموجب ، بينما يمكن تسمية المتجه a_1 المسقط المتجه لـ a على أي متجه يتفق في الاتجاه مع المحور x الموجب .



شكل ١٨ - ٥

ونجد في المسألة ٧ المسقط العددي $a \cdot \frac{b}{|b|}$ والمسقط المتجه $\left(a \cdot \frac{b}{|b|} \right) \frac{b}{|b|}$ للمتجه a على

متجه آخر b (لاحظ أنه عندما يكون لـ b الاتجاه الموجب للمحور x فإن $\frac{b}{|b|} = i$)

ينتج من ذلك أن :

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad \text{يساوي حاصل ضرب طول } a \text{ في المسقط العددي لـ } b \text{ على } a \text{ أو يساوي حاصل ضرب طول } b \text{ في المسقط العددي لـ } a \text{ على } b \text{ . (أنظر الشكل ١٨ - ٥) .}$$

أنظر المسألتين ٨ - ٩

اشتقاق المتجهات : لنفترض أن المنحنى في الشكل ١٨ - ٦

يمثل بالمعادلتين البارامتريتين .

$$x = f(u), \quad y = g(u)$$

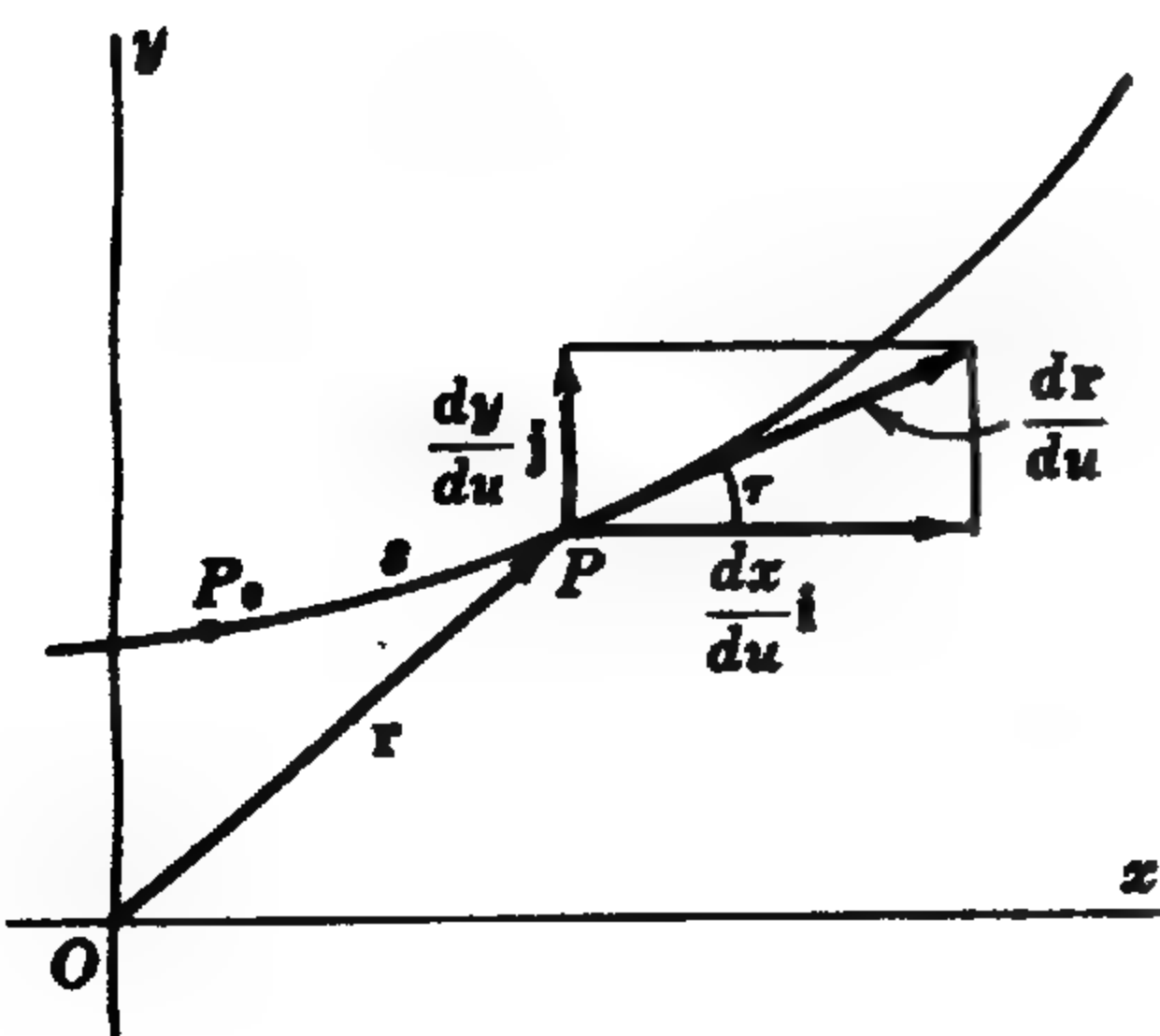
يسمى المتجه

$$r = xi + yj = i f(u) + j g(u)$$

التي يصل نقطة الأصل بالنقطة $P(x, y)$ على المنحنى بمتجه الموضع

أو نصف القطر المتجه لـ P (سنستعمل من الآن الحرف r كرمز

لمتجهات الموضع) .



شكل ١٨ - ٦

وهكذا فإن $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ هو متجه طليق في حين أن المتجه $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ هو متجه يصل نقطة الأصل بالنقطة $P(3, 4)$.

وتعطي مشتقة \mathbf{r} بالنسبة لـ u بالمعادلة .

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} \quad (5)$$

لنرمز بـ s لطول القوس المقاس من نقطة ثابتة P_0 على المنحنى بحيث تزداد s مع تزايد u . فإذا كانت τ الزاوية

التي يصنعها $d\mathbf{r}/du$ مع الاتجاه الموجب للمحور x فإن ميل المنحنى عند P يساوي $\tan = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{dy}{dx}$

إذن $d\mathbf{r}/du$ متجه مقداره :

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} = \frac{ds}{du}$$

واتجاهه هو اتجاه مماس المنحنى عند P . ولقد جرت العادة أن نعتبر النقطة P نقطة بداية لهذا المتجه .

وإذا كان المتغير العددي u هو طول القوس s فإن المعادلة (5) تصبح :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \quad (6)$$

واتجاه \mathbf{t} هنا هو اتجاه τ كما سبق بينا مقداره $\sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} = 1$.

وبالتالي فإن $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ هو متجه وحدة المماس للمنحنى عند P .

وبما أن \mathbf{t} متجه وحدة فإن \mathbf{t} و dt/ds متعامدان (أنظر المسألة ١١) .

لنرمز بـ \mathbf{n} لمتجه الوحدة عند P الذي اتجاهه هو اتجاه dt/ds .

فعندما تتحرك P على المنحنى المبين بالشكل ١٨ - ٧ فإن مقدار \mathbf{t} يبقى

ثابتاً ، ولذلك فإن dt/ds تعطي قياس معدل التغير لإتجاه \mathbf{t} . وبالتالي فإن

مقدار dt/ds عند النقطة P هو القيمة العددية للانحناء عند P ، أي أن $|dt/ds| = |K|$.

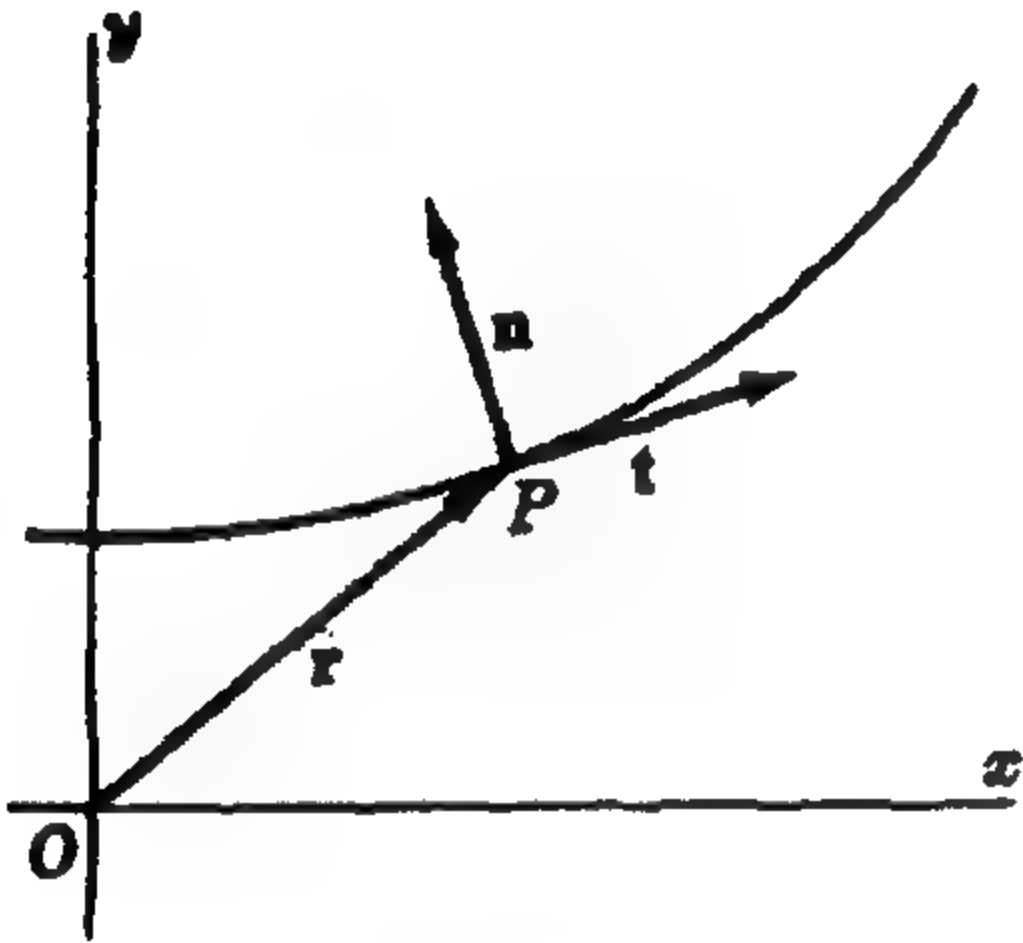
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\mathbf{n}$$

أنظر المسائل (١٠ - ١٣)

مسائل محلولة

١ - برهن أن $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

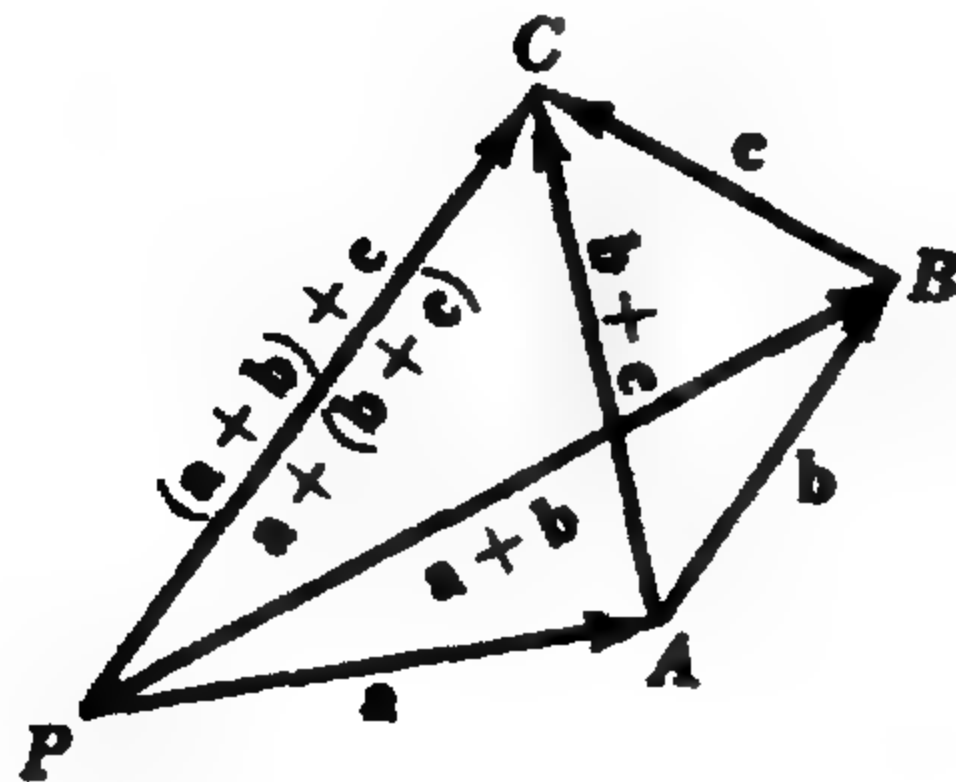
يتضح من الشكل ١٨ - ٨ أن $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$



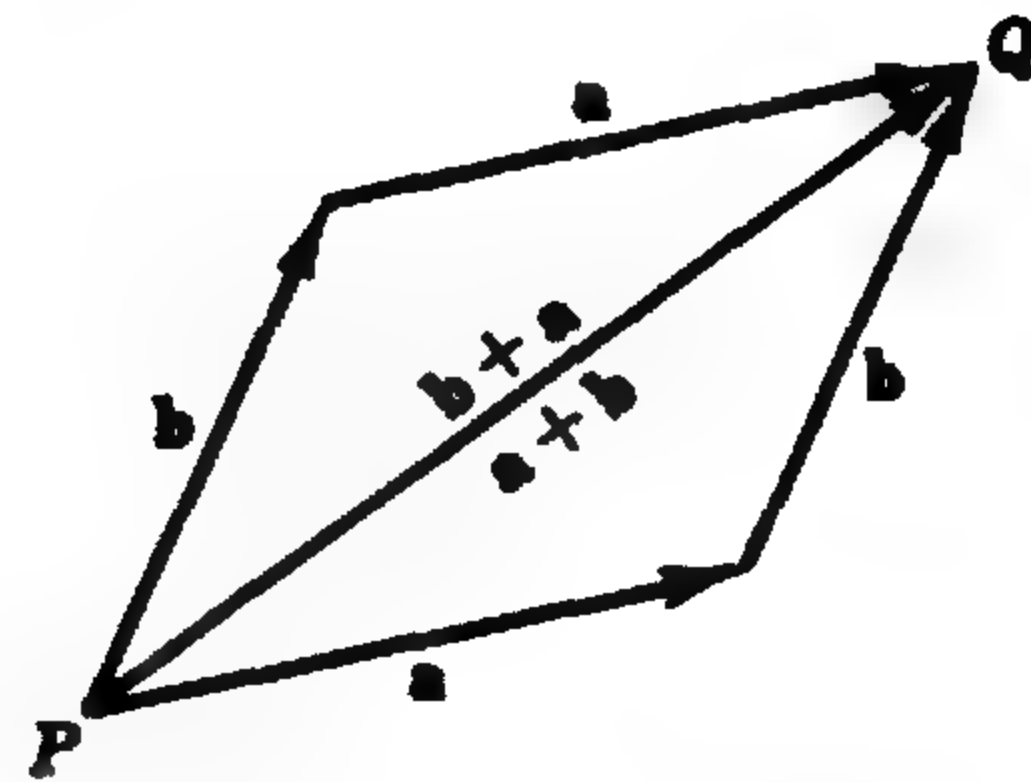
شكل ١٨ - ٧

٧- برهن أن $(a+b)+c = a+(b+c)$

يتضح من الشكل ١٨-٩ أن $PC = PB + BC = (a+b) + c$ وكذلك $PC = PA + AC = a + (b+c)$



شكل ١٨-٩



شكل ١٨-٨

٣- لتكن a, b, c ثلاثة متجهات منبعثة من نقطة P بحيث تقع نهاياتها A, B, C على مستقيم واحد كما في الشكل (١٨-١٠) فإذا قسمت C الجزء BA بنسبة $x:y$ حيث $x+y=1$ فإنه يكون :

$$c = PB + BC = b + x(a-b) = xa + (1-x)b = xa + yb$$

وعلى سبيل المثال ، إذا نصفت C الجزء BA فيكون $c = \frac{1}{2}(a+b)$ و $BC = \frac{1}{2}(a-b)$.

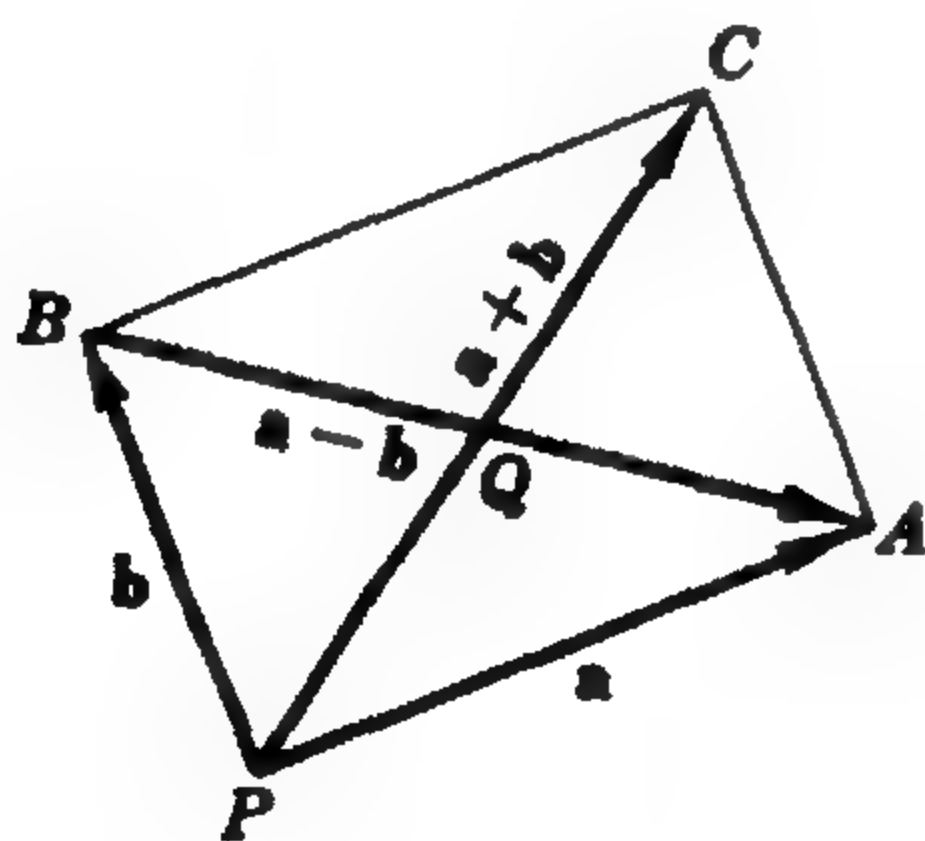
٤- برهن أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

نفرض أن القطرين يتقاطعان عند Q كما هو مبين في الشكل (١٨-١١) .

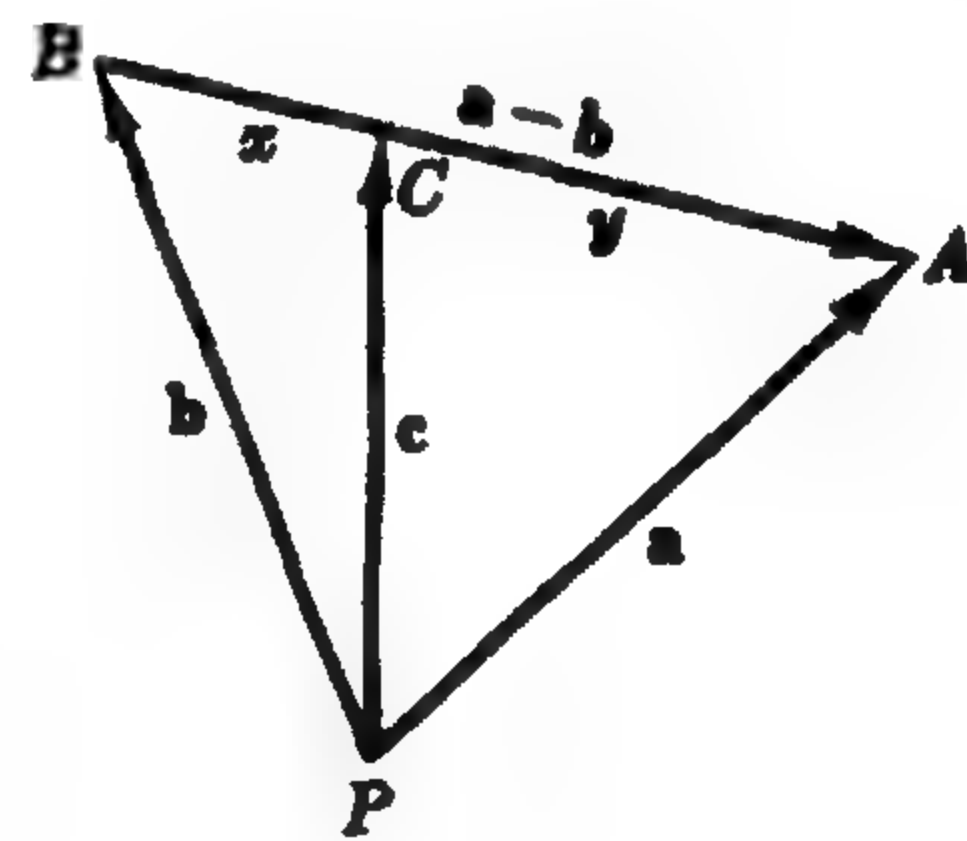
بما أن

$$b = x(a+b) - y(a-b) = (x-y)a + (x+y)b \quad \text{أو} \quad PB = PQ + QB = PQ - BQ$$

فإن $x+y=1$ و $x-y=0$ وبالتالي $x=y=1/2$ والنقطة Q هي منتصف كل من القطرين .



شكل ١٨-١١



شكل ١٨-١٠

٥- للمجهين $a = 3i + 4j$ و $b = 2i - j$ أوجد مقدار اتجاه كل من a و b

(ب) $a+b$ (ج) $b-a$

(١) بما أن $a = 3i + 4j$ إذن $\cos \theta = a_1/|a| = 3/5$ ، $\sin \theta = a_2/|a| = 4/5$ ، $\tan \theta = a_2/a_1 = 4/3$ ، $\theta = \tan^{-1}(4/3) = 53^\circ 8'$

والزاوية θ واقعة في الربع الأول وتساوي $53^\circ 8'$

بما أن $b = 2i - j$ إذن $\cos \theta = b_1/|b| = 2/\sqrt{5}$ ، $\sin \theta = b_2/|b| = -1/\sqrt{5}$ ، $\tan \theta = -1/2$ ، $\theta = 360^\circ - 26^\circ 34' = 333^\circ 26'$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}. \quad (\text{ب})$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}; \tan \theta = 3/5, \cos \theta = 5/\sqrt{34}; \theta = 30^\circ 58'.$$

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}. \quad (\text{ج})$$

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{26}; \tan \theta = 5, \cos \theta = -1/\sqrt{26}; \theta = 258^\circ 41'.$$

٦- برهن أن المستقيم النصف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين عمودي على القاعدة [في الشكل ١٨ - ١٢.] $[|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|]$.

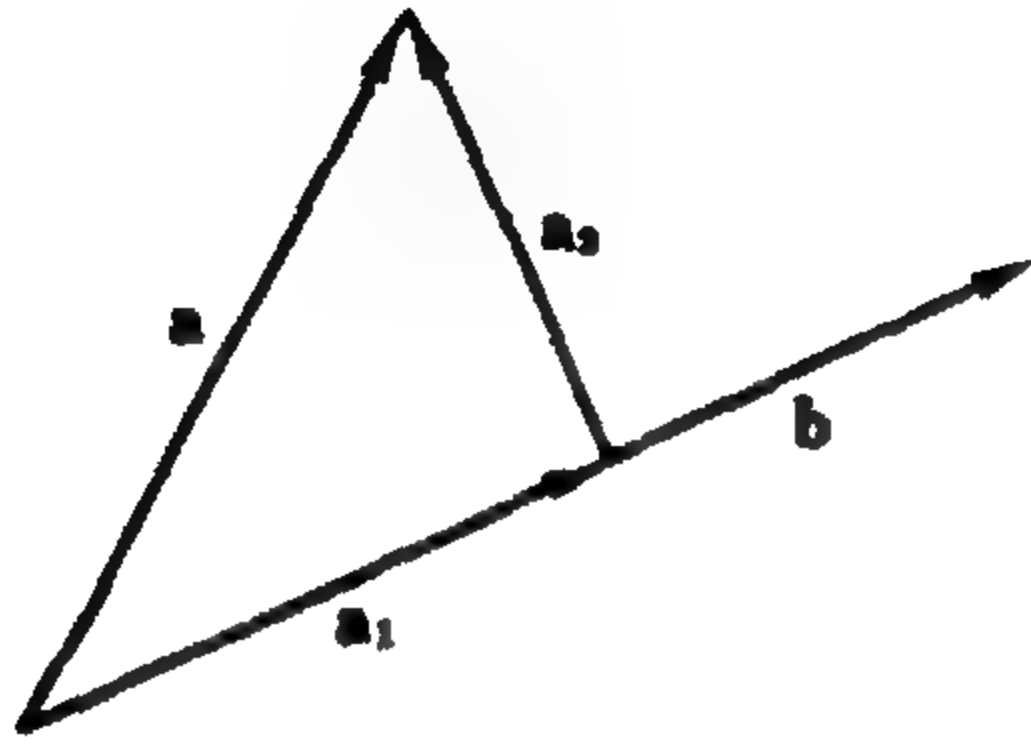
بما أن \mathbf{m} منتصف للقاعدة فإنه يكون حسب المسألة ٣.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

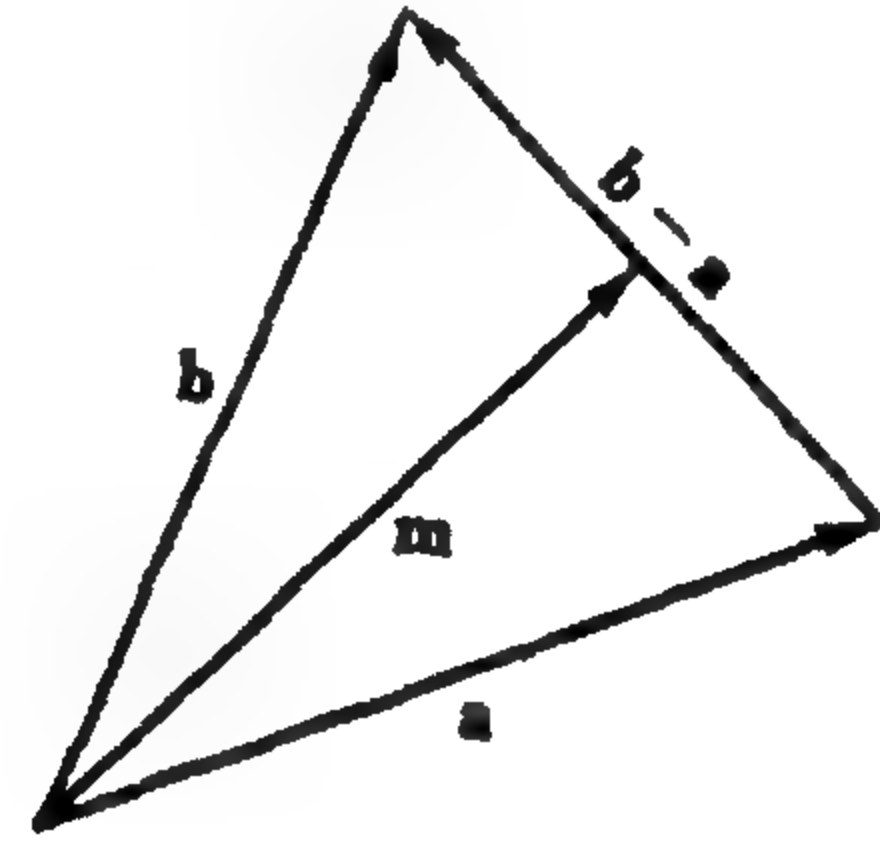
$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{ومن ثم}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 0$$

وهذا ما نريد برهانه.



شكل ١٨ - ١٣



شكل ١٨ - ١٢

٧- حلل \mathbf{a} إلى مركبتين \mathbf{a}_1 و \mathbf{a}_2 الأولى موازية لمتجه مفروض \mathbf{b} والثانية عمودية عليه.

من الشكل ١٨ - ١٣ أعلاه نجد $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b}$, و $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = 0$. إذن :

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - c\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} - c\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - c|\mathbf{b}|^2 = 0$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - c\mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} \quad \text{إذن} \quad c = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}.$$

والمعد $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ هو المسقط المدي لـ \mathbf{a} على \mathbf{b} ؛ وأن المتجه $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ هو المسقط المتجه لـ \mathbf{a} على \mathbf{b} .

٨- حلل $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ إلى مركبتين \mathbf{a}_1 و \mathbf{a}_2 الأولى موازية لـ $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ والثانية عمودية عليه.

$$c = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{12 + 3}{10} = \frac{3}{2}. \quad \text{حسب المسألة ٧ يكون}$$

$$\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}.$$

٩- أوجد الشغل اللازم بذله لتحريك جسم على طول المتجه $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ إذا كانت القوة المؤثرة تعطى بالعلاقة

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

الشغل المبذول = المركبة المدي لـ \mathbf{b} على \mathbf{a} (المسافة المقطوعة)

$$= (|\mathbf{b}| \cos \theta) |\mathbf{a}| = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 10$$

١٠- إذا كان $\mathbf{a} = \mathbf{i}f_1(u) + \mathbf{j}f_2(u)$, و $\mathbf{b} = \mathbf{i}g_1(u) + \mathbf{j}g_2(u)$, فبرهن أن $\frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{du}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (if_1 + jf_2) \cdot (ig_1 + jg_2) = f_1g_1 + f_2g_2, \\ \frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= f_1'g_1 + f_1g_1' + f_2'g_2 + f_2g_2' \quad \left(f_1' = \frac{df_1(u)}{du}\right) \\ &= (f_1'g_1 + f_2'g_2) + (f_1g_1' + f_2g_2') \\ &= (if_1' + jf_2') \cdot (ig_1 + jg_2) + (if_1 + jf_2) \cdot (ig_1' + jg_2') = \frac{d\mathbf{a}}{du} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{du} \end{aligned}$$

١١- إذا كانت $\mathbf{a} = if_1(u) + jf_2(u)$ ذا مقدار ثابت فبرهن أن \mathbf{a} و $d\mathbf{a}/du$ متعامدان .

استنادا إلى المسألة ١٠ فإننا نحصل من $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \text{ثابت} \neq 0$ على $\frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{du} = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{du} = 0$.

وبالتالى فإن $\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{du} = 0$ ومنه يكون المتجهان \mathbf{a} و $\frac{d\mathbf{a}}{du}$ متعامدان . وعلى هذا فإن مماس الدائرة عند إحدى نقاطها P عمودى على نصف القطر المار بـ P .

١٢- إذا كان $\mathbf{r} = i \cos^2 \theta + j \sin^2 \theta$ فأوجد t .

$$d\mathbf{r}/d\theta = -i \sin 2\theta + j \sin 2\theta$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \quad \frac{ds}{d\theta} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}} = \sqrt{2} \sin 2\theta$$

١٣- إذا كان $x = a \cos^2 \theta, y = a \sin^2 \theta$ فأوجد t و n عندما $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= ai \cos^2 \theta + aj \sin^2 \theta \\ d\mathbf{r}/d\theta &= -2ai \cos \theta \sin \theta + 2aj \sin \theta \cos \theta \\ ds/d\theta &= |d\mathbf{r}/d\theta| = 2a \sin \theta \cos \theta \\ t &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = -i \cos \theta + j \sin \theta \\ \frac{dt}{ds} &= (i \sin \theta + j \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{3a \cos \theta} i + \frac{1}{3a \sin \theta} j \\ &\text{فإذا كان } \theta = \frac{1}{4}\pi \text{ فإنه يكون :} \end{aligned}$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{3a}i + \frac{\sqrt{2}}{3a}j, \quad |K| = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{2}{3a}, \quad n = \frac{1}{|K|} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j.$$

١٤- بين أن المتجه $\mathbf{a} = ai + bj$ عمودى على المستقيم $ax + by + c = 0$.

لتكن $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين مختلفتين على المستقيم فعندئذ يكون $ax_1 + by_1 + c = 0$ و $ax_2 + by_2 + c = 0$ وإذا طرحنا الأولى من الثانية نجد :

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= 0 \\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= (ai + bj) \cdot [(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j] \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 0 \end{aligned}$$

والمتجه \mathbf{a} عمودى على المستقيم .

١٥- استخدم طرق المتجهات لتحصل على :

(١) معادلة المستقيم المار بالنقطة $P_1(2, 3)$ والعمودى على المستقيم $x + 2y + 5 = 0$.

(ب) معادلة المستقيم المار بالنقطتين $P_1(2, 3)$ و $P_2(5, -1)$.

خذ نقطة $P(x, y)$ ما أخرى على المستقيم المطلوب.

(١) إن المتجه $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ وفق المسألة ١٤ عمودى على $x + 2y + 5 = 0$. وبالتالي فإن المتجه $\mathbf{P}_1\mathbf{P} = (x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j}$ مواز لـ \mathbf{a} أى أن :

$$(x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j} = k(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

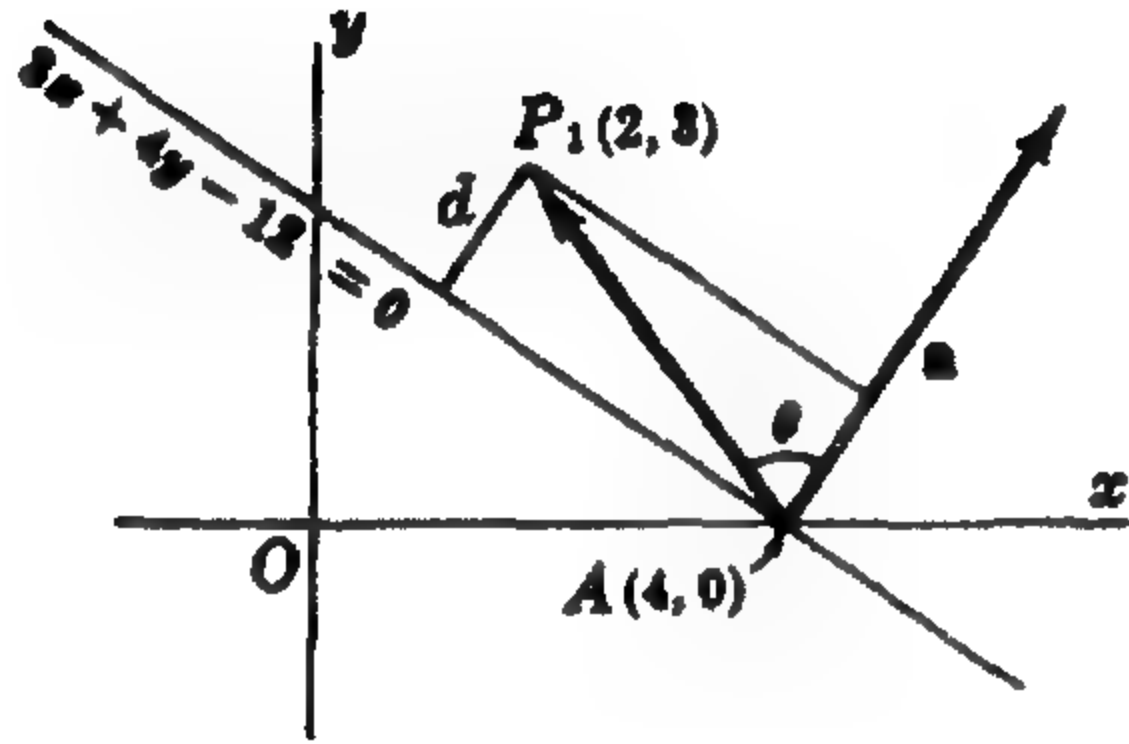
حيث k متغير عددي . وبمساواة المركبات نجد أن $x-2 = k$, $y-3 = 2k$. وبحذف k نجد المعادلة المطلوبة $2x - y - 1 = 0$ أو $y - 3 = 2(x - 2)$

(ب) لدينا $\mathbf{P}_1\mathbf{P} = (x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j}$ و $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

وحيث أن $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ عمودى على $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ وبالتالي على $\mathbf{P}_1\mathbf{P}$ فإن المعادلة المطلوبة هي

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot [(x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j}] = 0 \quad \text{أو} \quad 4x + 3y - 17 = 0$$

١٦ - استخدم طرق المتجهات لتحصل على بعد النقطة $P_1(2, 3)$ عن المستقيم $3x + 4y - 12 = 0$.



لننشىء من أية نقطة ملائمة على المستقيم ، ولتكن $A(4, 0)$ متجهها $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ عموديا على المستقيم . فيكون البعد المطلوب هو :

$$d = |\mathbf{AP}_1| \cos \theta$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{AP}_1 = |\mathbf{a}| |\mathbf{AP}_1| \cos \theta = |\mathbf{a}| d; \quad \text{وحيث أن}$$

$$\text{فإنه} \quad d = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{AP}_1}{|\mathbf{a}|} = \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{5} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5}$$

مسائل إضافية



شكل ١٨ - ١٥

١٧ - إذا كانت لدينا المتجهات $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (أنظر الشكل ١٨-١٥) فأنشىء :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad (\text{د}) \quad 2\mathbf{a} \quad (\text{أ})$$

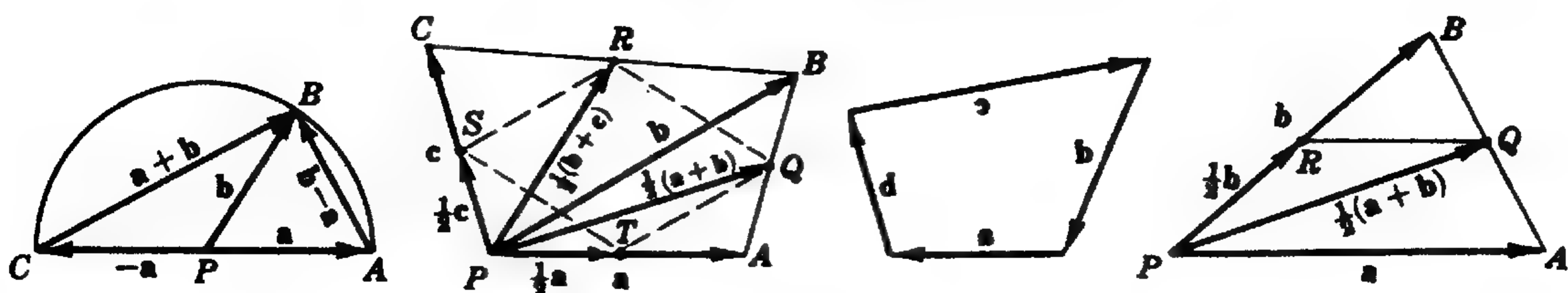
$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} \quad (\text{هـ}) \quad -3\mathbf{b} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} \quad (\text{ج})$$

١٨ - برهن أن الخط المستقيم الذى يصل بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث ويساوى نصفه . أنظر الشكل ١٨-١٦ .

١٩ - إذا كانت $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ الأضلاع المتتالية لشكل رباعى فبرهن أن $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$. أنظر الشكل ١٨-١٧ .
إرشاد : ليكن P و Q رأسين غير متالين . احسب \mathbf{PQ} بطريقتين مختلفتين .

٢٠ - برهن أنه إذا وصلنا منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعى فإن الشكل الرباعى الناتج هو متوازى أضلاع . أنظر الشكل ١٨-١٨ .



شكل ١٨ - ١٩

شكل ١٨ - ١٨

شكل ١٨ - ١٧

شكل ١٨ - ١٦

٢١- برهن باستخدام الشكل الذي فيه $|a| = |b|$ هو نصف قطر دائرة ، أن الزاوية المحيطية المقابلة لنصف دائرة هي زاوية قائمة . أنظر الشكل ١٨ - ١٩ .

٢٢- أوجد طول كل من المتجهات التالية والزاوية التي يصنعها مع المحور x الموجب :

(١) $i + j$, (ب) $-i + j$, (ج) $i + \sqrt{3}j$, (د) $i - \sqrt{3}j$.

ج : (١) $\sqrt{2}; \theta = \frac{1}{4}\pi$, (ب) $\sqrt{2}; \theta = \frac{3}{4}\pi$, (ج) $2; \theta = \frac{\pi}{3}$, (د) $2; \theta = \frac{5\pi}{3}$.

٢٣- بين أنه إذا كان u هو المتجه الناتج عن دوران متجه الوحدة i في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة بزاوية مقدارها θ فإن $u = i \cos \theta + j \sin \theta$.

٢٤- استخدم قانون جيبس التمام في المثلثات لتحصل على $a \cdot b = |a||b| \cos \theta = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2)$.

٢٥- اكتب كلا من المتجهات التالية على الشكل $ai + bj$:

(١) المتجه الذي يصل نقطة الأصل بالنقطة $P(2, -3)$ (ب) المتجه الذي يصل بين النقطتين $P_1(2, 3)$ و $P_2(4, 2)$

(ج) المتجه الذي يصل النقطة $P_2(4, 2)$ بالنقطة $P_1(2, 3)$ (د) متجه الوحدة في الاتجاه $3i + 4j$ (هـ) المتجه الذي مقداره 6 واتجاهه 120° .

ج : (١) $2i - 3j$, (ب) $2i - j$, (ج) $-2i + j$, (د) $\frac{2}{5}i + \frac{3}{5}j$, (هـ) $-3i + 3\sqrt{3}j$.

٢٦- استخدم طرق المتجهات لتحصل على معادلة المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$.

٢٧- إذا كانت $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(1, 5)$ ثلاثة رؤوس من متوازي الأضلاع $OAPB$, فام P إحداثيا .

٢٨- (١) أوجد k بحيث يكون $a = 3i - 2j$ عموديا على $b = i + kj$.

(ب) أوجد متجها عموديا على $a = 2i + 5j$.

٢٩- برهن الخواص ٨ - ١٥ للضرب القياسي.

٣٠- أوجد المسقط المتجه والمسقط العددي لـ b على a إذا علمت :

(١) $a = i - 2j$, $b = -3i + j$, (ب) $a = i - 2j$, $b = 10i + 2j$, $a = 2i + 3j$.

ج : (١) $-i + 2j, -\sqrt{5}$, (ب) $4i + 6j, 2\sqrt{13}$.

٣١- بين أن ثلاثة متجهات a, b, c تشكل مثلثا بعد إزاحات متوازية بشرط

(١) أن يكون أحد المتجهات هو مجموع المتجهين الآخرين أو (ب) أن يكون $a + b + c = 0$.

٣٢- بين أن $a = 3i - 6j, b = 4i + 2j, c = -7i + 4j$ هي أضلاع مثلث قائم. تحقق من أن منتصف الوتر متساوى الأبعاد عن رؤوس المثلث.

٣٣- أوجد متجه وحدة المماس $t = dr/ds$ بفرض أن :

(١) $r = 4i \cos \theta + 4j \sin \theta$; (ب) $r = e^{\theta}i + e^{-\theta}j$; (ج) $r = \theta i + \theta^2 j$.

ج : (١) $-i \sin \theta + j \cos \theta$, (ب) $\frac{e^{\theta}i - e^{-\theta}j}{\sqrt{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}}$, (ج) $\frac{i + 2\theta j}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}$

٣٤- (١) أوجد n لمنحنى المسألة (١). (ب) أوجد n لمنحنى المسألة (ج).

(ج) أوجد t و n بفرض أن $x = \cos \theta + \theta \sin \theta, y = \sin \theta - \theta \cos \theta$.

ج : (١) $i \cos \theta - j \sin \theta$, (ب) $\frac{-2\theta}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}i + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}j$, (ج) $t = i \cos \theta + j \sin \theta, n = -i \sin \theta + j \cos \theta$

الفصل التاسع عشر

الحركة الخطية الانحنائية

السرعة في الحركة الخطية الانحنائية :

لتكن نقطة تتحرك على منحنى معادته $x = f(t)$, $y = g(t)$.

حيث t الزمن . باشتقاق متجه الموضع :

$$\mathbf{r} = ix + jy \quad (1)$$

بالنسبة لـ t نحصل على متجه السرعة .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} = iv_x + jv_y \quad (2)$$

حيث $v_x = dx/dt$ و $v_y = dy/dt$.

ويعطى مقدار v بـ

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ds}{dt}$$

وأما اتجاه v عند P فهو المماس للمسار عند P كما هو موضح في الشكل ١٩ - ١ . وإذا رمزنا بـ τ لاتجاه v

(الزاوية بين v والمحور x الموجب) فإن $\tan \tau = v_y/v_x$ حيث يتعين الربع الذي تقع فيه بالعلاقين $v_x = |\mathbf{v}| \cos \tau$

و $v_y = |\mathbf{v}| \sin \tau$.

التسارع (العجلة) في الحركة الخطية الانحنائية :

باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة لـ t نحصل على متجه التسارع :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = i \frac{d^2x}{dt^2} + j \frac{d^2y}{dt^2} = ia_x + ja_y \quad (3)$$

حيث $a_x = d^2x/dt^2$ و $a_y = d^2y/dt^2$.

ويعطى مقدار a بـ

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

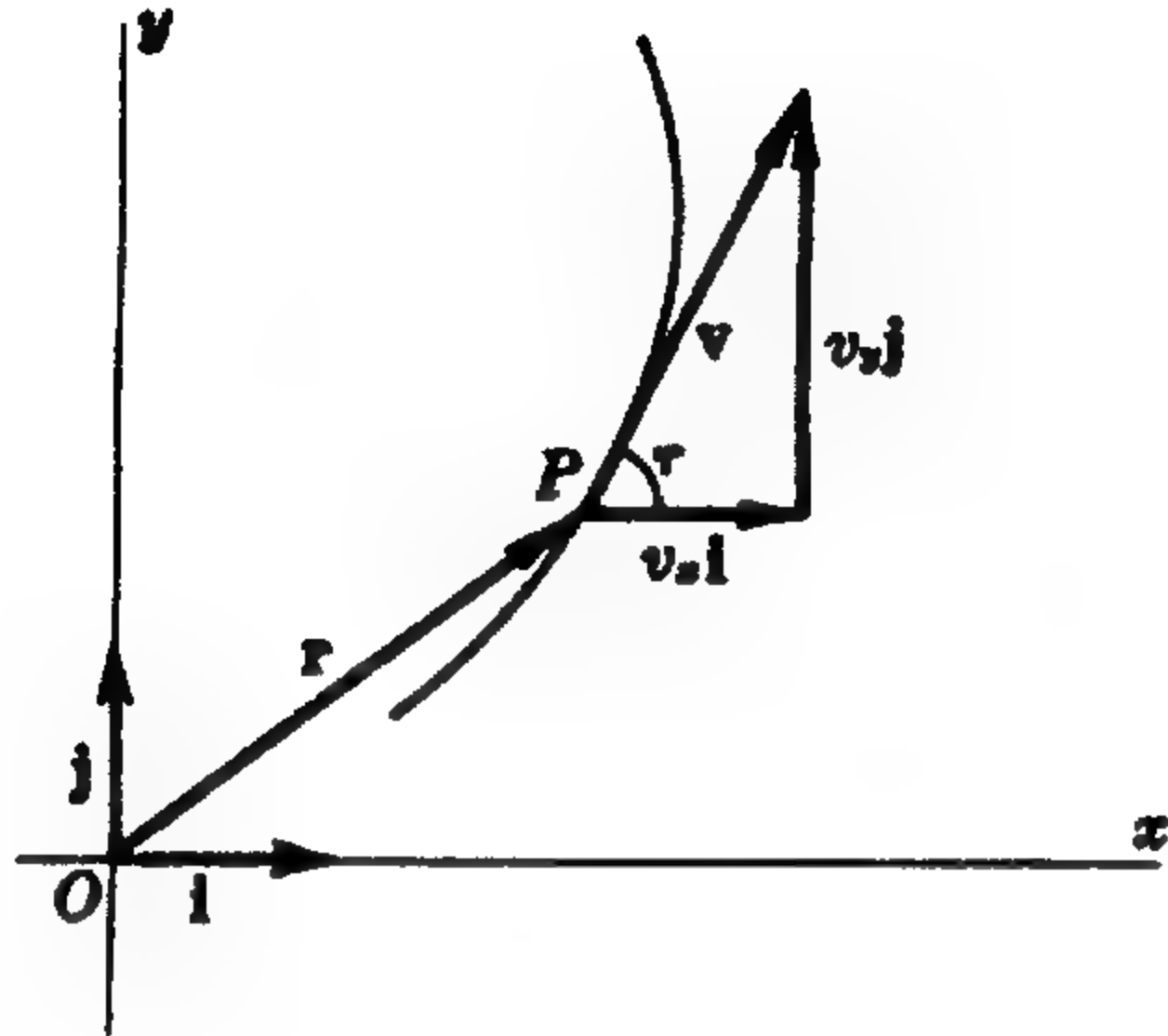
وأما الاتجاه ϕ لـ a فيعطى بـ $\tan \phi = a_y/a_x$ حيث يتعين

الربع الذي تقع فيه بالمعادلتان $a_x = |\mathbf{a}| \cos \phi$ و $a_y = |\mathbf{a}| \sin \phi$.

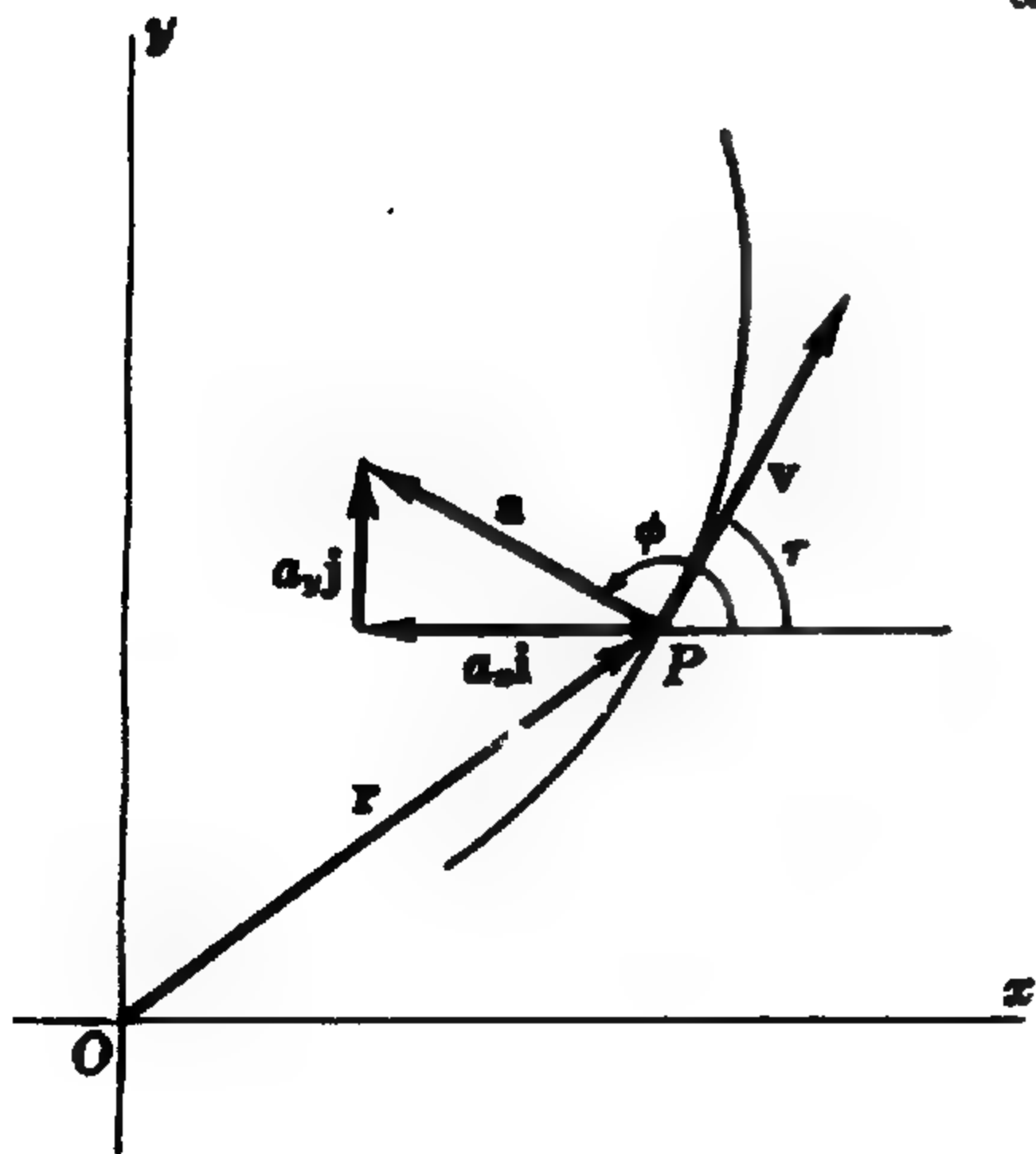
أنظر الشكل ١٩ - ٢ .

منعطى في المسائل ١ - ٣ حلين يستعمل أحدهما متجه الموضع (١)

ومتجه السرعة (٢) ومتجه التسارع (٣)



شكل ١٩ - ١



شكل ١٩ - ٢

وهذا الحل يتطلب تمثيلا بارامتريا للمسار . في حين يستخدم الحل الآخر ، الأكثر شيوعا ، المركبات x و y لهذه المتجهات دون اللجوء إلى التمثيل البارامترى للمنحنى . والحلان ، بالطبع ، لا يختلفان عن بعضهما من حيث الأساس .
أنظر المسائل ١ - ٣

المركبتان المماسية والعمودية للتسارع : من المعادلة (٦) في الفصل الثامن عشر نجد أن :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} \frac{ds}{dt} \quad (٤)$$

ومن

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{t} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dt}{dt} \frac{ds}{dt} \quad (٥)$$

$$= \mathbf{t} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dt}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \mathbf{t} \frac{d^2s}{dt^2} + |K| \mathbf{n} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

وذلك استنادا إلى المعادلة (٧) من الفصل الثامن عشر .

تطينا المعادلة (٥) تحليل متجه التسارع عند النقطة P إلى مركبتين إحداهما في اتجاه المماس والأخرى في الاتجاه العمودي عند هذه النقطة ، فإذا أشرنا إلى هاتين المركبتين بـ a_t و a_n على الترتيب فإن مقدارهما يعطى بالمعادلتين

$$|a_n| = \frac{(ds/dt)^2}{R} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \quad \text{و} \quad |a_t| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|$$

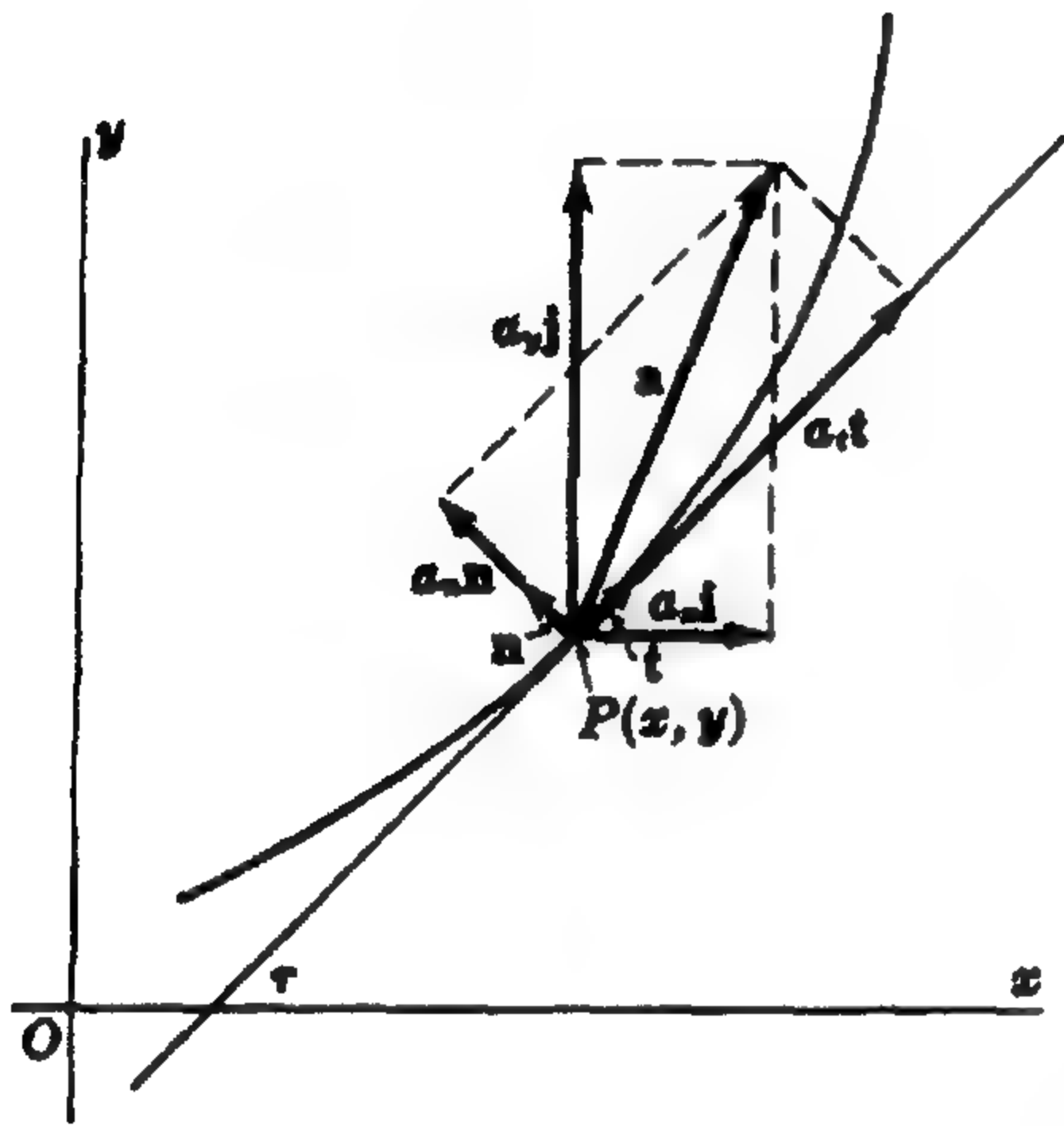
حيث R نصف قطر انحناء المسار عند P . انظر الشكل ١٩ - ٣

وبما أن $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2$ إذن :

$$a_n^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_t^2$$

وهذه العلاقة تدلنا على طريقة أخرى لتحديد $|a_n|$.

أنظر المسائل ٤ - ٨



شكل ١٩ - ٣

مسائل محلولة

- ناقش الحركة المعطاة بالمعادلتين $x = \cos 2\pi t$, $y = 3 \sin 2\pi t$. أوجد مقدار واتجاه كل من متجهي السرعة والتسارع عندما (١) $t = 1/6$ و (ب) $t = 2/3$.

أن الحركة على القطع الناقص $9x^2 + y^2 = 9$. فإذا بدأنا من $t = 0$ عند $(1, 0)$ فإن النقطة المتحركة تتحرك على المنحنى في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة .

الحل الأول :

$$\mathbf{r} = ix + jy = i \cos 2\pi t + 3j \sin 2\pi t$$

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = iv_x + jv_y = -2\pi i \sin 2\pi t + 6\pi j \cos 2\pi t$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = ia_x + ja_y = -4\pi^2 i \cos 2\pi t - 12\pi^2 j \sin 2\pi t$$

(أ) وعندما $t=1/6$ يكون :

$$\mathbf{a} = -2\pi^2\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\pi^2\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{v} = -\sqrt{3}\pi\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(-\sqrt{3}\pi)^2 + (3\pi)^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tau = 120^\circ \quad , \quad \tan \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(-2\pi^2)^2 + (-6\sqrt{3}\pi^2)^2} = 4\sqrt{7}\pi^2$$

$$\phi = 259^\circ 6' \quad , \quad \tan \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7},$$

(ب) وعندما $t=2/3$ يكون :

$$\mathbf{a} = 2\pi^2\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\pi^2\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{v} = \sqrt{3}\pi\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j}$$

$$\tau = 5\pi/3 \quad , \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\pi; \quad \tan \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = 1/2,$$

$$\phi = 79^\circ 6' \quad , \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\pi^2; \quad \tan \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = 1/2\sqrt{7},$$

الحل الثاني :

$$x = \cos 2\pi t, \quad v_x = dx/dt = -2\pi \sin 2\pi t, \quad a_x = d^2x/dt^2 = -4\pi^2 \cos 2\pi t$$

$$y = 3 \sin 2\pi t, \quad v_y = dy/dt = 6\pi \cos 2\pi t, \quad a_y = d^2y/dt^2 = -12\pi^2 \sin 2\pi t$$

(أ) عندما $t = 1/6$ يكون :

$$v_x = -\sqrt{3}\pi, \quad v_y = 3\pi, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tan \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad , \quad \tau = 120^\circ$$

$$a_x = -2\pi^2, \quad a_y = -6\sqrt{3}\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\sqrt{7}\pi^2$$

$$\tan \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad , \quad \phi = 259^\circ 6'$$

(ب) وعندما $t = 2/3$ يكون :

$$v_x = \sqrt{3}\pi, \quad v_y = -3\pi, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tan \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = \frac{1}{2}, \quad , \quad \tau = 5\pi/3$$

$$a_x = 2\pi^2, \quad a_y = 6\sqrt{3}\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\pi^2$$

$$\tan \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = 1/2\sqrt{7}, \quad , \quad \phi = 79^\circ 6'$$

٧ - تتحرك نقطة على الدائرة $x^2 + y^2 = 625$ في اتجاه مخالف لحركة

عقارب الساعة بمعدل $|\mathbf{v}| = 15$. أوجد $|\mathbf{a}|$, τ , و ϕ عند

(أ) النقطة (20, 15) وعند (ب) النقطة $(5, -10\sqrt{6})$

ارجع إلى الشكل ١٩ - ٤ .

الحل الأول : لدينا .

$$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 225 \quad (I)$$

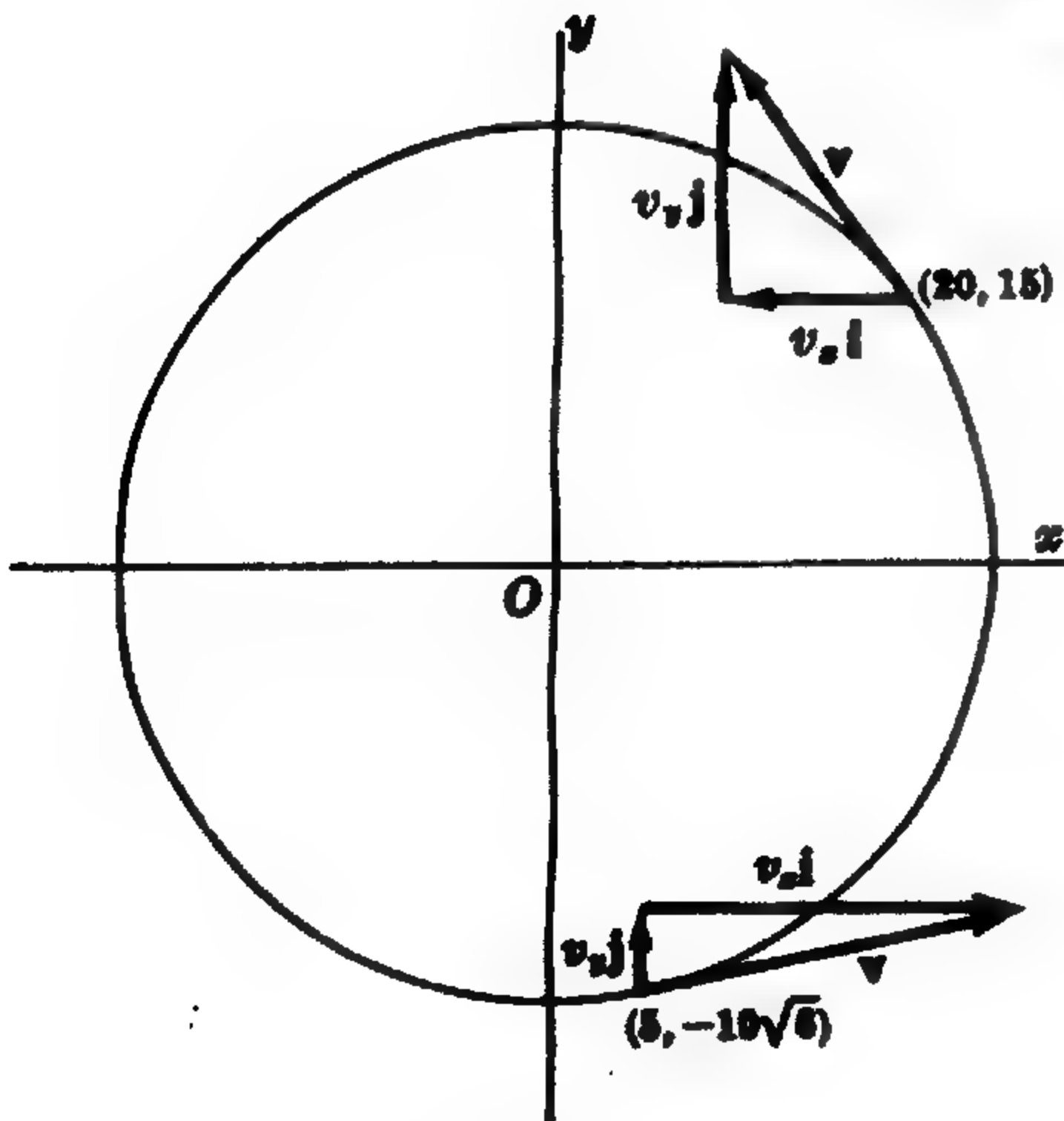
وبالاشتقاق بالنسبة لـ t نحصل على .

$$v_x a_x + v_y a_y = 0. \quad (II)$$

ومن المعادلة $x^2 + y^2 = 625$ باشتقاق متتالين نحصل على :

$$xv_x + yv_y = 0 \quad (III)$$

$$xa_x + v_x^2 + ya_y + v_y^2 = 0 \quad \text{وعلى}$$



شكل ١٩ - ٤

أو

$$xa_x + ya_y = -225 \quad (iv)$$

وبحل (i) و (iii) ما نجد أن :

$$v_x = \pm \frac{3}{5}v \quad (v)$$

وبحل (i) و (iv) ما نجد أن :

$$a_x = \frac{225v_y}{yv_x - xv_y} \quad (vi)$$

(أ) من الشكل ١٩-٤ : نلاحظ أن $v_x < 0$ عند $(20, 15)$. ومن (v) نجد $v_x = -9$ ومن (iii) $v_y = 12$. ومنه $\tan \tau = -4/3$, $\cos \tau = -3/5$, $\tau = 126^\circ 52'$. ونجد من (vi) أن $a_x = -36/5$ ومن (iv) نجد أن $a_y = -27/5$; إذن $|a| = 9$ ومنه $\tan \phi = 3/4$, $\cos \phi = -4/5$, $\phi = 216^\circ 52'$ وبالتالي

(ب) من الشكل نلاحظ أن $v_x > 0$ عند $(5, -10\sqrt{6})$. ومن (v) نجد $v_x = 6\sqrt{6}$ ومن (iii) نجد $v_y = 3$. إذن $\tan \tau = \sqrt{6}/12$, $\sin \tau = 1/5$, $\tau = 11^\circ 32'$. وبالتالي $a_x = -9/5$ ومن (iv) نجد $a_y = 18\sqrt{6}/5$; إذن $|a| = 9$. $\tan \phi = -2\sqrt{6}$, $\cos \phi = -1/5$, $\phi = 101^\circ 32'$.

الحل الثاني :

باستخدام المعادلات البارامترية $x = 25 \cos \theta$, $y = 25 \sin \theta$ نجد عند $P(x, y)$

$$r = 25i \cos \theta + 25j \sin \theta$$

$$v = \frac{dr}{dt} = (-25i \sin \theta + 25j \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = -15i \sin \theta + 15j \cos \theta$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (-15i \cos \theta - 15j \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = -9i \cos \theta - 9j \sin \theta$$

حيث أن $|v| = 15$ مكافئ لسرعة زاوية ثابتة هي $d\theta/dt = 3/5$.

(أ) عند النقطة $(20, 15)$ يكون $\sin \theta = 3/5$ و $\cos \theta = 4/5$.

$$v = -9i + 12j; \tan \tau = -4/3, \cos \tau = -3/5, \tau = 126^\circ 52' \text{ و}$$

$$a = -\frac{36}{5}i - \frac{27}{5}j; |a| = 9; \tan \phi = \frac{3}{4}, \cos \phi = -\frac{4}{5}, \phi = 216^\circ 52' \text{ و}$$

(ب) وعند النقطة $(5, -10\sqrt{6})$ يكون $\sin \theta = -\frac{1}{5}\sqrt{6}$ و $\cos \theta = 1/5$.

$$v = 6\sqrt{6}i + 3j; \tan \tau = \sqrt{6}/12, \cos \tau = \frac{1}{5}\sqrt{6}, \tau = 11^\circ 32' \text{ و}$$

$$a = -\frac{9}{5}i + \frac{18\sqrt{6}}{5}j; |a| = 9; \tan \phi = -2\sqrt{6}, \cos \phi = -1/5, \phi = 101^\circ 32' \text{ و}$$

٣- يتحرك جسم على قوس القطع المكافئ $x^2 = 8y$ الواقع في الربع الأول بحيث يكون $v_y = 2$. أوجد $|v|$, τ , $|a|$ عند النقطة $(4, 2)$.

الحل الأول :

باشتقاق $x^2 = 8y$ مرتين بالنسبة لـ t وباستخدام $v_y = 2$ نحصل على

$$2xv_x = 8v_y = 16 \text{ أو } xv_x = 8, \text{ و } xa_x + v_x^2 = 0$$

وعند (4, 2) : يكون $\tau = \frac{1}{2}\pi$. $v_x = 8/x = 2$; $|v| = 2\sqrt{2}$; $\tan \tau = 1$, $\cos \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $\phi = \tau$. $a_x = -1$; $a_y = 0$; $|a| = 1$; $\tan \phi = 0$, $\cos \phi = -1$,

الحل الثاني :

باستخدام المعادلتين البارامتريتين $x = 4\theta$, $y = 2\theta^2$, نحصل على :

$$r = 4ie + 2je^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2e}, \quad a = -\frac{1}{e^2}i, \quad v_x = 4\theta \frac{d\theta}{dt} = 2 \quad \text{حيث} \quad v = 4i \frac{d\theta}{dt} + 4j\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{e}i + 2j,$$

وعند النقطة (4, 2), يكون $\theta = 1$. وبالتالي :

$$\tau = \frac{1}{2}\pi, \quad v = 2i + 2j; |v| = 2\sqrt{2}; \tan \tau = 1, \cos \tau = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\phi = \tau, \quad a = -i; |a| = 1; \tan \phi = 0, \cos \phi = -1,$$

٤ - أوجد مقدار كل من المركبتين المماسية والمعدية لتسارع الحركة $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ عند أى زمن t :

$$\begin{aligned} r &= ix + jy = ie^t \cos t + je^t \sin t \\ v &= ie^t (\cos t - \sin t) + je^t (\sin t + \cos t) \\ a &= -2ie^t \sin t + 2je^t \cos t \end{aligned}$$

وبالتالى فإن $|a_t| = |dv/dt| = \sqrt{2} e^t$; $|a_n| = \sqrt{|a|^2 - a_t^2} = \sqrt{2} e^t$. و $|a| = 2e^t$; $ds/dt = |v| = \sqrt{2} e^t$

٥ - يتحرك جسم على القطع المكافئ $y = x^2$ من اليسار إلى اليمين بسرعة قياسية ثابتة 5. أوجد مقدار كل من المركبتين المماسية والمعدية للتسارع عند النقطة (1, 1).

بما أن السرعة القياسية ثابتة فإن $|a_t| = |dv/dt| = 0$. عند النقطة (1, 1) يكون $y' = 2x = 2$ و $y'' = 2$.

$$|a_n| = \frac{|v|^3}{R} = 2\sqrt{5}. \quad \text{فإن} \quad R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad \text{هو} \quad (1, 1)$$

٦ - تعطى القوة الطاردة المركزية FN التى يخضع لها جسم كتلته W kg عند نقطة على مساره بالعلاقة $F = W|a_n|$. أوجد القوة الطاردة المركزية التى يخضع لها جسم كتلته 2.5 kg عند طرفى المحور الكبير وطرفى المحور الصغير لقطع الناقص $x = 20 \cos t$, $y = 15 \sin t$ الذى يتحرك عليه الجسم، علماً بأن وحدات القياس هى المتر والثانية.

$$\begin{aligned} r &= 20i \cos t + 15j \sin t \\ v &= -20i \sin t + 15j \cos t \\ a &= -20i \cos t - 15j \sin t \end{aligned}$$

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{400 \sin^2 t + 225 \cos^2 t}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{175 \sin t \cos t}{\sqrt{400 \sin^2 t + 225 \cos^2 t}}$$

وعند طرفى المحور الكبير حيث $(t=0)$ أو $(t=\pi)$ نجد

$$F = (2.5)(20) = 50N \quad \text{و} \quad |a| = 20, \quad |a_t| = |dv/dt| = 0, \quad |a_n| = 20,$$

وعند طرفى المحور الصغير حيث $(t=\pi/2)$ أو $(t=3\pi/2)$ نجد :

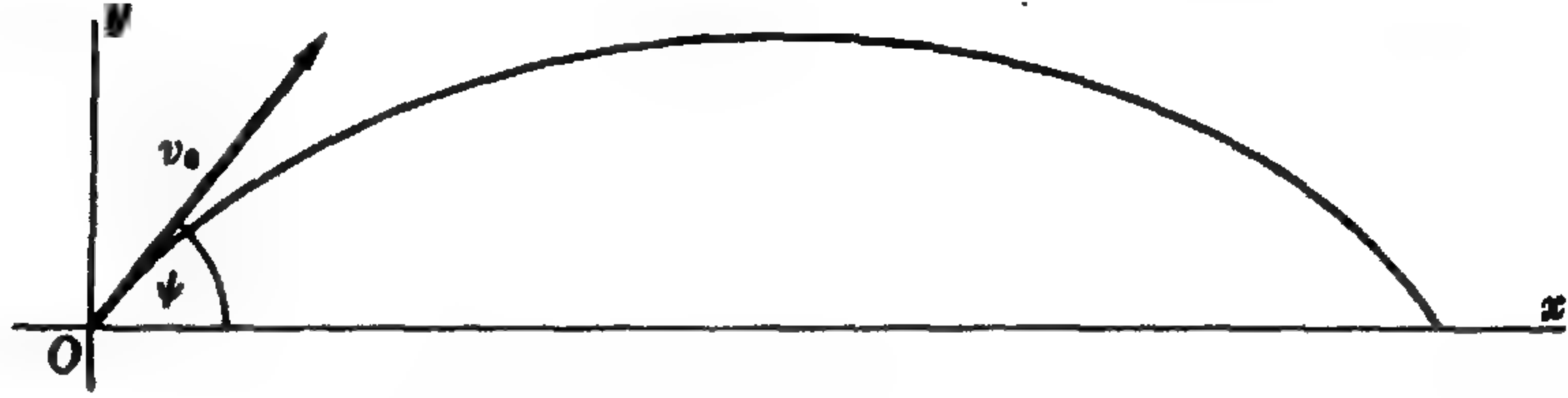
$$F = (2.5)(15) = 37.5N \quad \text{و} \quad |a| = 15, \quad |a_t| = 0, \quad |a_n| = 15,$$

٧- بفرض أن معادلات الحركة لقذيفة هي $x = v_0 t \cos \psi$, $y = v_0 t \sin \psi - \frac{1}{2}gt^2$, حيث السرعة الابتدائية v_0 و ψ زاوية القذف وأن $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ وأن x و y يقاسان بالأمتار و t بالثواني أوجد :

(أ) معادلة الحركة في الإحداثيات القائمة .

(ب) المدى (ج) زاوية القذف التي تعطى أكبر مدى ممكن .

(د) السرعة القياسية واتجاه القذيفة بعد 5 sec من الانطلاق إذا كان $v_0 = 150 \text{ ms}^{-1}$ و $\psi = 45^\circ$.



شكل ١٩ - ٥

(أ) بحل المعادلة الأولى نجد $t = \frac{x}{v_0 \cos \psi}$ وبالتعويض في الثانية نحصل على :

$$y = v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \psi} \right) \sin \psi - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \psi} \right)^2 = x \tan \psi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \psi}$$

(ب) عندما $y = v_0 t \sin \psi - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, يكون $t = 0$ و $t = (2v_0 \sin \psi)/g$.

وعندما $t = \frac{2v_0 \sin \psi}{g}$, يكون المدى مساويا $x = v_0 \cos \psi \left(\frac{2v_0 \sin \psi}{g} \right) = \frac{v_0^2 \sin 2\psi}{g}$.

(ج) عندما تكون x نهاية عظمى ينبغي أن يكون $\cos 2\psi = 0$, $\frac{dx}{d\psi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\psi}{g} = 0$, ومنه $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

(د) عندما $v_0 = 150$ و $\psi = \frac{1}{2}\pi$ نجد $x = 75\sqrt{2}t$ و $y = 75\sqrt{2}t - 4.9t^2$ وبالتالي فإن :

$$v_x = 75\sqrt{2} \quad \text{و} \quad v_y = 75\sqrt{2} - 9.8t$$

وعندما $t = 5$: نجد $v_x = 75\sqrt{2}$ و $v_y = 75\sqrt{2} - 49$ وبالتالي فإن

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 120 \text{ ms}^{-1} \quad \text{و} \quad \tan \tau = v_y/v_x = 0.538, \quad \tau = 28^\circ 17'$$

٨- تتحرك نقطة P على دائرة $x = r \cos \beta$, $y = r \sin \beta$ بسرعة قياسية ثابتة v . بين أنه إذا كان نصف القطر المتجه

إلى P يتحرك بسرعة زاوية ω وتساوع زاوى α , فإن (أ) $v = r\omega$ و (أ) $a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$.

$$v_x = r \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} = r \cos \beta \cdot \omega, \quad \text{و} \quad v_y = -r \sin \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} = -r \sin \beta \cdot \omega \quad (1)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r^2 \sin^2 \beta + r^2 \cos^2 \beta)\omega^2} = r\omega$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} - r \sin \beta \cdot \frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \cos \beta - r\alpha \sin \beta. \quad (ب)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega \sin \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} + r \cos \beta \cdot \frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \sin \beta + r\alpha \cos \beta.$$

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}, \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 = r^2(\omega^4 + \alpha^2)$$

مسائل إضافية

٩ - أوجد مقدار واتجاه كل من السرعة والتسارع لما يلي :

(أ) $x = e^t, y = e^{2t} - 4e^t + 3$ عندما $t = 0$

(ب) $x = 2 - t, y = 2t^3 - t$ عندما $t = 1$

(ج) $x = \cos 3t, y = \sin t$ عندما $t = \frac{1}{2}\pi$

(د) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ عندما $t = 0$

ج : (أ) $|v| = \sqrt{5}, \tau = 296^\circ 34'; |a| = 1, \phi = 0$

(ب) $|v| = \sqrt{26}, \tau = 101^\circ 19'; |a| = 12, \phi = \frac{1}{2}\pi$

(ج) $|v| = \sqrt{5}, \tau = 161^\circ 34'; |a| = \sqrt{41}, \phi = 353^\circ 40'$

(د) $|v| = \sqrt{2}, \tau = \frac{1}{2}\pi; |a| = 2, \phi = \frac{1}{2}\pi$

١٠ - يتحرك جسم على قوس القطع المكافئ $y^2 = 12x$ الواقع في الربع الأول بحيث يكون $v_x = 15$. أوجد $v_y, |v|, \tau; a_x, a_y, |a|, \phi$ عند (3, 6)

ج : $v_y = 15, |v| = 15\sqrt{2}, \tau = \frac{1}{4}\pi; a_x = 0, a_y = -75/2, |a| = 75/2, \phi = 3\pi/2$

١١ - يتحرك جسم على المنحنى $y = x^3/3$ بحيث يكون $v_x = 2$ مهما كان الزمن.

أوجد مقدار واتجاه كل من السرعة والتسارع عندما $x = 3$.

ج : $|v| = 2\sqrt{82}, \tau = 83^\circ 40'; |a| = 24, \phi = \frac{1}{2}\pi$

١٢ - يدور جسم على دائرة نصف قطرها 6 m بسرعة قياسية ثابتة 4 m/sec. عين مقدار تسارعه في أى موضع.

ج : $|a_t| = 0, |a| = |a_n| = 8/3 \text{ ms}^{-2}$

١٣ - أوجد مقدار واتجاه السرعة والتسارع ومقدار مركبتي التسارع المماسية والمعدية لمركبتين التاليتين :

(أ) $x = 3t, y = 9t - 3t^2$ عندما $t = 2$

(ب) $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$ عندما $t = 1$

ج : (أ) $|v| = 3\sqrt{2}, \tau = 7\pi/4; |a| = 6, \phi = 3\pi/2; |a_t| = |a_n| = 3\sqrt{2}$

(ب) $|v| = 1, \tau = 1; |a| = \sqrt{2}, \phi = 102^\circ 18'; |a_t| = |a_n| = 1$

١٤ - يتحرك جسم على المنحنى $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ بحيث يكون $x = \frac{1}{2}t^2, t > 0$. أوجد $v_x, v_y, |v|, \tau; a_x, a_y, |a|, \phi; |a_t|$ عندما $t = 1$.

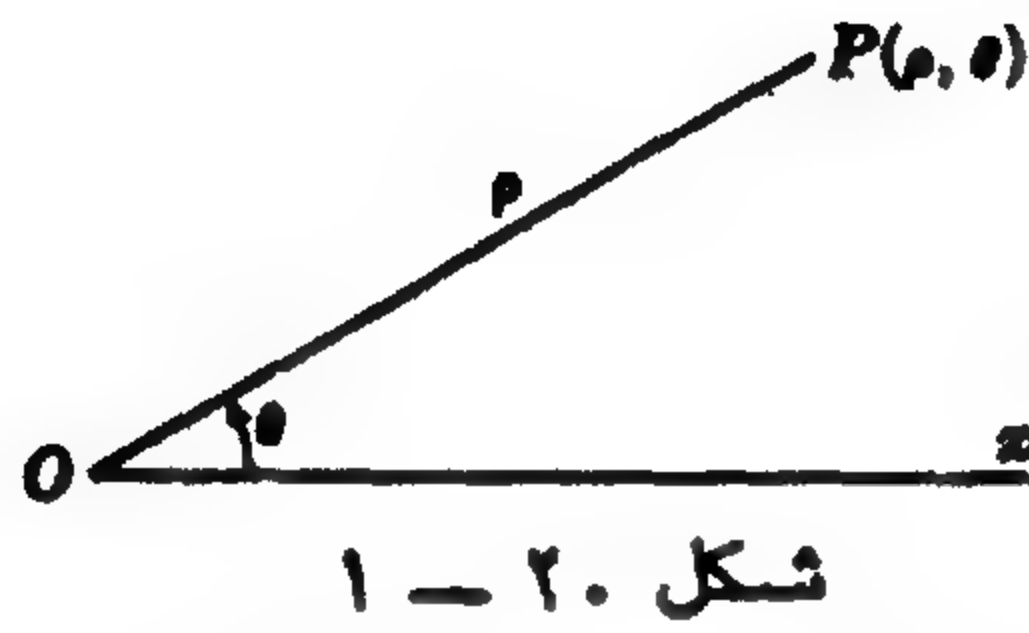
ج : $v_x = 1, v_y = 0, |v| = 1, \tau = 0; a_x = 1, a_y = 2, |a| = \sqrt{5}, \phi = 63^\circ 26'; |a_t| = 1, |a_n| = 2$

١٥ - يتحرك جسم على المسار $y = 2x - x^2$ بحيث يكون $v_x = 4$ دائما. أوجد مقدار مركبتي التسارع المماسية والمعدية عند الموضع (أ) (1, 1) و (ب) (2, 0).

ج : (أ) $|a_t| = 64/\sqrt{5}, |a_n| = 32/\sqrt{5}$ (ب) $|a_t| = 0, |a_n| = 32$

الفصل العشرون

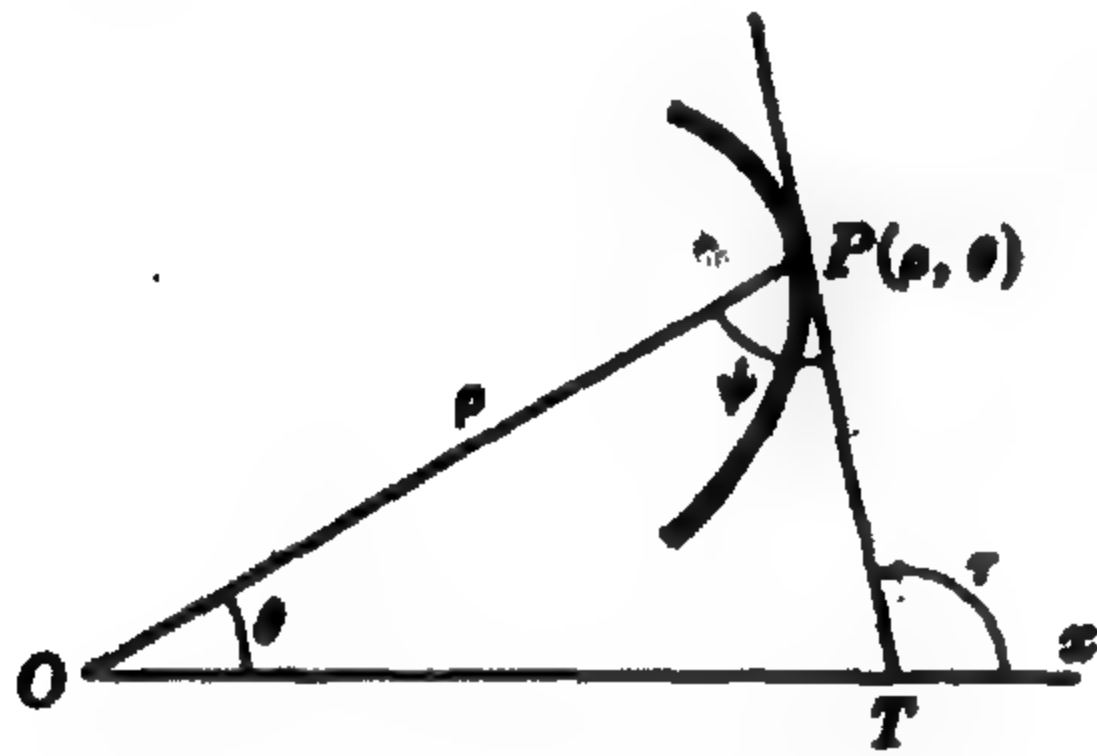
الإحداثيات القطبية



شكل ٢٠ - ١

يمكن تعيين موضع نقطة P في مستوى مفروض بالنسبة إلى نقطة ثابتة O من هذا المستوى ، بمسقطي المتجه OP على محورين متعامدين في المستوى وماريين بـ O . وهذه بجوهرها ، هي مجموعة الإحداثيات القائمة . ويمكن تعيين موضع النقطة بطريقة أخرى وذلك بواسطة المسافة الموجهة $p = OP$ والزاوية θ التي يصنعها OP مع نصف المستقيم الثابت OX المار بـ O . وهذه هي مجموعة الإحداثيات القطبية .

ويقابل كل زوج عددي (ρ, θ) نقطة ونقطة واحدة فقط . لكن العكس ليس صحيحا : فثلا النقطة P في الشكل يمكن أن تتعين بـ $(\rho, \theta \pm 2n\pi)$ و $(-\rho, \theta \pm (2n+1)\pi)$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب بما في ذلك الصفر . ويمكن بوجه خاص أن تعطى الإحداثيات القطبية للقطب بـ $(0, \theta)$ حيث θ اختيارية تماما . ويتكون المنحنى الذي معادته في الإحداثيات القطبية هي $\rho = f(\theta)$ أو $F(\rho, \theta) = 0$ من جميع النقط المختلفة (ρ, θ) التي تحقق هذه المعادلة .



شكل ٢٠ - ٢

وتعطى الزاوية ψ المحصورة بين نصف القطر المتجه OP والمماس للمنحنى PT عند النقطة $P(\rho, \theta)$ بالعلاقة

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} \quad \text{حيث} \quad \tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}$$

ويلعب ظل الزاوية ψ في الإحداثيات القطبية دورا مشابها نوعا ما للدور ميل المماس في الإحداثيات القائمة .

أنظر المسائل ١ - ٣

تعطى زاوية الميل τ لمماس المنحنى عند نقطة $P(\rho, \theta)$ منه بالعلاقة

$$\tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta}$$

أنظر المسائل ٤ - ١٠

ونقطة التقاطع لنحنيين معادلتهما هما :

$$\rho = f_1(\theta) \quad \text{و} \quad \rho = f_2(\theta)$$

يمكن إيجادها بحل المعادلة :

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \quad (١)$$

مثال ١ :

أوجد نقط تقاطع $p = 1 + \sin \theta$ و $p = 5 - 3 \sin \theta$.
 نضع $1 + \sin \theta = 5 - 3 \sin \theta$ فنحصل على $\sin \theta = 1$.
 وبالتالي $\theta = \frac{1}{2} \pi$ ومنه تكون النقطة $(2, \frac{1}{2} \pi)$ هي نقطة التقاطع الوحيدة .
 عندما يكون القطب أحد نقط التقاطع ، فن الممكن أن لا يظهر بين حلول المعادلة (١) ويكون القطب أحد نقط
 التقاطع إذا استطعنا أن نجد قيميا لـ θ مثل θ_1 و θ_2 بحيث يكون $f_1(\theta_1) = 0$ و $f_2(\theta_2) = 0$.

مثال ٢ :

أوجد نقط تقاطع $p = \sin \theta$ و $p = \cos \theta$.
 من المعادلة : (١) $\sin \theta = \cos \theta$
 نحصل على نقطة التقاطع $(\frac{1}{2} \sqrt{2}, \frac{1}{4} \pi)$. ولكن المنحنيين هما دائرتان مارتان بالقطب وهو نقطة تقاطع ، ولكن
 لا يمكن الحصول عليه من (١) لأن له على المنحنى $p = \sin \theta$ الإحداثيان $(0,0)$ وعلى المنحنى $p = \cos \theta$
 الإحداثيان $(0, \frac{1}{2} \pi)$.

مثال ٣ :

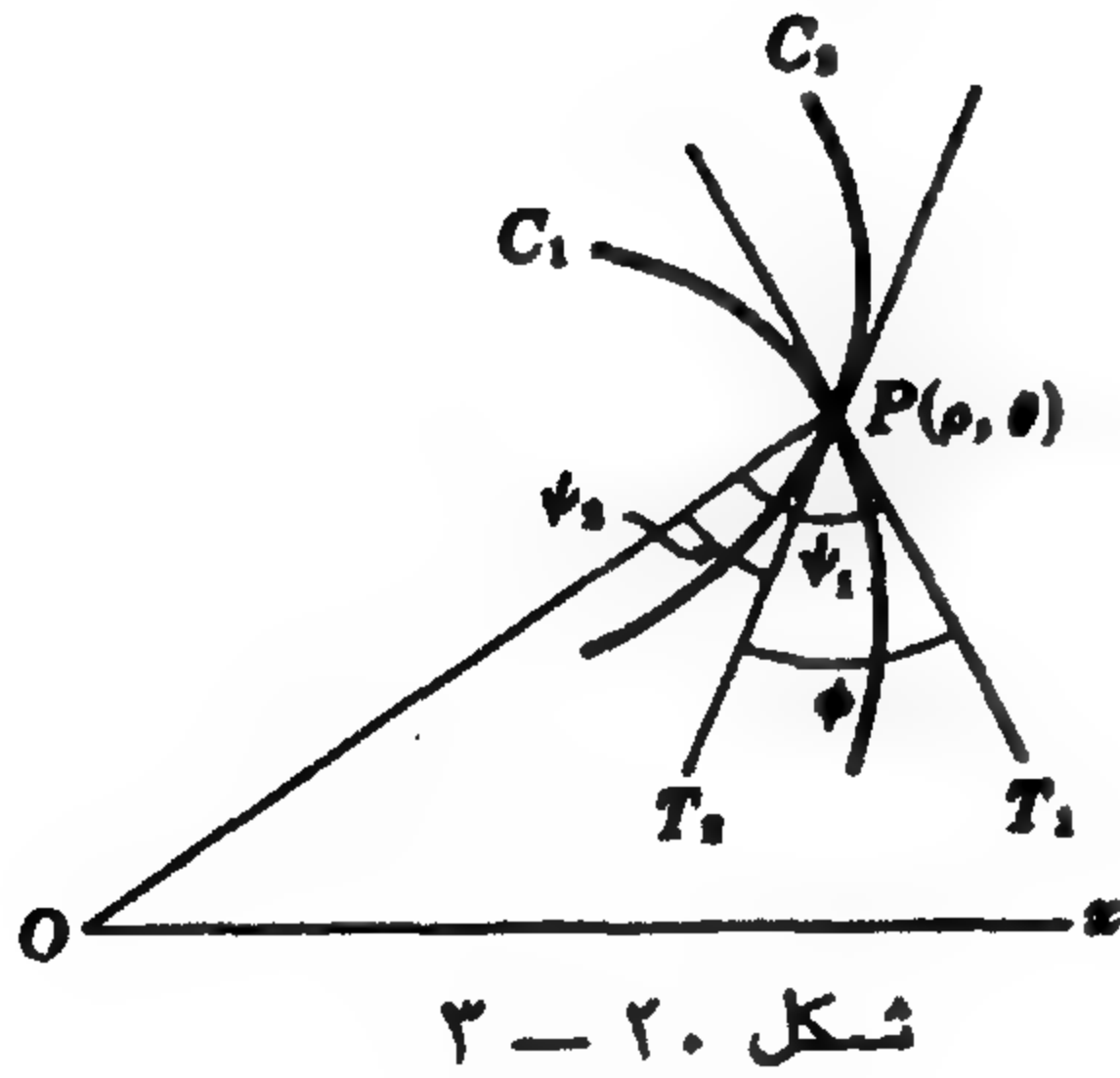
أوجد نقط تقاطع $p = \cos \theta$ و $p = \cos 2\theta$.
 نضع $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos \theta$ فنجد أن $(\cos \theta - 1)(2 \cos \theta + 1) = 0$.
 ومنه نجد $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$. وبالتالي فإن نقط التقاطع هي $(1,0), (-\frac{1}{2}, 2\pi/3), (-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$.
 والقطب هو نقطة تقاطع أيضا .

تعطى زاوية التقاطع : ϕ لمنحنيين عند نقطة مشتركة $P(p, \theta)$ ،
 ليست القطب ، بالمعادلة :

$$\tan \phi = \frac{\tan \psi_1 - \tan \psi_2}{1 + \tan \psi_1 \tan \psi_2}$$

حيث ψ_1 و ψ_2 هما زاويتا نصف القطر المتجه OP مع المماسين الخاصين
 بهما على المنحنيين عند النقطة P .

والطريقة هنا ماثلة لتلك التي وردت في حالة المنحنيات المغطاة بالإحداثيات
 القائمة ، وتستخدم ظلال الزوايا بين نصف القطر المتجه والمماس بدلا من
 ميل المماسات وذلك للسهولة في الحسابات .



مثال ٤ :

أوجد زاوية التقاطع (الحادة) بين $p = \cos \theta$ و $p = \cos 2\theta$.
 لقد وجدنا نقط التقاطع في المثال ٣ .
 عند القطب : يعطى القطب على المنحنى $p = \cos \theta$ بـ $\theta = \frac{1}{2} \pi$ ويعطى على المنحنى $p = \cos 2\theta$ بـ $\theta = \pi/4$ و $\theta = 3\pi/4$ ، إذن يوجد عند القطب نقطتا تقاطع والزاوية الحادة لكل منهما تساوي $\frac{1}{4} \pi$.

$\rho = \cos 2\theta$	و أما المنحنى	$\rho = \cos \theta$	والمنحنى
$\tan \psi_2 = -\frac{1}{2} \cot 2\theta$	نجد	$\tan \psi_1 = -\cot \theta$	نجد

وعند النقطة (1,0) يكون $\tan \psi_1 = -\cot 0 = \infty$ و $\tan \psi_2 = \infty$ وبالتالي فإن $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}\pi$ و $\phi = 0$.
وعند النقطة $(-\frac{1}{2}, 2\pi/3)$ يكون $\tan \psi_1 = \sqrt{3}/3$ و $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}/6$.
إذن $\tan \phi = \frac{\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}/6}{1 - 1/6} = 3\sqrt{3}/5$ و $\phi = 46^\circ 6'$.
وهذه بسبب التناظر ، هي أيضا زاوية التقاطع الحادة عند النقطة $(-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$.

أنظر المسائل ١١ - ١٣

يعطى اشتقاق طول القوس : $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$ حيث $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ مع اعتبار أن s تزداد بزيادة θ .

أنظر المسائل ١٤ - ١٦

ويعطى انحناء منحنى : $K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}$.

أنظر المسائل ١٧ - ١٩

الحركة الخطية الانحنائية : لنفرض أن حسيم P يتحرك على منحنى معادته بالإحداثيات القطبية هي $\rho = f(\theta)$ فإذا استعنا بالتمثيل البارامترى للمنحنى :

$$x = \rho \cos \theta = g(\theta), \quad y = \rho \sin \theta = h(\theta)$$

نجد أن متجه الموضع للنقطة P هو :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \rho\mathbf{i} \cos \theta + \rho\mathbf{j} \sin \theta = \rho(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta)$$

وعندئذ يمكن دراسة الحركة كما في الفصل ١٩ .

وهناك طريقة بديلة وهي أن نعتبر عن \mathbf{r} وبالتالي عن \mathbf{v} و \mathbf{a} بدلالة اتجاهات وحدة على المستقيم العمودى على نصف القطر المتجه للنقطة P .
ولهذا الفرض فإننا نعرف متجه الوحدة :

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$$

على المتجه \mathbf{r} وفى اتجاه تزايد ρ ونعرف متجه الوحدة :

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta$$

العمودى على \mathbf{r} وفى اتجاه تزايد θ . ويمكن بحسابات بسيطة الحصول على

$$\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = -\mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\rho \frac{d\theta}{dt}$$

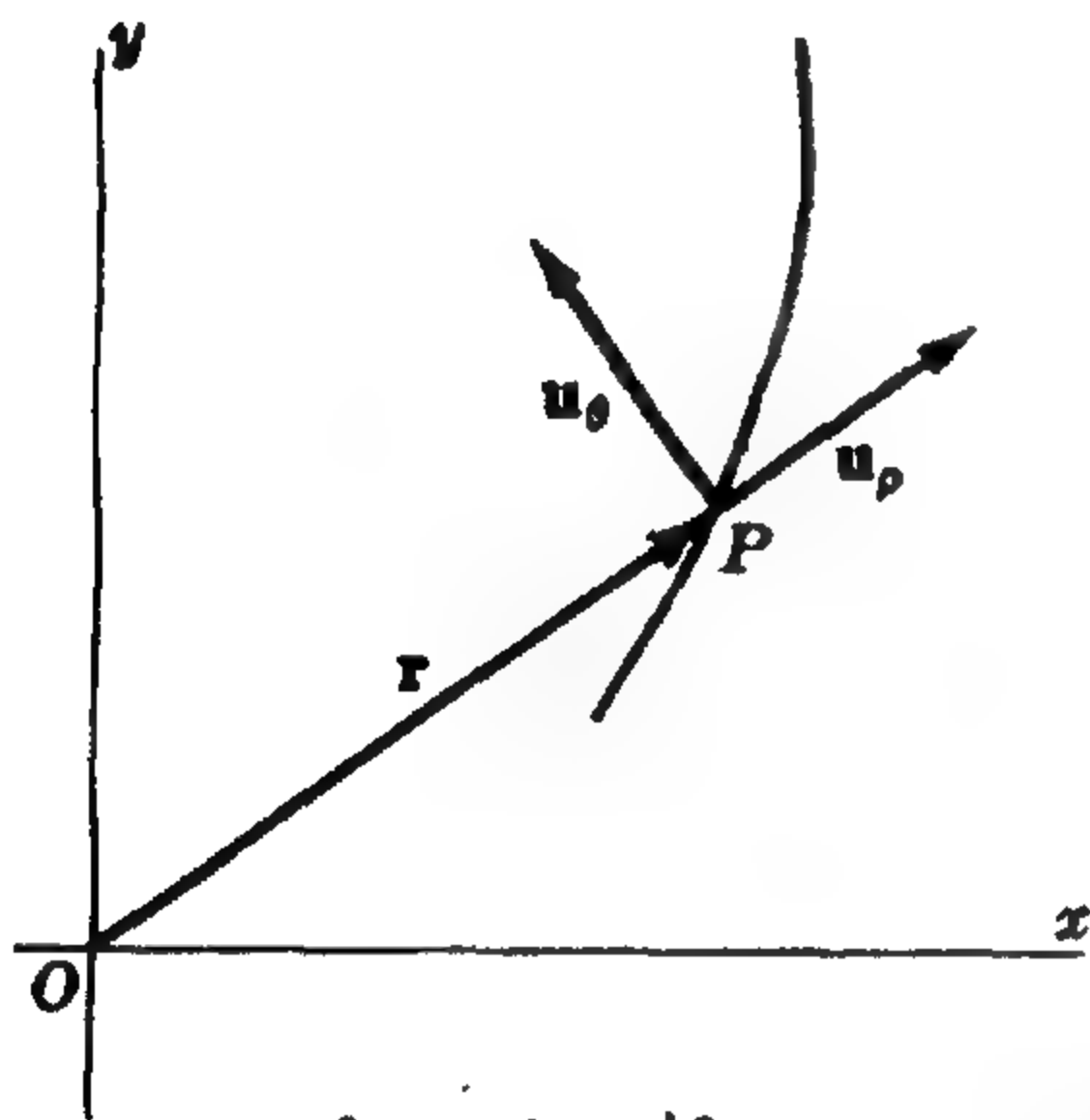
$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho \quad \text{ومن}$$

ونحصل من المسألة ٢٠ على .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = v_\rho \mathbf{u}_\rho + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\rho \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \mathbf{u}_\theta \left[\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$= a_\rho \mathbf{u}_\rho + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$



شكل ٢٠ - ٤

ونجد هنا أن $v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt}$ ، $v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$ ، $a_\theta = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt}$ ، $a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$.
 أنظر المسألة ٢١

مسائل محلولة

١ - برهن أن $\tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$ حيث ψ هي الزاوية المقاسة من نصف القطر المتجه OP للنقطة $P(\rho, \theta)$ على المنحنى الذي معادله $\rho = f(\theta)$ إلى المماس PT .

في الشكل ٢٠ - ٥ النقطة $Q(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$ هي نقطة على المنحنى وقريبة من P ونجد من المثلث القائم PSQ أن

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \frac{SP}{SQ} = \frac{SP}{OQ - OS} = \frac{\rho \sin \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\theta} \\ &= \frac{\rho \sin \Delta\theta}{\rho(1 - \cos \Delta\theta) + \Delta\rho} = \frac{\rho \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta} + \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}} \end{aligned}$$

وإذا آلت النقطة Q إلى P على المنحنى فإن

$$\Delta\theta \rightarrow 0, OQ \rightarrow OP, PQ \rightarrow PT, \angle \lambda \rightarrow \angle \psi$$

$$\frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \rightarrow 1 \quad \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta} \rightarrow 0 \quad \text{فإن } \Delta\theta \rightarrow 0$$

(أنظر الفصل ١٢)

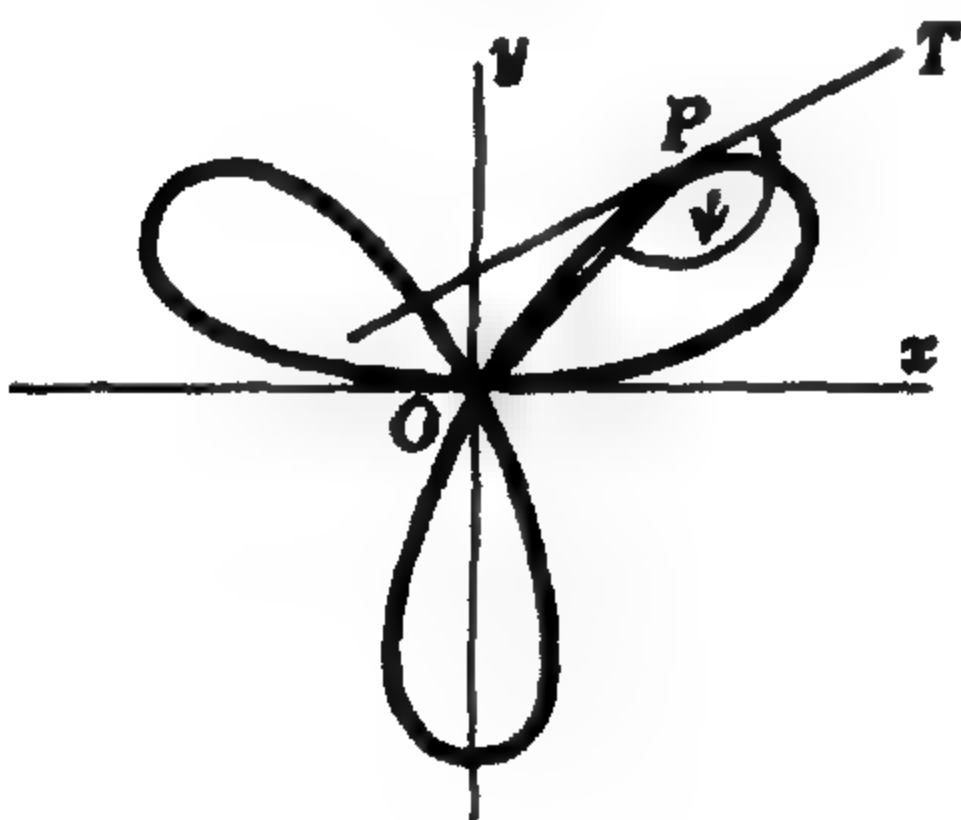
$$\tan \psi = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \tan \lambda = \frac{\rho}{d\rho/d\theta} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} .$$

أوجد في المسألتين ٢-٢ ، $\tan \psi$ للمنحنيات المذكورة وعند النقطة المذكورة .

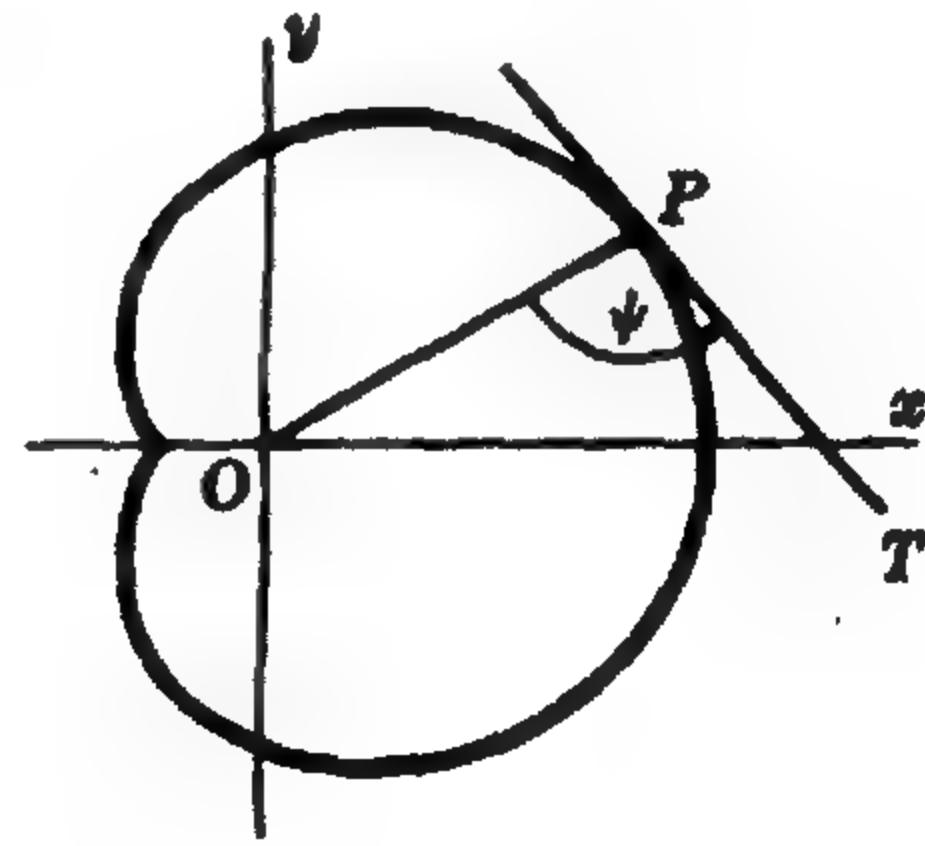
$$\rho = 2 + \cos \theta; \theta = \pi/3. \quad - \quad ٢$$

(أنظر الشكل ٢٠ - ٦)

$$\text{عند } \theta = \pi/3 \text{ يكون } \rho = 2 + \frac{1}{2} = 5/2, \rho' = -\sin \theta = -\sqrt{3}/2, \tan \psi = \rho/\rho' = -5/\sqrt{3}.$$



شكل ٢٠ - ٧



شكل ٢٠ - ٦

$$\rho = 2 \sin 3\theta; \theta = \pi/4. \quad - \quad ٢$$

أنظر الشكل ٢٠ - ٧

عند $\theta = \pi/4$ يكون

$$\rho = 2(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad \rho' = 6 \cos 3\theta = 6(-1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}, \quad \tan \psi = \rho/\rho' = -1/3. \quad \text{و}$$

$$\tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} \quad \text{٤ - برهن أن}$$

نلاحظ من شكل المسألة ١ أن $\tau = \psi + \theta$ ومنه :

$$\begin{aligned} \tan \tau = \tan(\psi + \theta) &= \frac{\tan \psi + \tan \theta}{1 - \tan \psi \tan \theta} = \frac{\rho \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \rho \frac{d\theta}{d\rho} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\rho \cos \theta + \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta} = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} \end{aligned}$$

٥ - بين أنه إذا مر المنحنى $\rho = f(\theta)$ بالقطب وكانت θ_1 تحقق العلاقة $f(\theta_1) = 0$ فإن اتجاه المماس للمنحنى عند القطب $(0, \theta_1)$ هو θ_1 .

عند $(0, \theta_1)$ يكون $\rho = 0$ و $\rho' = f'(\theta_1)$.

$$\begin{aligned} \tan \tau &= \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} \quad \text{فإذا كان } \rho' \neq 0 \text{ نجد أن} \\ &= \frac{0 + \sin \theta_1 \cdot f'(\theta_1)}{0 + \cos \theta_1 \cdot f'(\theta_1)} = \tan \theta_1 \end{aligned}$$

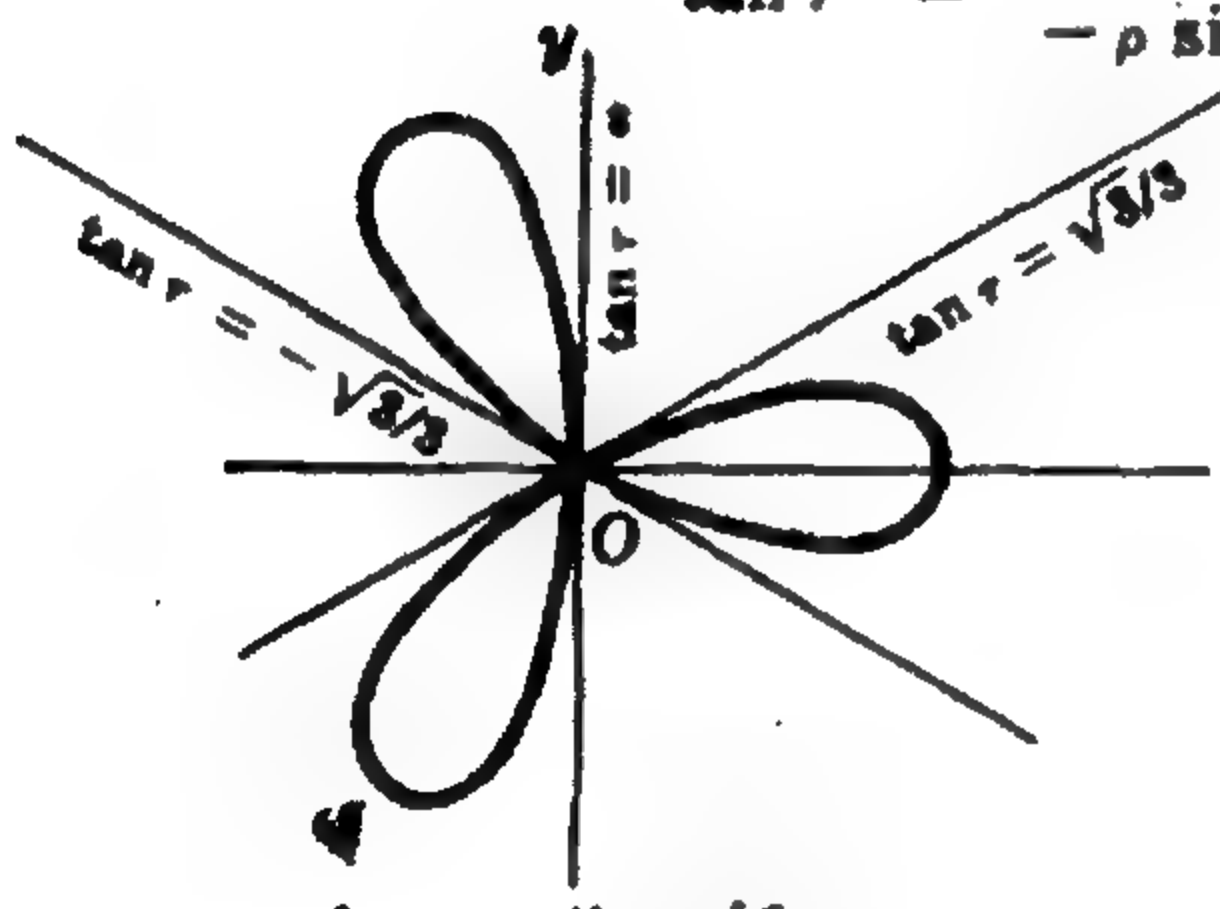
$$\text{وإذا كان } \rho' = 0 \text{ نجد أن } \tan \tau = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \frac{\sin \theta \cdot f'(\theta)}{\cos \theta \cdot f'(\theta)} = \tan \theta_1$$

في المسائل ٦ - ٨ أوجد ميل المنحنى المفروض عند النقطة المفروضة.

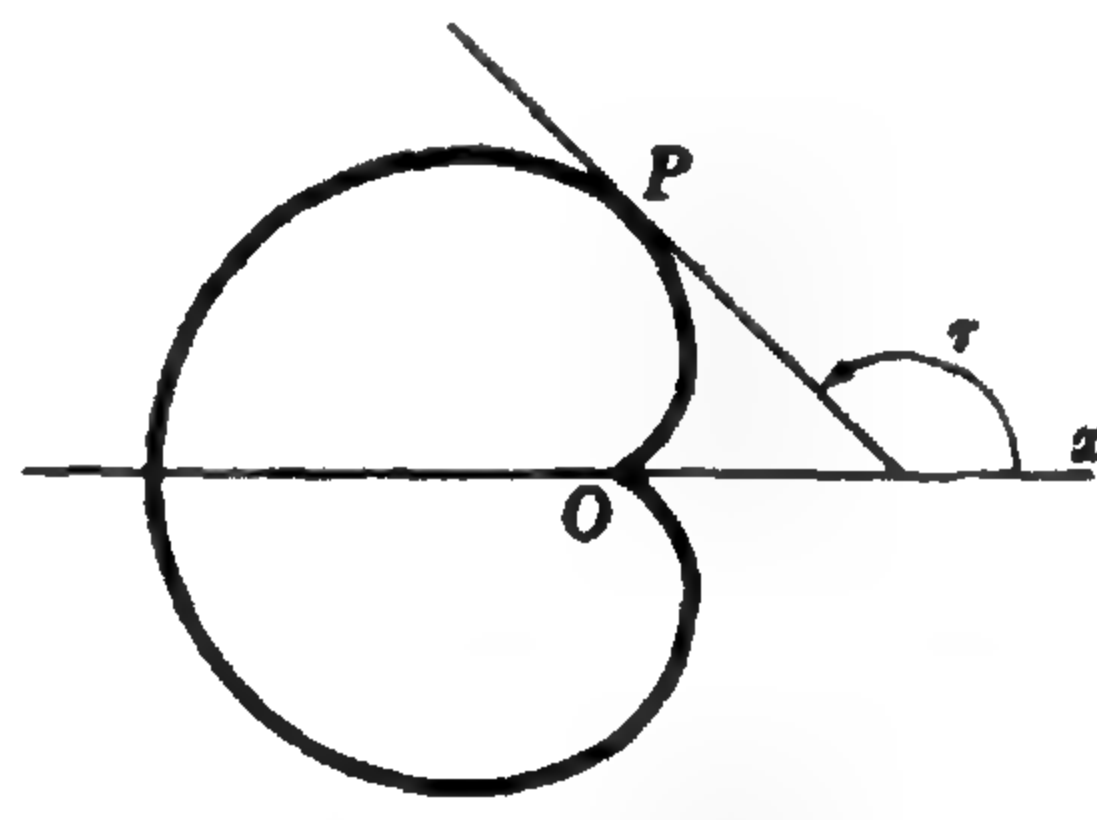
٦ - $\rho = 1 - \cos \theta$ عند $\theta = \frac{1}{2}\pi$. أنظر الشكل ٢٠ - ٩

عند $\theta = \frac{1}{2}\pi$ يكون $\sin \theta = 1, \cos \theta = 0, \rho = 1, \rho' = \sin \theta = 1$.

$$\tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 0} = -1 \quad \text{وبالتالي}$$



شكل ٢٠ - ١٠



شكل ٢٠ - ٩

٧ - $\rho = \cos 3\theta$ عند القطب. أنظر الشكل ٢٠ - ١٠

عندما $\rho = 0$ فإن $\cos 3\theta = 0$. وبالتالي $3\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ ومنه $\theta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$.

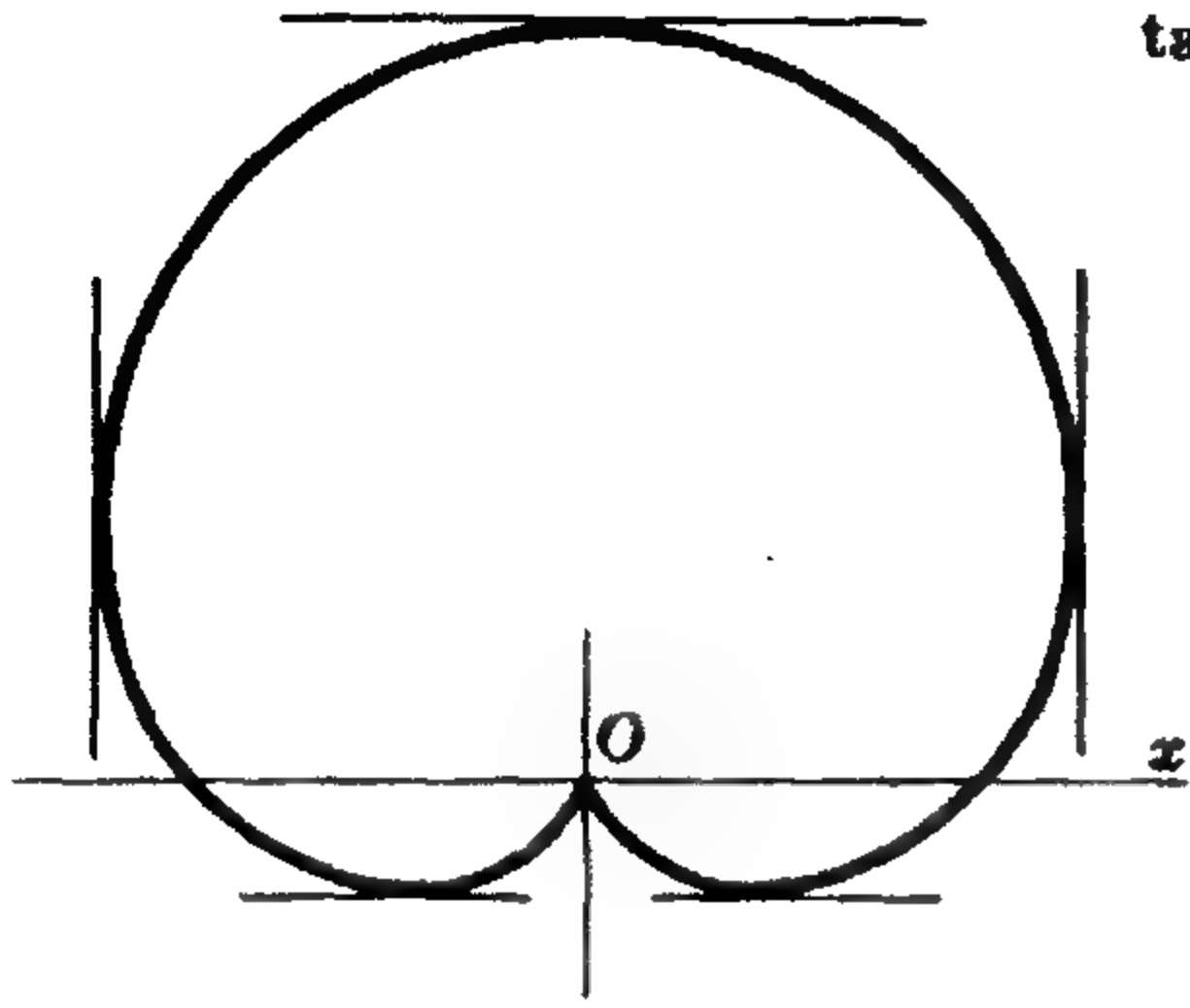
وحسب المسألة ٥ يكون : $\tan \tau = 1/\sqrt{3}, \infty, -1/\sqrt{3}$.

٨ - $\rho\theta = a$ عند $\theta = \pi/3$.

عند $\theta = \pi/3$ يكون $\sin \theta = \sqrt{3}/2, \cos \theta = \frac{1}{2}, \rho = 3a/\pi$ و $\rho' = -a/\theta^2 = -9a/\pi^2$.

$$\tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} = -\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3} \quad \text{إذن}$$

٩ - ابحث في المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى $\rho = 1 + \sin \theta$.



شكل ٢٠ - ١١

$$\text{عند } P(\rho, \theta) \text{ يكون : } \tan \tau = \frac{(1 + \sin \theta) \cos \theta + \cos \theta \sin \theta}{-(1 + \sin \theta) \sin \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= -\frac{\cos \theta (1 + 2 \sin \theta)}{(\sin \theta + 1)(2 \sin \theta - 1)}$$

(١) بوضع $\cos \theta (1 + 2 \sin \theta) = 0$ نجد أن :

$$\theta = \pi/2, 3\pi/2, 7\pi/6, \text{ and } 11\pi/6.$$

وبوضع $(\sin \theta + 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$ نجد أن :

$$\theta = 3\pi/2, \pi/6, \text{ و } 5\pi/6.$$

(ب) عندما $\theta = \pi/2$ يوجد مماس أفقى عند $(2, \pi/2)$

وعندما $\theta = 7\pi/6$ و $\theta = 11\pi/6$ يوجد مماسان أفقيان

عند $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$ و $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$.

وعندما $\theta = \pi/6$ و $\theta = 5\pi/6$ يوجد مماسان رأسيان عند $(3/2, \pi/6)$ و $(3/2, 5\pi/6)$.

وعندما $\theta = 3\pi/2$ يوجد استناداً إلى المسألة ٥ مماس رأسى عند القطب.

١٠ - بين أن الزاوية التى يصنعها نصف القطر المتجه لأية نقطة على منحنى القلب $\rho = a(1 - \cos \theta)$ (الكارديوئيد)

مع المنحنى تساوى نصف الزاوية التى يصنعها نصف القطر المتجه مع المحور القطبى .

عند أية نقطة $P(\rho, \theta)$ من المنحنى لدينا :

$$\rho' = a \sin \theta, \quad \tan \psi = \rho/\rho' = (1 - \cos \theta)/\sin \theta = \tan \frac{1}{2}\theta \quad \text{or} \quad \psi = \frac{1}{2}\theta$$

في المسائل ١١ - ١٣ أوجد زوايا التقاطع لكل زوج من المنحنيات :

$$11 - \rho = 3 \cos \theta, \quad \rho = 1 + \cos \theta.$$

(١) بحل $3 \cos \theta = 1 + \cos \theta$ نحصل على نقطتى التقاطع

$(3/2, \pi/3)$ و $(3/2, 5\pi/3)$ والمنحنيان يتقاطعان أيضاً عند القطب .

(ب) للمنحنى $\rho = 3 \cos \theta$ يكون $\rho' = -3 \sin \theta$ و $\tan \psi_1 = -\cot \theta$

والمنحنى $\rho = 1 + \cos \theta$ يكون $\rho' = -\sin \theta$

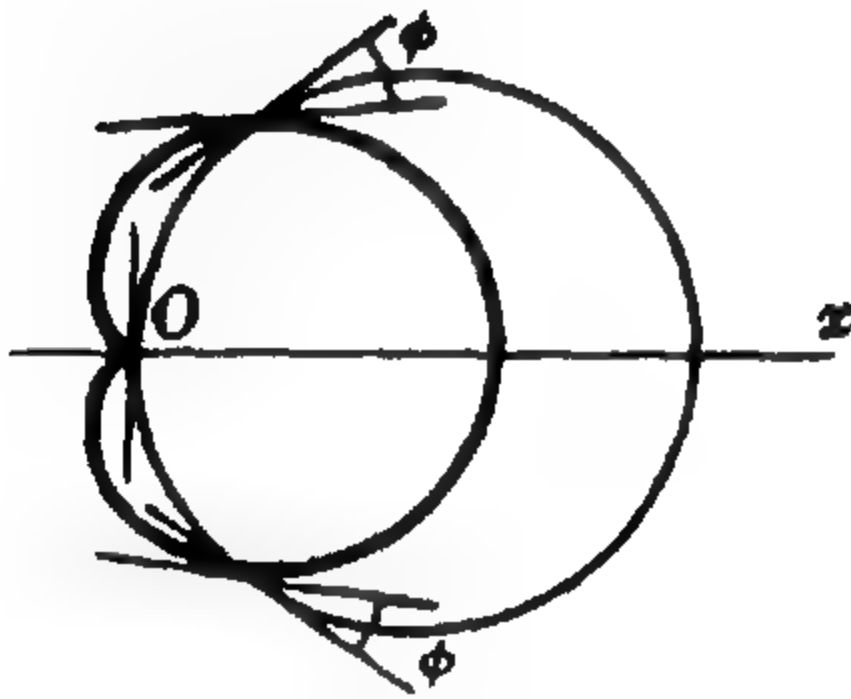
$$\text{و } \tan \psi_2 = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}.$$

(ج) عندما $\theta = \pi/3$ فإن $\tan \psi_1 = -1/\sqrt{3}$, $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}$.

وبالتالى $\tan \phi = 1/\sqrt{3}$.

وزاوية التقاطع الحادة عند $(3/2, \pi/3)$ وعند $(3/2, 5\pi/3)$ بالتالى هى $\pi/6$.

نجد من الشكل أو بالاستفادة من نتيجة المسألة ٥ ، أن المنحنين متعامدان عند القطب .



شكل ٢٠ - ١٢

$$12 - \rho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta, \quad \rho = 3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta.$$

(١) بحل $\sec^2 \frac{1}{2}\theta = 3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta$ نحصل على نقطتى التقاطع $(4, 2\pi/3)$ و $(4, 4\pi/3)$.

(ب) للمنحنى $\rho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta$ يكون $\rho' = \sec^2 \frac{1}{2}\theta \tan \frac{1}{2}\theta$ و $\tan \psi_1 = \cot \frac{1}{2}\theta$.

والمنحنى $\rho = 3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta$ يكون $\rho' = -3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}\theta$ و $\tan \psi_2 = -\tan \frac{1}{2}\theta$.

(ج) عند $\theta = 2\pi/3$ يكون $\tan \psi_1 = 1/\sqrt{3}$, $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}$, ومنه $\phi = 1/2\pi$ والمنحنيان متعامدان .

$$\rho = \sin 2\theta, \rho = \cos \theta. \quad - ١٣$$

(أ) المنحنيان يتقاطعان عند $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$, $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$ وعند القطب .

(ب) المنحنى $\rho = \sin 2\theta$ يكون $\rho' = 2 \cos 2\theta$ و $\tan \psi_1 = \frac{1}{2} \tan 2\theta$.

والمحنى $\rho = \cos \theta$ يكون $\rho' = -\sin \theta$ و $\tan \psi_2 = -\cot \theta$.

(ج) عند $\theta = \pi/6$ يكون $\tan \psi_1 = \sqrt{3}/2$, $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}$, ومنه $\tan \phi = -3\sqrt{3}$, وبالتالي فإن زاوية

التقاطع الحادة عند $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$ وعند $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$ هي $\phi = \arctan 3\sqrt{3} = 79^\circ 6'$.

وزوايا التقاطع عند القطب هي 0° و $\frac{1}{2}\pi$.

في المسائل ١٤ - ١٦ أوجد $ds/d\theta$ عند النقطة $P(\rho, \theta)$.

$$\rho = \cos 2\theta. \quad - ١٤$$

$$ds/d\theta = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + 4 \sin^2 2\theta} = \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\theta} \quad \text{و} \quad \rho' = -2 \sin 2\theta$$

$$\rho(1 + \cos \theta) = 4. \quad - ١٥$$

$$\rho' = \frac{\rho \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{4 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \quad \text{ومنه} \quad -\rho \sin \theta + \rho'(1 + \cos \theta) = 0.$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{4\sqrt{2}}{(1 + \cos \theta)^{3/2}} \quad \text{وبالتالى}$$

$$\rho = \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad - ١٦ \quad \text{احسب قيمة } ds/d\theta \text{ عند } \theta = 1/2\pi.$$

$$ds/d\theta = \sqrt{\sin^4 \frac{1}{2}\theta + \sin^4 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta} = \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{و} \quad \rho' = \sin^2 \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta$$

$$ds/d\theta = \sin^2 \frac{1}{2}\pi = 1/4. \quad \text{وعند } \theta = 1/2\pi \text{ يكون}$$

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}. \quad - ١٧ \quad \text{برهن أن}$$

من التعريف $K = d\tau/ds$ وحيث أن $\tau = \theta + \psi$ فإن :

$$\psi = \arctan \frac{\rho}{\rho'} \quad \text{حيث} \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right),$$

$$1 + \frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2} \quad \text{و} \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{[(\rho')^2 - \rho\rho'']/(\rho')^2}{1 + (\rho/\rho')^2} = \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2}$$

$$K = \frac{d\theta}{ds} \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{1 + d\psi/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{1 + d\psi/d\theta}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}. \quad \text{وبالتالى}$$

$$\rho = 2 + \sin \theta. \quad \text{عند النقطة } P(\rho, \theta) \quad - ١٨$$

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}} = \frac{(2 + \sin \theta)^2 + 2 \cos^2 \theta + (\sin \theta)(2 + \sin \theta)}{\{(2 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta\}^{3/2}} = \frac{6(1 + \sin \theta)}{(5 + 4 \sin \theta)^{3/2}}.$$

$$\rho(1 - \cos \theta) = 1. \quad \text{عند } \theta = \pi/2 \text{ وعند } \theta = 4\pi/3 \quad - ١٩$$

$$K = \sin^3 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{ومنه} \quad \rho' = \frac{-\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}, \quad \rho'' = \frac{-\cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^3},$$

$$K = (\sqrt{3}/2)^3 = 3\sqrt{3}/8. \quad \text{فإن } \theta = 4\pi/3 \text{ وعند } K = (1/\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}/4; \text{ فإن } \theta = \pi/2$$

٢٠ - استنتج من العلاقة $r = \rho u_\rho$ صيغة لكل من v و a بدلالة u_ρ و u_θ .

$$v = \frac{dr}{dt} = u_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du_\rho}{dt} = u_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho u_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = u_\rho \frac{d^2\rho}{dt^2} + u_\theta \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho u_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + u_\theta \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \rho u_\rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$= u_\rho \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + u_\theta \left[\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]$$

٢١ - يتحرك جسيم على المنحنى $\rho = 4 \sin 2\theta$ وفي اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبحيث يكون $\frac{d\theta}{dt} = 1/2 \text{ rad s}^{-1}$

(١) عبر عن v و a بدلالة u_ρ و u_θ (ب) أوجد $|v|$ و $|a|$ عندما $\theta = \pi/6$.

$$r = 4 \sin 2\theta u_\rho, \quad d\rho/dt = 8 \cos 2\theta d\theta/dt = 4 \cos 2\theta, \quad d^2\rho/dt^2 = -4 \sin 2\theta$$

$$v = u_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho u_\theta \frac{d\theta}{dt} = 4u_\rho \cos 2\theta + 2u_\theta \sin 2\theta \quad (١)$$

$$a = u_\rho \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + u_\theta \left[\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$= -5u_\rho \sin 2\theta + 4u_\theta \cos 2\theta$$

(ب) عند $\theta = \pi/6$ فإن

$$u_\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j, \quad u_\theta = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{5}{2}j, \quad a = -\frac{19}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4}j.$$

$$|v| = \sqrt{7}, \quad |a| = \frac{1}{4}\sqrt{91}.$$

مسائل إضافية

في المسائل ٢٢ - ٢٥، أوجد $\tan \psi$ عند النقطة المفروضة.

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho = 3 - \sin \theta & - ٢٢ & \theta = 0, \theta = 3\pi/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho = a(1 - \cos \theta) & - ٢٣ & \theta = \pi/4, \theta = 3\pi/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho(1 - \cos \theta) = a & - ٢٤ & \theta = \pi/3, \theta = 5\pi/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho^3 = 4 \sin 2\theta & - ٢٥ & \theta = 5\pi/12, \theta = 2\pi/3 \end{array}$$

أوجد $\tan \tau$ في المسائل ٢٦ - ٢٩ :

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho = 2 + \sin \theta & - ٢٦ & \theta = \pi/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho^2 = 9 \cos 2\theta & - ٢٧ & \theta = \pi/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } 2\rho(1 - \sin \theta) = 3 & - ٢٨ & \theta = \pi/4 \end{array}$$

٢٥ - أوجد المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى $\rho = \sin 2\theta$.

ج : مماسات أفقية عند $\theta = 0, \pi, 54^\circ 44', 125^\circ 16', 234^\circ 44', 305^\circ 16'$

مماسات رأسية عند $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 35^\circ 16', 144^\circ 44', 215^\circ 16', 324^\circ 44'$

في المسائل ٣١ - ٣٣ أوجد زوايا التقاطع الحادة لكل زوج من المنحنيات.

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho = \sin \theta, \rho = \sin 2\theta & - ٣١ & \phi = 79^\circ 6', \theta = \pi/3, \theta = 5\pi/3, \phi = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho = \sqrt{2} \sin \theta, \rho^2 = \cos 2\theta & - ٣٢ & \phi = \pi/3, \theta = \pi/6, \theta = 5\pi/6, \phi = \pi/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{عند } \rho^2 = 16 \sin 2\theta, \rho^2 = 4 \csc 2\theta & - ٣٣ & \phi = \pi/3 \end{array}$$

٣٤ - بين أن كل زوج من المنحنيات التالية يتقاطعان بشكل عمودي عند جميع نقاط التقاطع .

$$\begin{array}{ll} (أ) & \rho = 4 \cos \theta, \rho = 4 \sin \theta \\ (ب) & \rho = e^{\theta}, \rho = e^{-\theta} \\ (ج) & \rho^2 \cos 2\theta = 4, \rho^2 \sin 2\theta = 9 \\ (د) & \rho = 1 + \cos \theta, \rho = 1 - \cos \theta \end{array}$$

٣٥ - أوجد زاوية تقاطع المماس للمنحنى $\rho = 2 - 4 \sin \theta$ عند القطب . ج : $2\pi/3$.

٣٦ - أوجد انحناء كل منحنى عند النقطة $P(\rho, \theta)$

$$(أ) \rho = \sin \theta \quad (ب) \rho = \cos 2\theta \quad (ج) \rho^2 = 4 \cos 2\theta \quad (د) \rho = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$$

$$ج : (أ) 1/(\sqrt{2}) \quad (ب) 2 \quad (ج) 3/2 \sqrt{\cos 2\theta} \quad (د) 2/5$$

٣٧ - إذا كانت $\rho = f(\theta)$ هي المعادلة القطبية لمنحنى وكان s طول القوس على هذا المنحنى .

$$\text{فباستخدام } x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \text{ حيث أن } \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$\text{أوجد } \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + (\rho')^2$$

٣٨ - أوجد $ds/d\theta$ لكل منحنى مما يلي ، بفرض أى s تزداد مع تزايد θ :

$$\begin{array}{ll} (أ) \rho = a \cos \theta & (ب) \rho = a(1 + \cos \theta) \\ (ج) \rho = \cos 2\theta & (د) \rho = \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\theta} \end{array}$$

٣٩ - لنفرض أن جسيماً يتحرك على المنحنى $\rho = f(\theta)$ بحيث يتعين موضعه عند أى لحظة t بالمعادلة $\rho = g(t), \theta = h(t)$.

$$(أ) \text{ بفرض العلاقة التي حصلت عليها في المسألة ٣٧ في } \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \text{ أوجد } v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

$$(ب) \text{ من } \tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \rho \frac{d\theta/dt}{d\rho/dt} \text{ أوجد } \sin \psi = \frac{\rho}{v} \frac{d\theta}{dt} \text{ ، } \cos \psi = \frac{1}{v} \frac{d\rho}{dt}$$

$$٤٠ - \text{برهن أن } \frac{du_\rho}{dt} = -u_\theta \frac{d\theta}{dt} \text{ ، } \frac{du_\theta}{dt} = u_\rho \frac{d\theta}{dt}$$

٤١ - يتحرك جسيم على منحنى القلب $\rho = 4(1 + \cos \theta)$ في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبحيث يكون $d\theta/dt = \pi/6 \text{ rad/sec}$.
عبر عن v و a بدلالة u_ρ و u_θ .

$$ج : v = -\frac{2\pi}{3} u_\rho \sin \theta + \frac{2\pi}{3} u_\theta (1 + \cos \theta), a = -\frac{\pi^2}{9} u_\rho (1 + 2 \cos \theta) - \frac{2\pi^2}{9} u_\theta \sin \theta$$

٤٢ - يتحرك جسيم على المنحنى $\rho = 8 \cos \theta$ في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبسرعة قياسية ثابتة مقدارها 4 وحدات/ثانية ، عبر عن v و a بدلالة u_ρ و u_θ .

$$ج : v = -4u_\rho \sin \theta + 4u_\theta \cos \theta, a = -4u_\rho \cos \theta - 4u_\theta \sin \theta$$

٤٣ - عندما يتحرك جسيم كتلته m في مسار تحت تأثير قوة F متجهة باستمرار نحو نقطة الأصل فإن $F = m a$

$$\text{أو } a = 1/m F \text{ ويكون } a_\theta = 0 \text{ بين أنه عندما يكون } a_\theta = 0 \text{ فإن } \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = k \text{ حيث } k \text{ ثابت وأن}$$

نصف القطر المتجه يسمح السطح بمعدل ثابت .

$$٤٤ - \text{يتحرك جسيم على المنحنى } \rho = \frac{2}{1 - \cos \theta} \text{ بحيث يكون } a_\theta = 0 \text{ بين أن } a_\rho = -\frac{K^2}{2} \frac{1}{\rho^2}$$

حيث k معرفة في المسألة ٤٣ .

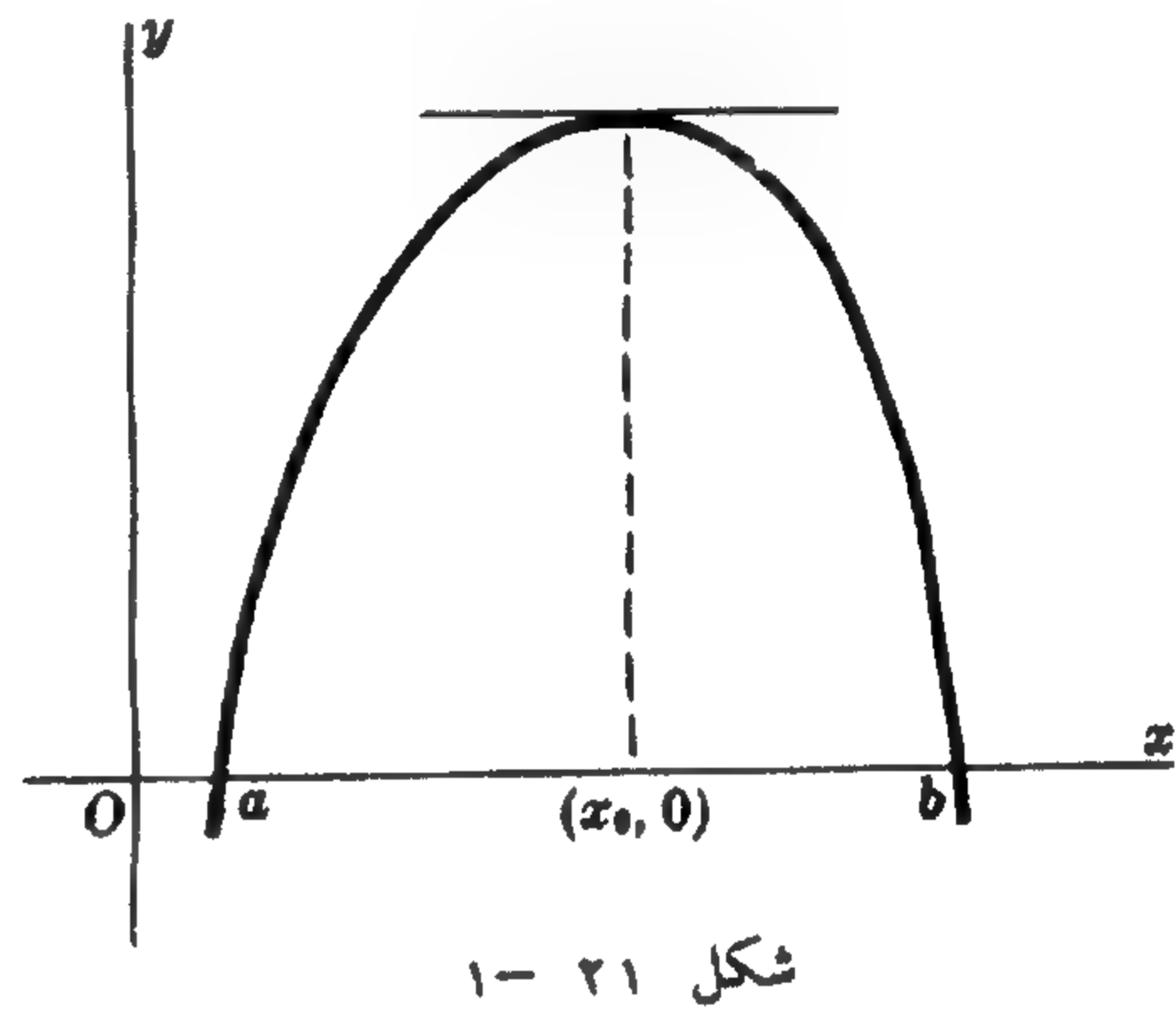
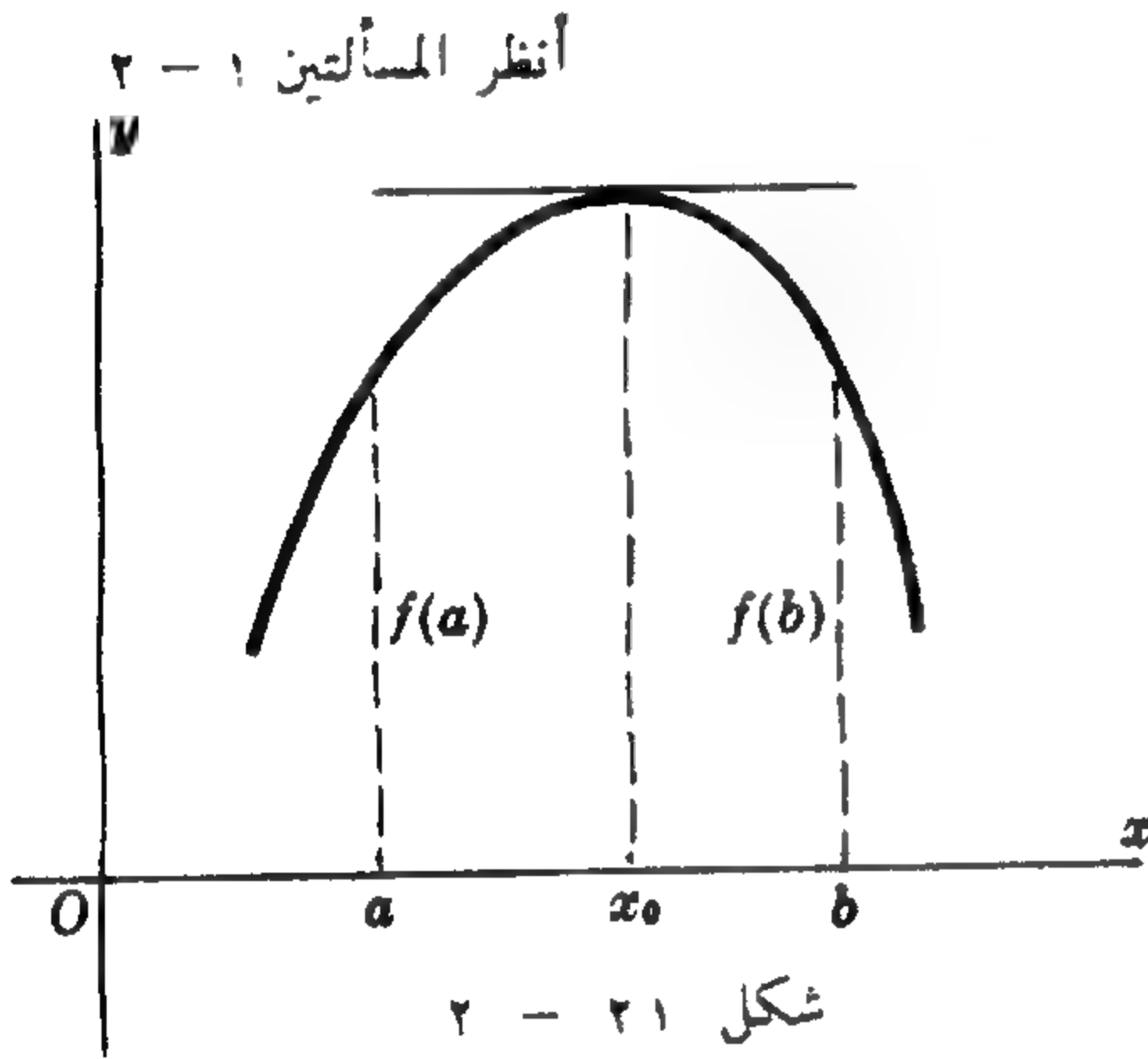
الفصل الحادى والعشرون

قانون القيمة المتوسطة

نظرية رول : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \leq x \leq b$ وكان $f(a) = f(b) = 0$ وإذا كان $f'(x)$ موجودة عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايات الفترة على الأكثر ، فإن $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل x ، مثل $x = x_0$ ، واقعة بين a و b .

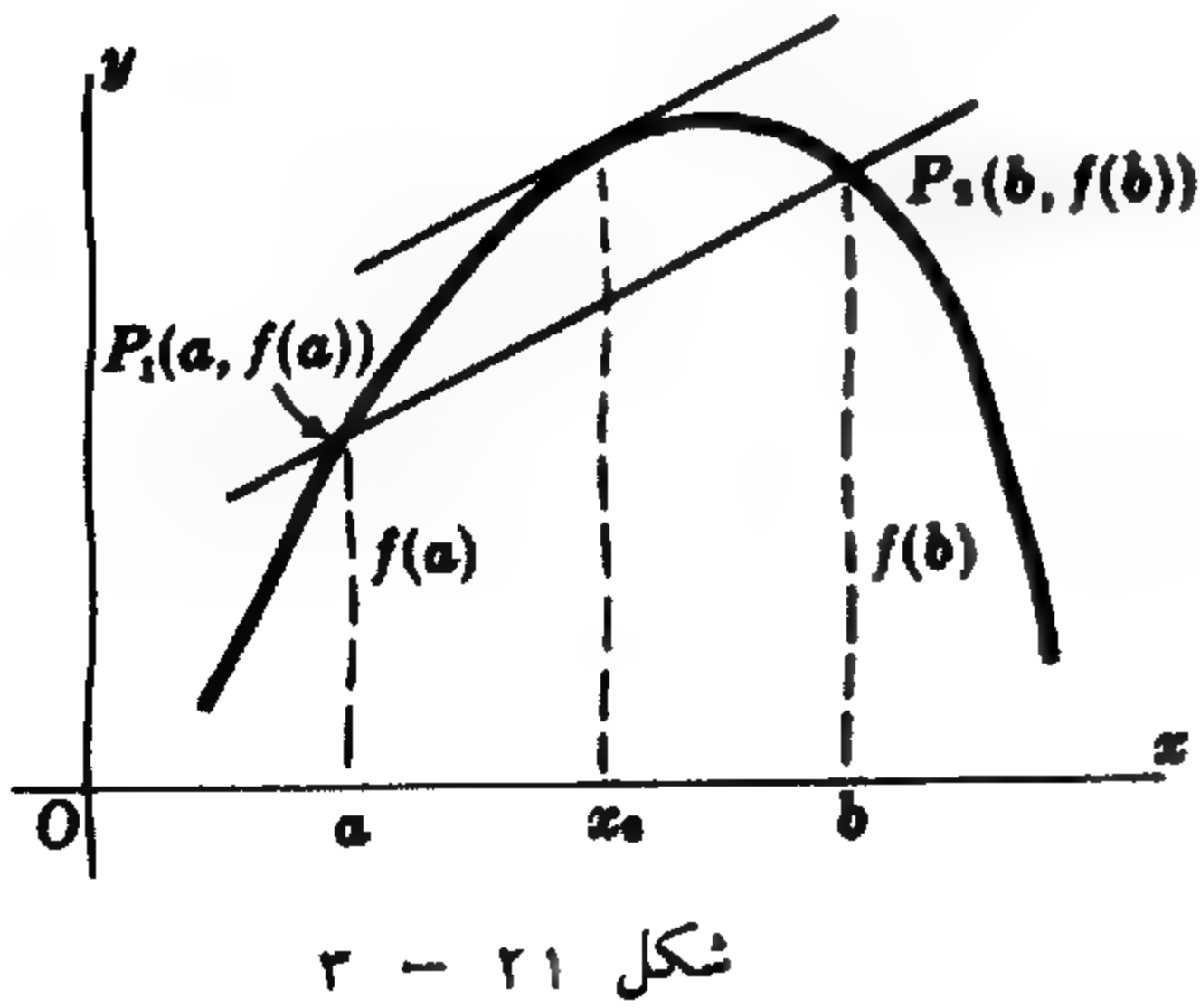
وهذا يعنى من الناحية الهندسية أنه إذا قطع منحنى متصل المحور x عند $x = a$ و $x = b$ وكان له مماس عند كل نقطة من نقطة التى تقع بين a و b فإنه يوجد على الأقل نقطة واحدة $x = x_0$ بين a و b يكون المماس عندها موازياً للمحور . أنظر الشكل ٢١ - ١ .

نتيجة : إذا حققت الدالة $f(x)$ شروط نظرية رول ، خلاف أن $f(a) = f(b) \neq 0$ فعندئذ $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل x مثل $x = x_0$ ، واقعة بين a و b . أنظر الشكل ٢١ - ٢ .



قانون القيمة المتوسطة : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \leq x \leq b$ وكانت $f(x)$ موجودة عند كل موضع فى هذه الفترة باستثناء نقطتى نهايات الفترة على الأكثر ، فعندئذ يوجد على الأقل قيمة واحدة x بين a و b مثل $x = x_0$ بحيث :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$



وهذا يعنى من الناحية الهندسية أنه إذا كانت P_1 و P_2 نقطتين على منحنى متصل ، له مماس عند كل نقطة بينهما ، فعندئذ يوجد على الأقل نقطة واحدة على المنحنى بين P_1 و P_2 يكون ميل المنحنى عندها مساوياً لميل $P_1 P_2$. أنظر الشكل ٢١ - ٣ .

لبرهان أنظر المسألة ١٢

يمكن صياغة قانون القيمة المتوسطة بأشكال مفيدة متعددة .

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(x_0), \quad (I)$$

وبتغيير بسيط في الرموز تأخذ هذه الصيغة الشكل .

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(x_0), \quad (II)$$

ويتضح من الشكل ٢١-٤ أن $x_0 = a + \theta(b-a)$

حيث $0 < \theta < 1$. وبإجراء هذا التبديل تأخذ الصيغة (I) الشكل :

شكل ٢١ - ٤

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'[a + \theta(b-a)], \quad 0 < \theta < 1 \quad (III)$$

وإذا كتبنا $(b-a) = h$ فإن (III) تصبح :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \quad (IV)$$

وأخيراً إذا وضعنا $a = x$ و $h = \Delta x$ فإن (IV) تصبح :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x+\theta \cdot \Delta x), \quad 0 < \theta < 1 \quad (V)$$

أنظر المسائل ٣ - ٩

القانون العام للقيمة المتوسطة : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ متصلتين في الفترة $a \leq x \leq b$ ، وإذا وجد $f'(x)$ و $g'(x)$ وكان $g'(x) \neq 0$ عند كل موضع من هذه الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر . فعندئذ توجد بين a و b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_0$ بحيث يكون :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

وعندما $g(x) = x$ تصبح هذه المعادلة قانون القيمة المتوسطة .

للبرهان أنظر المسألة ١٣

قانون القيمة المتوسطة الموسع : إذا كان كلا من $f(x)$ وجميع مشتقاتها حتى $(n-1)$ متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وإذا كانت $f^{(n)}(x)$ موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر ، فعندئذ توجد قيمة واحدة على الأقل لـ x ، مثل $x = x_0$ ، واقعة بين a ، b بحيث :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n \quad (VI)$$

للبرهان أنظر المسألة ١٥

وإذا وضعنا x بدلا من b فإن (VI) تأخذ الشكل :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \quad (VII)$$

وإذا وضعنا 0 بدلا من a في (VII) تصبح :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n \quad (VIII)$$

حيث x_0 واقعة بين 0 و x .

مسائل محلولة

١- أوجد قيمة x_0 الواردة في نظرية رول للدالة $f(x) = x^3 - 12x$ في الفترة $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.
 إن $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ وعندما $x = \pm 2$ فإن $x_0 = 2$ هي القيمة المطلوبة .

٢- هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين (أ) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ (ب) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ ؟
 (أ) أن $f(x) = 0$ عندما $x = 0, 4$ وبما أن $f(x)$ دالة متقطعة عند $x = 2$ وهي نقطة من نقط الفترة $0 \leq x \leq 4$ فإن النظرية لا تطبق .

(ب) $f(x) = 0$ عندما $x = 0, 4$ ولكن $f(x)$ هنا متقطعة عند $x = -2$ وهي نقطة ليست من نقط الفترة $0 \leq x \leq 4$ ثم إن $f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$ موجودة في كل موضع باستثناء عند $x = -2$. لذلك فالنظرية قابلة للتطبيق حيث نجد $(\sqrt{3} - 1)$ $x_0 = 2$ ، وهي الجذر الموجب لـ $x^2 + 4x - 8 = 0$.

٣- أوجد قيمة x_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ ، $a = 1$ ، $b = 3$.
 باستخدام الصيغة (I) حيث $f'(x_0) = 6x_0 + 4$ ، $f(a) = f(1) = 4$ ، $f(b) = f(3) = 36$ ، $b - a = 2$ ،
 نجد أن $36 = 4 + 2(6x_0 + 4) = 12x_0 + 12$ ومنه $x_0 = 2$.

٤- استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية لـ $\sqrt[6]{65}$.

ضع $f(x) = \sqrt[6]{x}$ ، $a = 64$ ، $b = 65$ ، وباستخدام الصيغة (I)
 عندئذ يكون $64 < x_0 < 65$ ، $f(65) = f(64) + (65 - 64)/6x_0^{5/6}$ ، وبما أن x_0 غير معروفة فإننا نأخذ $x_0 = 64$ فنجد
 القيمة التقريبية $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64} + 1/(6\sqrt[6]{64^5}) = 2 + 1/192 = 2.00521$.

٥- المطلوب توسيع حفرة دائرية في قطعة معدنية ، قطرها 10 cm وعمقها 30 cm ، ليصبح قطرها 10.3 cm . احسب كمية المعدن الذى تزيله من القطعة .

يملى الحجم بالسنتيمترات المكعبة ، لثقب دائرى نصف قطره x cm وعمقه 30 cm . $V = f(x) = 30\pi x^2$.
 فعلينا إذن أن نقدر القيمة $f(5.15) - f(5)$. من قانون القيمة المتوسطة . لدينا .

$$f(5.15) - f(5) = 0.15 f'(x_0) = 0.15(60\pi x_0), \quad 5 < x_0 < 5.15$$

فإذا أخذنا $x_0 = 5$ فإننا نحصل على القيمة التقريبية $f(5.15) - f(5) = 0.15(60\pi \cdot 5) = 45\pi \text{ cm}^3$.

٦- طبق قانون القيمة المتوسطة على $y = f(x)$ ، $a = x$ ، $b = x + \Delta x$ بفرض أن جميع الشروط محققة ، لتحصل
 على $\Delta y = f'(x) \Delta x$ بشكل تقريبي .

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x + \Delta x - x] \cdot f'(x_0), \quad x < x_0 < x + \Delta x.$$

لدينا .
 فإذا أخذنا $x_0 = x$ فإننا نجد القيمة التقريبية لـ $\Delta y = f'(x) \Delta x$.

٧- استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أن $\sin x < x$ عندما $x > 0$ ، بما أن $\sin x \leq 1$ فإن $\sin x < x$.
 وعندما $x > 1$ لنأخذ $f(x) = \sin x$ في الفترة $0 \leq x \leq 1$ وباستخدام الصيغة (II) فنجد أن :

$$\sin x = \sin 0 + x \cos x_0 = x \cos x_0, \quad 0 < x_0 < x$$

ولكن في هذه الفترة $\cos x_0 < 1$ وبالتالي فإن $x \cos x_0 < x$ ومنه $\sin x < x$.

٨- استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ عندما $-1 < x < 0$ وعندما $x > 0$.

باستخدام الصيغة (IV) حيث $f(x) = \ln x$ ، $a = 1$ ، $h = x$ ، و فنجد :

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x \frac{1}{1+\theta x} = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

وعندما $x > 0$ فإن $1 < 1 + \theta x < 1 + x$ وبالتالى $1 > \frac{1}{1+\theta x} > \frac{1}{1+x}$ و $x > \frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$.
وعندما $-1 < x < 0$ فإن $1 > 1 + \theta x > 1 + x$ وبالتالى $1 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$ و $x > \frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$.
وفي كلا الحالتين $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$ و $\frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$. وكذلك $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x} < x$ و $\frac{x}{1+\theta x} < x$.
وبالتالى فإن $\frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$ و $\frac{x}{1+\theta x} < x$.
عندما $x > 0$ و $-1 < x < 0$.

٩ - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ عندما $-1 < x < 0$ وعندما $x > 0$.

لنأخذ $f(x) = \sqrt{x}$ وباستخدام الصيغة (IV) حيث $a=1, h=x$ نجد :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}, \quad 0 < \theta < 1$$

وعندما $x > 0$ نلاحظ أن $\sqrt{1+\theta x} < \sqrt{1+x}$ ، و $\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$ ، وعندما $-1 < x < 0$ نلاحظ أن $\sqrt{1+\theta x} > \sqrt{1+x}$ ، و $\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$.
وفي كلا الحالتين يكون $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$ و $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$.
نجد $\sqrt{1+x} > 0$.

١٠ - أوجد قيمة x_0 الواردة في القانون العام للقيمة المتوسطة بفرض أن $f(x) = 3x+2, g(x) = x^3+1, 1 \leq x \leq 4$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{14-5}{17-2} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}$$

لإيجاد قيمة x_0 فإن :

$$\text{إذن } 2x_0 = 5 \text{ ومنه } x_0 = 5/2 .$$

١١ - برهن نظرية رول : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكانت $f(a)=f(b)=0$ وكانت

$f'(x)$ موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر فإن $f'(x)=0$ لقيمة واحدة على الأقل لـ x مثل $x=x_0$ واقعة بين a و b .

إذا كانت $f(x)=0$ على طول الفترة فإن $f'(x)=0$ كذلك ويتم برهان النظرية . أما إذا كانت $f(x)$ موجبة (سالبة) في موضع ما في الفترة فعندئذ يكون لها قيمة عظمى (صغرى) نسبية عند موضع مائل $x=x_0$ في الفترة $a < x_0 < b$.

(أنظر الخاصية II من الفصل الثالث) وبالتالى فإن $f'(x_0)=0$.

١٢ - برهن قانون القيمة المتوسطة : إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وإذا كانت $f'(x)$ موجودة عند

كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر فعندئذ يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ x بين a و b مثل $x=x_0$ بحيث

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

بالعودة إلى الشكل ٢ - ٣ نلاحظ أن معادلة المستقيم القاطع $P_1 P_2$ هي $y = f(b) + K(x-b)$ حيث

$K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ والمسافة الرأسية من المستقيم القاطع إلى المنحنى عند أى نقطة x في الفترة $a < x < b$ هي $K(x-b)$.

$F(x) = f(x) - f(b) - K(x-b)$ إن $F(x)$ الآن تحقق شروط نظرية رول (تحقق من ذلك) وبالتالى فإن $F'(x) = f'(x) - K = 0$ عند

$$K = f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ وهكذا بين } a \text{ و } b$$

وهو المطلوب .

١٣- برهن القانون العام للقيمة المتوسطة : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ متصلتين في الفترة $a \leq x \leq b$ وإذا وجد $f'(x)$ و $g'(x)$ وكانت $g'(x) \neq 0$ عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر ، فنحن نوجد بين a و b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_0$ بحيث يكون :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

لنفرض $g(b) = g(a)$ فنحن نتضح من نتيجة نظرية رول أن $g'(x) = 0$ عند قيمة لـ x بين a و b وهذا مخالف للفرض ، إذن $g(b) \neq g(a)$. لنفرض الآن $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = K$ ، حيث K ثابت ، ونكتب الدالة .

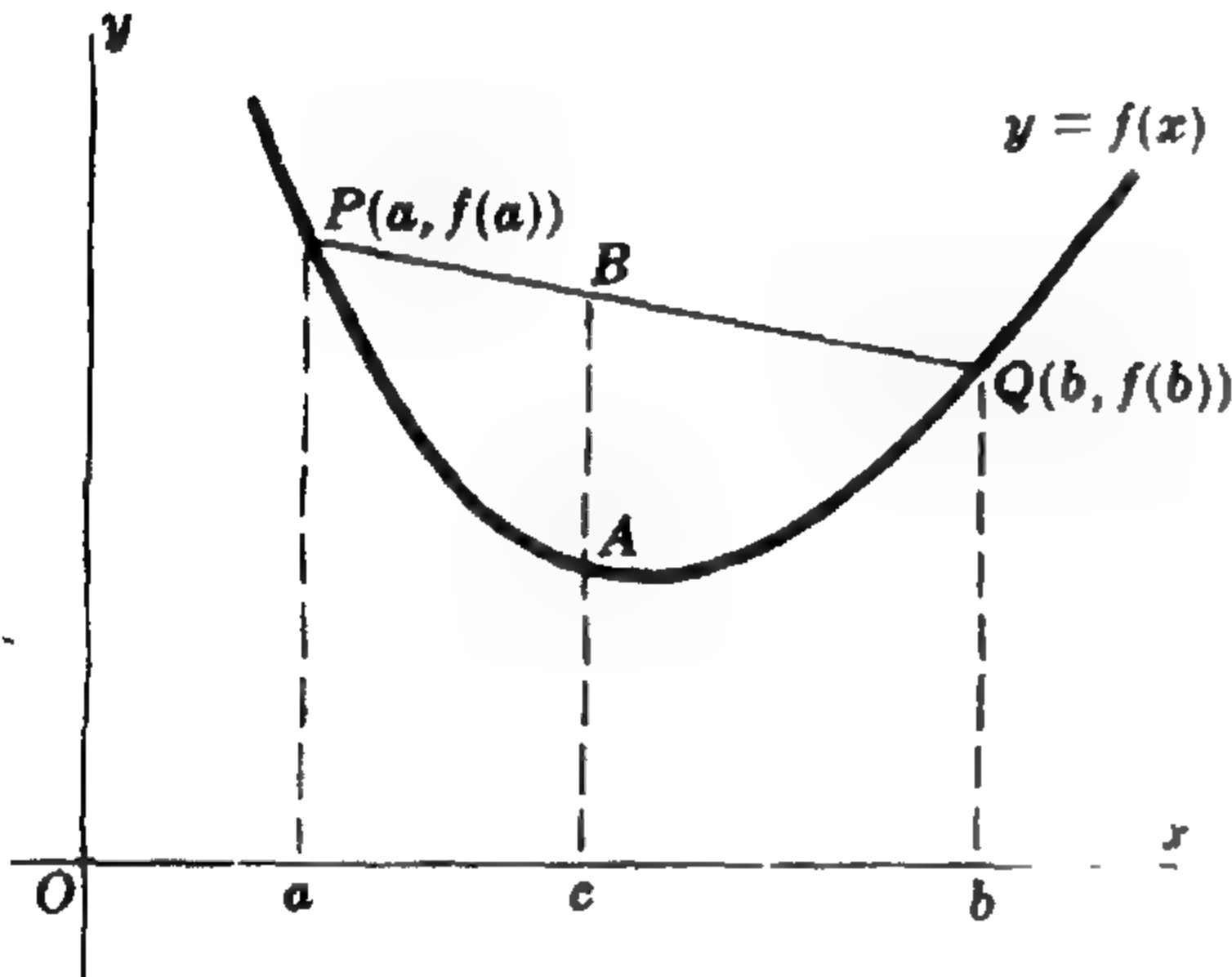
$$F(x) = f(x) - f(b) - K[g(x) - g(b)]$$

نحقق هذه الدالة شروط نظرية رول (تحقق من ذلك) وبالتالي $F'(x) = f'(x) - K g'(x) = 0$ عند قيمة واحدة لـ x على الأقل ، لتكن $x = x_0$ بين a و b إذن :

$$K = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

وهو المطلوب .

١٤- يكون القوس PQ لمنحنى $y = f(x)$ مقعراً لأعلى إذا وقع تحت الوتر ومقعراً لأسفل إذا وقع فوق هذا الوتر . برهن أنه إذا كانت $f(x)$ و $f'(x)$ متصلتين في الفترة $a \leq x \leq b$ وإذا حافظت $f'(x)$ على إشارتها في الفترة $a < x < b$ فنحن نتأكد يكون :



شكل ٢١ - ٥

(i) $f(x)$ مقعرة لأعلى في الفترة $a < x < b$ عندما $f''(x) > 0$

(ii) $f(x)$ مقعرة لأسفل في الفترة $a < x < b$ عندما $f''(x) < 0$

إن معادلة الوتر PQ الذى يصل $P[a, f(a)]$ و $Q[b, f(b)]$ هي

$$y = f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نقطين على القوس والوتر ، على الترتيب ، احداثها السيني $x = c$ حيث $a < c < b$ ويعطى احداثها الصادي بـ $f(c)$ و

$$f(a) + (c - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b - c) \cdot f(a) + (c - a) \cdot f(b)}{b - a}$$

(i) علينا أن نبرهن أن :

$$f(c) < \frac{(b - c) \cdot f(a) + (c - a) \cdot f(b)}{b - a}$$

عندما $f''(x) > 0$. استناداً إلى قانون القيمة المتوسطة ، يكون $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi)$ ، حيث ξ بين a و c . وبما أن $f''(x) > 0$ في الفترة $a < x < b$ فإن $f'(x)$ دالة متزايدة في الفترة $a < x < b$ ، وبالتالي فإن $f'(\xi) < f'(\eta)$ ، حيث η بين c و b . ويكون $\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\eta)$ ، ومنه ينتج أن :

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

$$f(c) < \frac{(b - c) \cdot f(a) + (c - a) \cdot f(b)}{b - a}$$

كما هو مطلوب .

وأما الجزء (ii) فنتركه للقارىء كتمرين .

١٥ - برهن أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة مع مشتقاتها الـ $(n-1)$ الأولى فى الفترة $a \leq x \leq b$ وإذا وجد $f^{(n)}(x)$ فى كل موضع فى الفترة باستثناء نقطى نهايتها على الأكثر ، فمئذئذ توجد بين a و b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_0$ بحيث :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

إذا كانت $n=1$ فإن الأمر يؤول إلى قانون القيمة المتوسطة . والبرهان التالى مماثل للبرهان فى المسألة ١٢ . لنعرف K بالملاقة :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + K(b-a)^n \quad (i)$$

وباعتبار أن :

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + K(b-x)^n$$

من المعادلة (i) نلاحظ الآن أن $F(a) = 0$ وأن $F(b) = 0$. لذلك يوجد ، استناداً إلى نظرية رول ، قيمة لـ x ولتكن $x = x_0$ وبحيث تحقق العلاقة :

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= f'(x_0) + \{f''(x_0) \cdot (b-x_0) - f'(x_0)\} + \left\{ \frac{f'''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2 - f''(x_0) \cdot (b-x_0) \right\} \\ &\quad + \dots + \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(b-x_0)^{n-2} \right\} - Kn(b-x_0)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - Kn(b-x_0)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

وبالتالى فإن $K = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ وتأخذ المعادلة (i) الشكل :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

مسائل إضافية

١٦ - أوجد قيمة x_0 الواردة فى نظرية رول بفرض أن :

$$x_0 = 2 \quad : \quad \text{ج} \quad f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 1 \leq x \leq 3 \quad (أ)$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\pi \quad : \quad \text{ج} \quad f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (ب)$$

$$x_0 = \pi \quad : \quad \text{ج} \quad f(x) = \cos x, \quad \pi/2 < x < 3\pi/2 \quad (ج)$$

١٧ - أوجد قيمة x_0 الواردة فى قانون القيمة المتوسطة بفرض أن :

$$x_0 = 2\sqrt{3} \quad : \quad \text{ج} \quad y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 6 \quad (أ)$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad : \quad \text{ج} \quad y = ax^2 + bx + c, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (ب)$$

$$x_0 = \frac{2e-1}{1+\ln 2} \quad : \quad \text{ج} \quad y = \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2e \quad (ج)$$

١٨ - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتحسب قيمة تقريبية لـ $\sqrt{15}$ (أ)

$$1/999 \quad (ج) \quad (3.001)^3 \quad (ب)$$

$$0.001 \quad 001 \quad (ج) \quad 27.027 \quad (ب) \quad 3.875 \quad (أ) : \text{ج}$$

١٩ - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أن :

$$(١) \quad \tan x > x, 0 < x < \frac{1}{2}\pi; \quad \text{Arc tan } x < x, x > 0; \quad \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc sin } x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1.$$

٢٠ - بين أن $|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|$ بحيث x_1 عدداً ، وذلك بفرض أن :

$$(١) \quad f(x) = \sin x, \quad (ب) \quad f(x) = \cos x.$$

٢١ - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أنه :

(١) إذا كانت $f'(x) = 0$ في كل موضع في الفترة $0 \leq x \leq b$ فإن $f(x) = f(a) = c$ حيث c ثابت في كل موضع في نفس الفترة .

(ب) $f(x)$ تزداد مع x في الفترة المعطاة $0 \leq x \leq b$ إذا كانت $f'(x) > 0$ على طول الفترة .

ارشاد : لتكن $x_1 < x_2$ نقطتين على الفترة . عندئذ $f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_0)$, $x_1 < x_0 < x_2$.

٢٢ - استخدم نظرية المسألة ٢١ (١) لتبرهن أنه إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ مختلفتين ولكن $f'(x) = g'(x)$ في فترة ما فإن $f(x) - g(x) = c \neq 0$ حيث c ثابت ، في نفس الفترة .

٢٣ - تعرف نقطة الانحناء $f(x)$ بأنها نقطة حرجة عند $x = x_0$ بحيث تتغير عندها إشارة $f'(x)$ عندما تزداد x مارة بـ $x = x_0$ بفرض أن $x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m$ هي نقط الانحناء المختلفة لـ $f(x)$ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ جذر حقيقى واحد على الأكثر في كل من الفترات $x < x_1, x_1 < x < x_2, \dots, x_{m-1} < x < x_m, x > x_m$.

٢٤ - برهن أنه إذا كان لـ $f(x) = 0$ من الدرجة n جذراً حقيقياً بسيطاً فإن لـ $f'(x) = 0$ ، $(n-1)$ جذراً حقيقياً بسيطاً بالضبط .

٢٥ - برهن أن للمعادلة $x^3 + px + q = 0$ (١) جذراً حقيقياً واحداً إذا كان $P > 0$ (ب) ثلاثة جذور حقيقية بسيطة عندما $4p^3 + 27q^2 < 0$

٢٦ - أوجد قيمة x_0 الواردة في القانون العام للقيمة المتوسطة بفرض أن :

$$(١) \quad f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = x^2 - 4x + 6; \quad a = 0, \quad b = 1.$$

$$(ب) \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x; \quad a = \pi/6, \quad b = \pi/3.$$

٢٧ - استخدم قانون القيمة المتوسطة الموسع (VIII) لتبرهن أنه :

(١) يمكن تقريب $\sin x$ إلى x مع خطأ لايزيد عن 0.005 وذلك عندما تكون $x < 0.31$

ارشاد : عند $n=3$ لدينا $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos x_0$. ضع $\frac{1}{6}|x^3 \cos x_0| \leq \frac{1}{6}|x^3| < 0.005$.

(ب) يمكن تقريب $\sin x$ إلى $x - x^3/6$ بخطأ لايزيد عن 0.000 05 عندما تكون $x < 0.359$.

الفصل الثاني والعشرون

الصيغ غير المحددة

عند إيجاد المشتقة : لدالة قابلة للاشتقاق في الفصل الرابع قادنا الأمر إلى النظر في :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)} \quad (1)$$

وبما أن نهاية كل من البسط والمقام لهذا الكسر مساوية للصفر فلقد جرت العادة أن ندعو (1) صيغة غير محددة من النمط $0/0$. وفي الفصل الثاني، المسألة الخامسة، وجدنا أمثلة أخرى من هذا النمط.

ولقد جرت العادة، بشكل مماثل أن ندعو $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{9x+7}$ (أنظر المسألة ٦ من الفصل الثاني) صيغة غير محددة من النمط ∞/∞ . ينبغي أن لانفهم هذين الرمزين $0/0$ و ∞/∞ ورموزاً أخرى ($0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty, \infty, \infty \cdot \infty$) سترد فيما بعد، بأشكالها الحرفية إذ أنها مجرد مصطلحات للتمييز بين أنماط الصيغ المحددة.

النمط $0/0$:

قاعدة لوبيتال. إذا كان a عدداً ما وكانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق و $g(x) \neq 0$ لجميع قيم x في الفترة $0 < |x - a| < \delta$ وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فمعدئد :

بشرط أن توجد النهاية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ أو أن تكون غير منتهية.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ١ : أن $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$ صيغة غير محددة من النمط $0/0$ ، وبما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\frac{d}{dx}(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 108,$$

(انظر المسائل ١ - ٧)

يلاحظ أن قاعدة لوبيتال تقتضى أن يكون $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)/g(x)$. ولكننا في بعض المسائل (المسألة ٨ مثلاً) سنعتبر الحالة التي يوجد فيها نهاية واحدة دون الأخرى من هاتين النهايتين.

النمط ∞/∞ :

لاتتغير نتائج قاعدة لوبيتال إذا أجرينا التغييرين التاليين أو كليهما في فروض القاعدة.

(i) نستبدل $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (8) بـ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

(ii) نستبدل a إذا كان a عدداً ما بـ " $a = +\infty, -\infty$ أو ∞ "

ونستبدل " $0 < |x - a| < \delta$ " بـ " $|x| > M$ ".

مثال ٢ : أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ صيغة غير محددة من النمط ∞/∞ . لذلك :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

أنظر المسائل ٩ - ١١

النمطان $0 \cdot \infty$ و $\infty - \infty$:

لمعالجة هذين النمطين نبدأ بتحويلهما إلى أحد النمطين $0/0$ أو ∞/∞ فمثلاً أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \text{ من النمط } 0 \cdot \infty \text{ بينما } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \text{ من النمط } \infty/\infty$$

$$\text{وأن } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\csc x - \frac{1}{x} \right) \text{ من النمط } \infty/\infty \text{ بينما } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) \text{ من النمط } 0/0 .$$

أنظر المسائل ١٣ - ١٦

الأنماط : $0^0, \infty^0, 1^\infty$:

إذا كان $\lim y$ واحداً من هذه الأنماط فإن $\lim (\ln y)$ من النمط $0 \cdot \infty$.

مثال ٣ : احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$.

إن هذه النهاية من النمط 1^∞ لنفرض $y = (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$ ، فيكون $\ln y = \cot^2 3x \ln \sec^3 2x = \frac{3 \ln \sec 2x}{\tan^2 3x}$ وتكون النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y$ من النمط $0/0$.

$$\text{وعلى هذا فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \sec 2x}{\tan^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan 2x}{6 \tan 3x \sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} ,$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 3x = 1 , \text{ وبالتالي فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{3 \sec^2 3x} = \frac{2}{3} .$$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 2/3 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x} = e^{2/3} .$$

أنظر المسائل ١٧ - ١٩

مسائل محلولة

١ - برهن قاعدة لوبيتال : إذا كان a عدداً وكانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق و $g(x) \neq 0$ لجميع قيم x

$$\text{في الفترة } 0 < |x - a| < \delta \text{ وإذا كانت } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\text{وإذا وجدت } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

إذا وضعنا في القانون العام للقيمة المتوسطة (الفصل ٢١) b بدلا من x وبملاحظة $f(a) = g(a) = 0$ فإننا نجد أن :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حيث x_0 تقع بين a و x وحيث أن $x_0 \rightarrow a$ عندما $x \rightarrow a$. إذن :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ exists, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

٢ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$. عندما $x \rightarrow 2$. نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يؤول إلى الصفر . إذن فالقاعدة

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{5}{4} . \quad \text{قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن}$$

٣ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$. عندما $x \rightarrow 0$. نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يؤول إلى الصفر . إذن فالقاعدة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3 . \quad \text{قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن}$$

٤ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$. أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \infty$.

٥ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$.

إن كلا من البسط والمقام يؤول إلى الصفر عندما $x \rightarrow 0$. إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin 2x - 2x}$$

وحيث أن الدالة الناتجة غير محددة من النمط $0/0$ فإننا نطبق القاعدة ثانية فنحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin 2x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos 2x - 2}$$

ومرة أخرى نجد أن الدالة الناتجة غير محددة من النمط $0/0$ وهكذا فإننا ، وبعد أن نبرر كل تساوى ، نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin 2x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos 2x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8 \cos 2x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

٦ - ابحث في : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{6} = 1$.

إن الدالة المفروضة غير محددة من النمط $0/0$ إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق غير أن الدالة الناتجة ليست من الصيغ غير المحددة (النهاية تساوى $7/3$) ولذلك فإن التطبيقات المتتالية للقاعدة ليست صحيحة وهذا خطأ شائماً .

٧ - ابحث في $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \frac{6x - 2}{6x - 4} = 2$.

إن الصيغة الصحيحة هنا هي $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x - 4} = 2$.

وكون النهاية صحيحة لا يبرر سلسلة الصيغ الخاطئة التي أدت إليها .

٨ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x - \pi}}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x - \pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}(x - \pi)^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} 2(x - \pi)^{1/2} \cos x = 0$$

حيث ينبغي أن يكون اقترابنا هنا من اليمين وإلا فإن $(x - \pi)^{1/2}$ تخيل .

٩ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

إن البسط والمقام يؤولان إلى $+\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ لذلك فإن

١٠ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x / \sin x}{\sec^2 x / \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^2 x = 1.$

١١ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x}$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc^2 x}{2 \csc^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc^2 x \cot x}{4 \csc^2 2x \cot 2x}$

إن كل تطبيق للقاعدة هنا ينتج عنه صيغة غير محددة من النمط ∞ / ∞ لذلك فإننا نلجأ إلى التعويض المثلثي التالي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{\sec^2 x} = 2$$

١٢ - بفرض أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. برهن أنه إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

بفرض $x = 1/y$. إذن عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $y \rightarrow 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}$.

إذن : $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-f'(1/y) \cdot y^{-2}}{-g'(1/y) \cdot y^{-2}}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dy} f(1/y)}{\frac{d}{dy} g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

١٣ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$.

عندما $x \rightarrow 0^+$ فإن $x^2 \rightarrow 0$ و $\ln x \rightarrow -\infty$ ولذلك فإن $\frac{\ln x}{1/x^2}$ صيغة غير محددة من النمط ∞ / ∞ .

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{2}x^2) = 0$

١٤ - $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \tan x) \sec 2x = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2 \sin 2x} = 1.$

١٥ - $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \frac{1}{2}.$

١٦ - $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$

١٧ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$. (هذه النهاية من النمط 1^∞)

لنضع $y = x^{1/(x-1)}$ فيكون $y = \frac{\ln x}{x-1}$ صيغة غير محددة من النمط $0/0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1 \quad \text{إذن :}$$

وبما أن $\ln y \rightarrow 1$ عندما $x \rightarrow 1$ فإن $y \rightarrow e$ والنهاية المطلوبة هي e .

١٨ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} (\tan x)^{\cos x}$. (هذه النهاية من النمط ∞^0)

لنضع $y = (\tan x)^{\cos x}$ إذن $\ln y = \cos x \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\sec x}$ وهي صيغة غير محددة من النمط $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\ln \tan x}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\sec^2 x / \tan x}{\sec x \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \quad \text{إذن :}$$

وبما أن $\ln y \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-$ فإن $y \rightarrow 1$ والنهاية المطلوبة هي 1 .

١٩ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$. (هذه النهاية من النمط 0^0)

لنضع $y = x^{\sin x}$ إذن $\ln y = \sin x \ln x = \frac{\ln x}{\csc x}$ وهي صيغة غير محددة من النمط $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{x \sin x - \cos x} = 0$$

وبما أن $\ln y \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow 0^+$ فإن $y \rightarrow 1$ والنهاية المطلوبة هي 1 .

٢٠ - احسب قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$. لدينا : الخ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2} + 1} = 1. \quad \text{غير أن :}$$

٢١ - إذا أثرت قوة دافعة كهربائية ثابتة مقدارها E على ملف مقاومته R ومعامل حثه الذاتي L فإن التيار المار

في الملف عند أية لحظة t يعطى بالمعادلة $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. استنتج الصيغة التي يمكن استخدامها عندما تكون R

صغيرة جداً .

$$\lim_{R \rightarrow 0} i = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{E(1 - e^{-Rt/L})}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} E \frac{t}{L} e^{-Rt/L} = \frac{Et}{L}$$

مسائل إضافية

احسب ما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = e^2 \quad - ٢٥$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{x - 4} = 256 \quad - ٢٦$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{1 - e^x} = -1 \quad - ٢٦$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 16} = 32 \quad - ٢٧$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan 2x} = 1/2 \quad - ٢٧$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = 1/2 \quad - ٢٨$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \csc x &= 1 - ٤٤ \\ \lim_{x \rightarrow 1} \csc \pi x \ln x &= -1/\pi - ٤٥ \\ \lim_{x \rightarrow 1/2\pi^-} e^{-\tan x} \sec^2 x &= 0 - ٤٦ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x - \arcsin x) \csc^3 x &= -1/6 - ٤٧ \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) &= -1/4 - ٤٨ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= 0 - ٤٩ \\ \lim_{x \rightarrow 1/2\pi} (\sec^3 x - \tan^3 x) &= \infty - ٥٠ \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) &= -1/2 - ٥١ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos x} \right) &= -1/3 - ٥٢ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= 0 - ٥٣ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= 1 - ٥٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} &= 1 - ٥٥ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x} &= e^4 - ٥٦ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x} &= 1/e - ٥٧ \\ \lim_{x \rightarrow 1/2\pi} (\sin x - \cos x)^{\tan x} &= 1/e - ٥٨ \\ \lim_{x \rightarrow 1/2\pi^-} (\tan x)^{\cos x} &= 1 - ٥٩ \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^{\tan 1/2\pi x} &= e^{-2/\pi} - ٦٠ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x &= e - ٦١ \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1} &= 1 - ٢٨ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} &= 1/4 - ٢٩ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin x} &= 4 - ٣٠ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} &= \frac{1}{2} \ln 2 - ٣١ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - x}{2x - \arcsin x} &= 1 - ٣٢ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x} &= 4 - ٣٣ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} &= -1/2 - ٣٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} &= -3/2 - ٣٥ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0 - ٣٦ \\ \lim_{x \rightarrow 1/2\pi} \frac{\csc 6x}{\csc 2x} &= 1/3 - ٣٧ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2 \ln x}{x + 3 \ln x} &= 5 - ٣٨ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^3}{e^x + 1} &= 0 - ٣٩ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{e^{\csc^2 x}} &= 0 - ٤٠ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^3} &= 1/4 - ٤١ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \cot x &= 1 - ٤٢ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x &= 0 - ٤٣ \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + x) \ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1 + x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\ln(1 - x)} = 1, \quad (١) \text{ - احسب :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-3/x}}{x^2} = 0 \quad (٣) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^{x^2}} = 0, \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{1000} x}{x^5}, \quad \text{و كذلك} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^5 x}{x^2} = 0. \quad \text{٦٢ - احسب :}$$

الفصل الثالث والعشرون

التفاضلات

التفاضلات : الدالة $y = f(x)$ نعرف ما يلي :

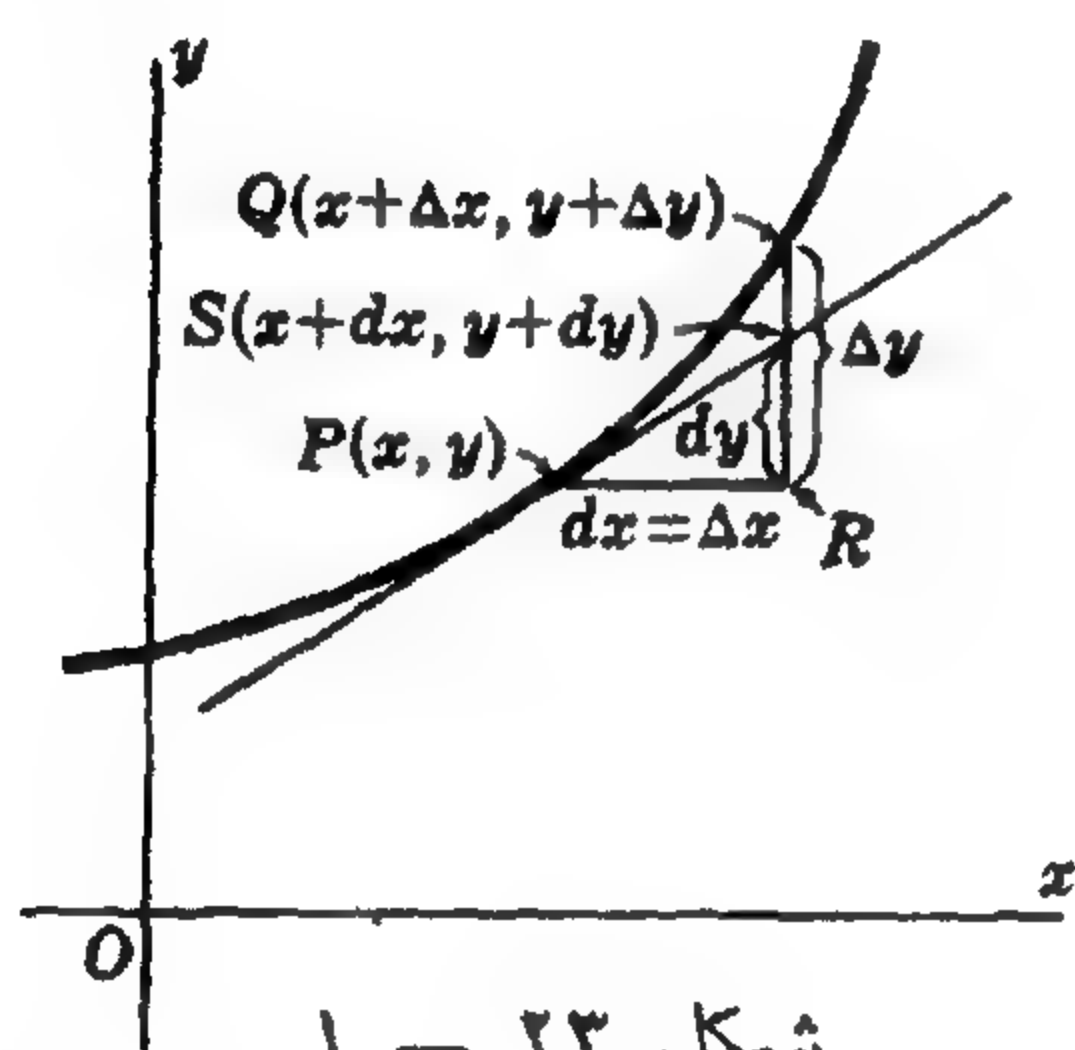
(أ) تعلى dx ، المسافة تفاضل x ، بالعلاقة $dx = \Delta x$.

(ب) تعلى dy ، المسافة تفاضل y ، بالعلاقة $dy = f'(x) dx$.

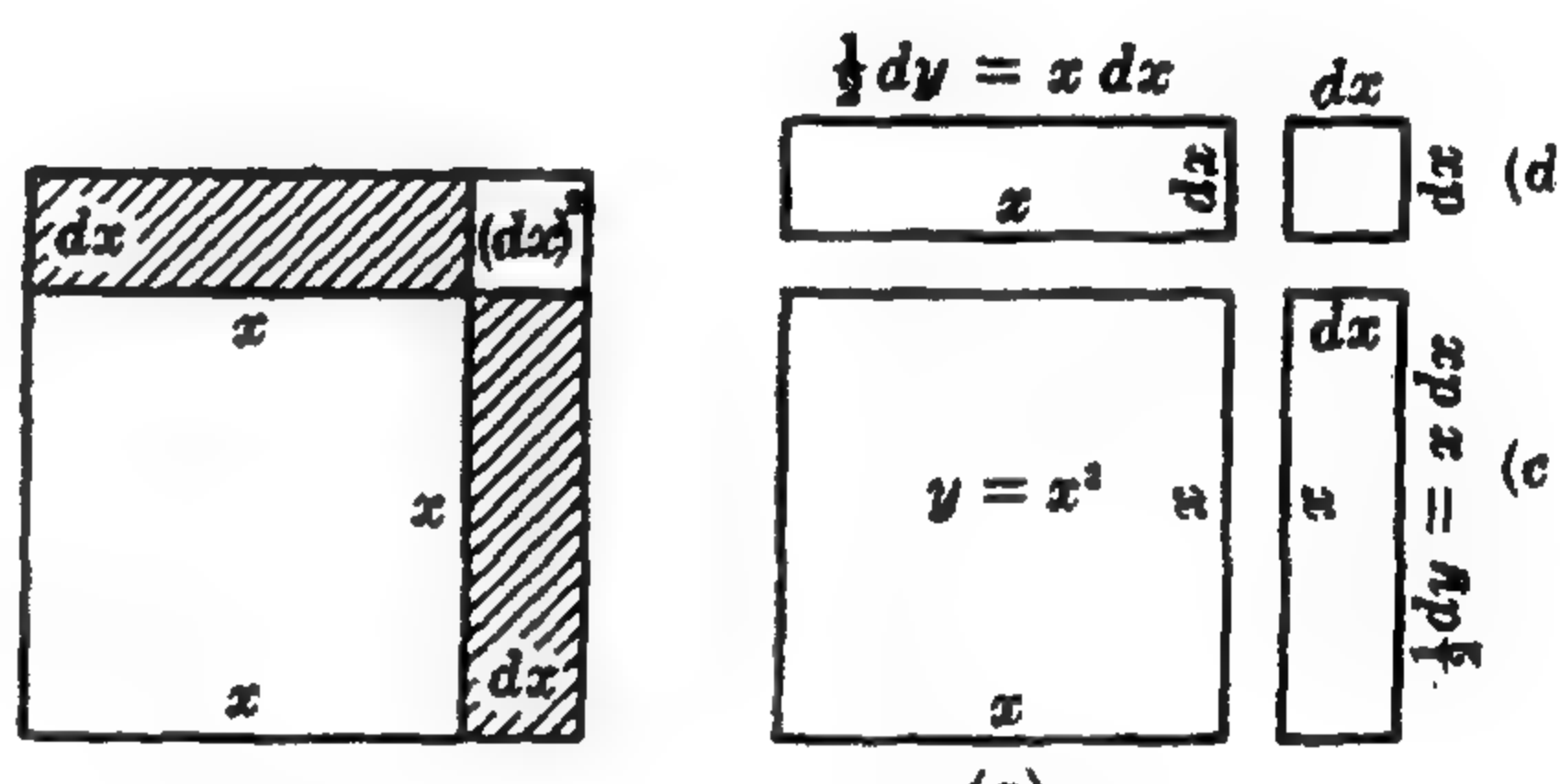
وتفاضل المتغير المستقل ، وفق التعريف ، يساوى تزايد المتغير ولكن تفاضل المتغير غير المستقل لا يساوى تزايد المتغير . انظر الشكل ٢٣ - ١

مثال ١ :

عندما $y = x^2$ فإن $dy = 2x \cdot dx$ في حين $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 2x dx + (dx)^2$.
والشكل ٢٣ - ٢ يبين التوضيح الهندسي لذلك . ومنه نرى أن Δy تختلف عن dy بالمربع الصغير الذى مساحته $(dx)^2$.



شكل ٢٣ - ١



شكل ٢٣ - ٢

التفاضل : dy يمكن أن نحصل عليه من التعريف $dy = f'(x) dx$ مباشرة أو باستخدام قواعد يمكن الحصول عليها من قواعد إيجاد حساب المشتقات . وبعض هذه القواعد هى :

$$d(c) = 0, \quad d(cu) = c du, \quad d(uv) = u dv + v du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad d(\sin u) = \cos u du, \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad \dots \text{إلخ}$$

مثال ٢ : أوجد dy لكل ما يلي :

$$y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad (1)$$

$$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5) dx$$

$$y = (2x^3 + 5)^{3/2} \quad (ب)$$

$$dy = \frac{3}{2}(2x^3 + 5)^{1/2} d(2x^3 + 5) = \frac{3}{2}(2x^3 + 5)^{1/2} \cdot 6x^2 dx = 9x^2(2x^3 + 5)^{1/2} dx$$

انظر المسائل ١ - ٥

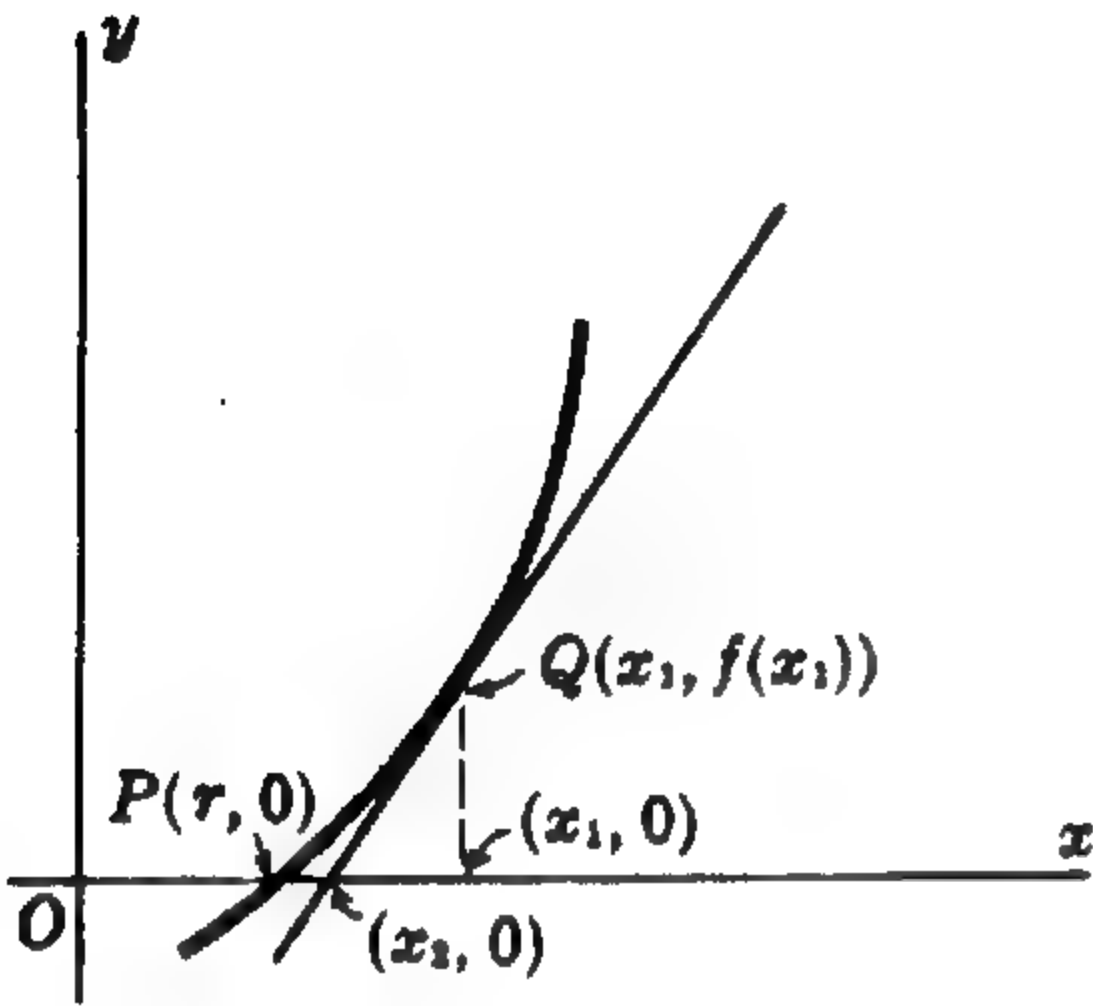
التقريب بالتفاضل : إذا كان $dx = \Delta x$ صغيرا نسبيا إذا ما قورن بـ x فإن dy تقريبا جيد ومناسب لـ Δy .

مثال ٣ :

ليكن $y = x^2 + x + 1$ وبفرض أن x تغير من $x = 2$ إلى $x = 2.01$ إذن التغير الحقيقي في y هو $\Delta y = \{(2.01)^2 + 2.01 + 1\} - \{2^2 + 2 + 1\} = .0501$.

$$dy = f'(x) dx = (2x + 1) dx = \{2(2) + 1\} .01 = .05. \quad \text{فنجد}$$

انظر المسائل ٦ - ١٠



شكل ٢٣ - ٣

تقريب جذور المعادلات : ليكن $x = x_1$ تقريبا مناسباً للجذر r للمعادلة

$y = f(x) = 0$ وليكن $f(x_1) = y_1 \neq 0$ أي أن y_1 لا تختلف عن

الصفر ، إلا بمقدار طفيف ، فإذا تغيرت الآن x_1 إلى r فإن التغير المقابل

الذي يطرأ على $f_1(x)$ هو $\Delta y_1 = -y_1$ ونحصل على التقريب في هذا

التغير في x_1 من $f'(x_1) dx_1 = -y_1$ أو $dx_1 = -\frac{y_1}{f'(x_1)}$ وبهذا

نحصل على تقريب ثان أفضل للجذر r وهو :

$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

والتقريب الثالث هو $x_3 = x_2 + dx_2 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ وهكذا .

أما إذا كانت x_1 ليست تقريبا مناسباً تماماً للجذر فإننا نجد أن x_2 تختلف اختلافا واضحا عن x_1 . ولكن على الرغم من أن هذه الطريقة تصحح نفسها أثناء إجرائها ، إلا أنه من المستحسن أن نختار تقريبا أولا جديدا .

انظر المسائل ١١ - ١٢

مسائل محلولة

١ - أوجد dy لكل مما يلي :

$$y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3} \quad (١)$$

$$dy = \frac{(x^2 + 3) \cdot d(x^3 + 2x + 1) - (x^3 + 2x + 1) \cdot d(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 3)(3x^2 + 2) dx - (x^3 + 2x + 1)(2x) dx}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^4 + 7x^3 - 2x + 6}{(x^2 + 3)^2} dx$$

$$y = \cos^2 2x + \sin 3x. \quad (ب)$$

$$dy = 2 \cos 2x d(\cos 2x) + d(\sin 3x) = 2 \cos 2x(-2 \sin 2x dx) + 3 \cos 3x dx$$

$$= -4 \sin 2x \cos 2x dx + 3 \cos 3x dx = (-2 \sin 4x + 3 \cos 3x) dx$$

$$dy = (3e^{3x} + 2/\sqrt{1-4x^2}) dx \quad y = e^{3x} + \arcsin 2x. \quad (ج)$$

اشتق كل من دوال المسائل ٢ - ٥ مستخدماً التفاضلات للحصول على dy/dx .

$$xy + x - 2y = 5. \quad - ٢$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x-2} \quad \text{ومن} \quad (x-2)dy + (y+1)dx = 0. \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} d(xy) + d(x) - d(2y) &= d(5). \\ xdy + ydx + dx - 2dy &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2y^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 8xy = 6. \quad - ٣$$

$$2x^2y dy + 3x^2y^2 dx - 2x^2 dy - 4xy dx + 6xy dy + 3y^2 dx - 8x dy - 8y dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3y^2 + 4xy - 3x^2y^2}{2x^2y - 2x^2 + 6xy - 8x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y + 3y^2}{3xy^2 + 2x^2} \quad \text{ومن} \quad 2\left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) - 3\left(\frac{x dy - y dx}{x^2}\right) = 0 \quad , \quad \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x} = 8. \quad - ٤$$

$$x = 3 \cos \theta - \cos 3\theta, \quad y = 3 \sin \theta - \sin 3\theta. \quad - ٥$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta - \cos 3\theta}{-\sin \theta + \sin 3\theta} \quad \text{ومن} \quad dx = (-3 \sin \theta + 3 \sin 3\theta) d\theta, \quad dy = (3 \cos \theta - 3 \cos 3\theta) d\theta,$$

٦ - استخدم التفاضلات لحساب قيمة تقريبية لـ $(1) \sqrt[3]{124}$ (ب) $1' \sin 60^\circ$.

$$(1) \quad \text{عندما} \quad y = x^{1/3}, \quad \text{يكون} \quad dy = \frac{1}{3x^{2/3}} dx. \quad \text{وبأخذ} \quad x = 125 = 5^3 \quad \text{و} \quad dx = -1, \quad \text{إذن} \\ \sqrt[3]{124} = y + dy = 5 - 0.0133 = 4.9867. \quad \text{ويكون بالتقريب} \quad dy = \frac{1}{3(125)^{2/3}}(-1) = \frac{-1}{75} = -0.0133$$

$$(ب) \quad \text{عندما} \quad x = 60^\circ \quad \text{و} \quad dx = 1' = 0.0003 \text{ rad}, \quad \text{يكون} \quad y = \sin x = \sqrt{3}/2 = 0.86603 \\ \text{و} \quad dy = \cos x dx = \frac{1}{2}(0.0003) = 0.00015. \quad \text{وعندئذ يكون التقريب}$$

$$\sin 60^\circ 1' = y + dy = 0.86603 + 0.00015 = 0.86618.$$

٧ - احسب $\Delta y - dy$ و dy و Δy بفرض أن $x = 2$ و $dx = 0.5$ و $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$.

$$\Delta y = \left\{ \frac{1}{2}(2.5)^2 + 3(2.5) \right\} - \left\{ \frac{1}{2}(2)^2 + 3(2) \right\} = 2.625.$$

$$dy = (x+3)dx = (2+3)(0.5) = 2.5 \quad \Delta y - dy = 2.625 - 2.5 = 0.125.$$

٨ - أوجد التغير التقريبي في حجم مكعب طول ضلعه x cm الناتج عن زيادة أطوال أضلاعه بـ 1%.
إن $V = x^3$ و $dV = 3x^2 dx$ و عندما يكون $dx = 0.01x$ فإن $dV = 3x^2(0.01x) = 0.03x^3 \text{ cm}^3$

٩ - أوجد الكتلة التقريبية لأنبوبة من النحاس طولها 2 m وقطرها الداخلي 2.5 cm وسمكها 0.25 cm علماً بأن كثافة النحاس 8800 kgm^{-3} .

نجد أولاً التغير في الحجم عندما يتغير نصف القطر $r = 1/80 \text{ m}$ بالمقدار $dr = 1/400 \text{ m}$.

$$V = 2\pi r^2 \text{ and } dV = 4\pi r dr = 4\pi(1/80)(1/400) = \pi/8000 \text{ m}^3$$

$$8800(\pi/8000) = 3.46 \text{ kg} \quad \text{والكتلة المطلوبة هي :}$$

١٠ - لأية قيمة لـ x يمكن استخدام $\sqrt[5]{x}$ بدلا من $\sqrt[5]{x+1}$ إذا كان الخطأ المسموح به أقل من 0.001 ؟

$$\text{عندما يكون } y = x^{1/5} \text{ و } dx = 1 \text{ فإن } dy = \frac{1}{5} x^{-4/5} dx = \frac{1}{5} x^{-4/5}. \text{ وإذا كان } \frac{1}{5} x^{-4/5} < 10^{-3}, \text{ فإن } x^{-4/5} < 5 \cdot 10^{-3}, \text{ ومنه } x^{-4} < 5^5 \cdot 10^{-15}.$$

$$\text{وإذا كان } x^{-4} < 10 \cdot 5^5 \cdot 10^{-16}, \text{ فإن } x^4 > \frac{10^{16}}{31250} = 752.1. \text{ ومنه } x > \sqrt[4]{752.1} = 1.3.$$

١١ - احسب بالتقريب الجذور الحقيقية لـ $x^3 + 2x - 5 = 0$ أو $x^3 = 5 - 2x$.

(أ) ارسم على نفس المحاور المنحنيان $y = x^3$ و $y = 5 - 2x$ إن الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هي جذور المعادلة المفروضة ويبدو من الرسم أن هناك جذرا واحدا قيمته التقريبية $x_1 = 1.3$.

(ب) والتقريب الثاني للجذر هو

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3 - \frac{(1.3)^3 + 2(1.3) - 5}{3(1.3)^2 + 2} = 1.3 - \frac{-2.03}{7.07} = 1.3 + .03 = 1.33$$

لقد تم إجراء القسمة بحيث نحصل على رقين عشريين ، لأن هناك صفرا واحدا فقط يلى الفاصلة العشرية مباشرة . وهذا يتفق مع النظرية القائلة إنه إذا حدث أن حصلنا عند إجراء قسمة ما على k صفرا تلى الفاصلة العشرية مباشرة في حاصل القسمة فإنه يمكن إجراء القسمة بحيث نحصل على $2k$ رقما عشريا .

(ج) التقريبان الثالث والرابع هما

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.33 - \frac{(1.33)^3 + 2(1.33) - 5}{3(1.33)^2 + 2} = 1.33 - .0017 = 1.3283$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.3283 - .00003114 = 1.32826886$$

١٢ - أوجد القيم التقريبية لجذور المعادلة $2 \cos x - x^2 = 0$.

(أ) إن المنحنيين $y = 2 \cos x$ و $y = x^2$ يتقاطعان في نقطتين واحداً فيهما السيني هما 1 و -1 تقريبا . لاحظ أنه إذا كان r جذرا فإن $-r$ هو الجذر الآخر .

$$(ب) \text{ بأخذ } x_1 = 1 \text{ نجد } x_1 = 1 - \frac{2 \cos 1 - 1}{-2 \sin 1 - 2} = 1 + \frac{2(.5403) - 1}{2(.8415) + 2} = 1 + .02 = 1.02.$$

$$(ج) x^2 = 1.02 - \frac{2 \cos (1.02) - (1.02)^2}{-2 \sin (1.02) - 2(1.02)} = 1.02 + \frac{.0064}{3.7442} = 1.02 + .0017 = 1.0217.$$

وهكذا فإن الجذرين مقربين لأربعة أرقام عشرية هما 1.0217، -1.0217 .

مسائل اضافية

١٣ - أوجد dy لكل من السوال التالية :

$$(أ) y = (5-x)^2 \quad (ب) y = e^{4x^2} \quad (ج) y = \cos bx^2 \quad (د) -3(5-x)^2 dx$$

$$(هـ) 8xe^{4x^2} dx \quad (و) y = \arccos 2x \quad (ز) y = \ln \tan x \quad (ح) y = (\sin x)/x$$

$$\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} dx \quad (ط) \frac{2 dx}{\sin 2x}$$

١٤ - أوجد dy/dx كافي المسائل ٢ - ٥

$$\begin{aligned} & \frac{2x+y}{x-2y} : \text{ج} \quad \arctan \frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{ج}) \quad - \frac{2y(y^2 + 3x)}{3x(2y^2 + x)} : \text{ج} \quad 2xy^3 + 3x^2y = 1 \quad (\text{ا}) \\ & - \frac{(2x^3 \ln y + y^3)y}{(2y^3 \ln x + x^3)x} : \text{ج} \quad x^3 \ln y + y^3 \ln x = 2 \quad (\text{د}) \quad \frac{\cos(x-y) - y}{\cos(x-y) + x} : \text{ج} \quad xy = \sin(x-y) \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

١٥ - استخدم التفاضلات لحساب القيم التقريبية لـ (ا) $\sqrt[4]{17}$, (ب) $\sqrt[3]{1020}$, (ج) $\cos 59^\circ$, (د) $\tan 44^\circ$.
ج : (ا) 2.03125, (ب) 3.99688, (ج) 0.5151, (د) 0.9651

١٦ - استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية للتغير في (ا) x^3 عندما تتغير x من 5 إلى 5.01 (ب) $1/x$ عندما تتغير x من 1 إلى 0.98 .
ج : (ا) 0.75 (ب) 0.02

١٧ - تتمدد صفيحة دائرية تحت تأثير الحرارة بحيث يزداد نصف القطر من 12.5 cm إلى 12.65 cm . أوجد الزيادة التقريبية في المساحة . ج : $3.75\pi = 11.79 \text{ cm}^2$

١٨ - يتقلص نصف قطر كرة من الثلج من 10 cm إلى 9.8 cm . احسب القيمة التقريبية للتناقص في (ا) الحجم (ب) مساحة السطح . ج : (ا) $80\pi \text{ cm}^3$ (ب) $16\pi \text{ cm}^2$

١٩ - تعطى السرعة $(v \text{ ms}^{-1})$ التي يكتسبها جسم يسقط طليفا مسافة قدرها $h \text{ m}$ بـ $v = \sqrt{19.6h}$. أوجد الخطأ في السرعة نتيجة خطأ في القياس قدره 0.15 m ، عندما كانت قيمة h المقاسة هي 30 m .
ج : 0.061 ms^{-1}

٢٠ - إذا طار طيار دورة كاملة حول الكرة الأرضية على ارتفاع 2 km فوق خط الاستواء . كم تزيد المسافة التي يقطعها عن المسافة التي يقطعها رجل يتحرك على خط الاستواء ؟ ج : 12.6 km .

٢١ - إذا كان المطلوب قياس نصف قطر دائرة وحساب مساحتها . وإذا كان نصف القطر يمكن قياسه إلى 0.001 cm وكان الخطأ المسموح به في حساب المساحة لا يتجاوز 0.1 cm^2 ، فأوجد أقصى نصف قطر يمكن استخدام هذه الطريقة معه .
ج : 16 cm تقريبا .

٢٢ - إذا كانت $pV = 20$ وقيست p فوجدت 5 ± 0.02 فأوجد V . ج : 4 ± 0.016

٢٣ - إذا كانت $F = 1/r^2$ وقيست F فوجدت 4 ± 0.05 فأوجد r . ج : 0.5 ± 0.003

٢٤ - أوجد التغير الذي يطرأ على المساحة الكلية لمخروط دائري قائم عندما (ا) يبقى نصف القطر ثابتا بينما يتغير الارتفاع بمقدار طفيف (ب) يبقى الارتفاع ثابتا بينما يتغير نصف القطر بمقدار طفيف .

$$\text{ج : (ا) } \frac{\pi r h dh}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad (\text{ب}) \quad \pi \left\{ \frac{h^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} + 2r \right\} dr$$

٢٥ - أوجد بالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية (ا) الجذر الحقيقي للمعادلة $x^3 + 3x + 1 = 0$ (ب) أصغر جذر للمعادلة $e^{-x} = \sin x$ (ج) جذر المعادلة $x^2 + \ln x = 2$ (د) جذر المعادلة $x - \cos x = 0$.
ج : (ا) -0.3222 (ب) 0.5885 (ج) 1.3141 (د) 0.7391

الفصل الرابع والعشرون

رسم المنحنيات

المنحنى الجبرى المستوى : هو منحنى يمكن أن تكتب معادلته بالشكل

$$ay^n + (bx + c)y^{n-1} + (dx^2 + ex + f)y^{n-2} + \dots + u_n(x) = 0$$

حيث $u_n(x)$ كثير حدود فى x من الدرجة n . وفيما يلى مناقشة خواص المنحنيات الجبرية .

التمائل : يكون المنحنى متماثلاً بالنسبة لـ :

- (١) محور السينات إذا لم تتغير معادلته عندما نبدل y بـ $-y$.
- (٢) محور الصادات إذا لم تتغير معادلته عندما نبدل x بـ $-x$.
- (٣) نقطة الأصل إذا لم تتغير معادلته عندما نبدل x بـ $-x$ و y بـ $-y$ فى آن واحد .
- (٤) المستقيم $y = x$ إذا لم تتغير معادلته عندما نبادل بين x و y .

التقاطع مع المحاور : نحصل على نقط التقاطع مع المحور x بأن نضع $y = 0$ فى المعادلة ثم نحل المعادلة بالنسبة لـ x . ونحصل على نقط التقاطع مع المحور y بأن نضع $x = 0$ ونحل المعادلة بالنسبة لـ y .

الحيز : يعطى الحيز الأفقى بمدى x أى بفترة x التى يوجد فيها المنحنى . ويعطى الحيز الرأسى للمنحنى بمدى y . ونقول عن نقطة (x_0, y_0) إنها نقطة منزلة بالنسبة للمنحنى إذا حقق احداثياتها معادلة المنحنى فى الوقت الذى لا تتحقق فيه المعادلة باحداثيات النقط المجاورة لها .

نقط النهاية العظمى والصغرى : ونقط الانعطاف وجهة تقعر المنحنى . لقد تم مناقشة هذه النقط فى الفصل الثامن .

المستقيمات المقاربة : المستقيم المقارب لمنحنى لا نهائى فى الامتداد هو مستقيم يقترب وضعه فى النهاية ، من مستقيم قاطع للمنحنى عندما تذهب نقطتين من نقط تقاطعه مع المنحنى إلى اللانهاية .

ويكون للمنحنى ، الذى معادلته على الشكل المذكور أعلاه ، مستقيمات مقاربة رأسية إذا كان معامل أعلى قوة فى y عبارة عن دالة غير ثابتة فى x لها مضروب خطى (حقيقى) واحد أو أكثر . ويوافق كل مضروب منها مستقيم مقارب رأسى .

ويكون للمنحنى ، الذى معادلته على الشكل $ax^n + (by + c)x^{n-1} + (dy^2 + ey + f)x^{n-2} + \dots = 0$ ، مستقيمات مقاربة أفقية إذا كان معامل أعلى قوة فى x عبارة عن دالة غير ثابتة فى y ولها مضروب خطى (حقيقى) واحد أو أكثر . ويوافق كل مضروب منها مستقيم مقارب أفقى .

ولاحصول على معادلات المستقيمات المقاربة المائلة :

(١) نبدل y بـ $mx + b$ في معادلة المنحنى ونرتب النتيجة على الشكل :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

(٢) نحل المعادلتين $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$ آنيا بالنسبة لـ m و b :

(٣) لكل زوج من الحلول m و b نكتب معادلة المستقيم المقارب $y = mx + b$.

إذا صادف أن كانت $a_1 = 0$ مستقلة عن قيمة b فإنه ينبغي استخدام المعادلتين $a_0 = 0$ و $a_2 = 0$ في الخطوة (٣) .

النقط المفردة : النقطة المفردة لمنحنى جبرى هي النقطة التي يكون عندها قيمة dy/dx غير محددة من النمط $0/0$.

ولتعيين مواضع النقط المفردة لمنحنى فإنه يجب الحصول على $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(x)}$ دون إجراء أى اختصار لأى عوامل مشتركة ، ثم نوجد الجذور المشتركة للمعادلتين $g(x) = 0$ و $h(x) = 0$.

وإذا كانت (x_0, y_0) نقطة مفردة لمنحنى ، فإنه يمكن تبسيط أية دراسة إضافية للمنحنى بإجراء التعويض $x = x' + x_0$ ، $y = y' + y_0$ حيث تصبح النقطة المفردة هي النقطة $(0,0)$ في الإحداثيات الجديدة .

النقط المفردة عند نقطة الأصل : عندما تقع نقطة الأصل على منحنى فإنه يمكن وضع معادلة هذا المنحنى بالشكل .

$$(a_1 x + b_1 y) + (a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2) + (a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3) + \dots = 0$$

فإذا كان $a_1 = b_1 = 0$ فإن نقطة الأصل هي نقطة مفردة للمنحنى .

وإذا كان $a_1 = b_1 = 0$ ولكن لم تكن جميع a_2, b_2, c_2 أصفارا فإننا نسمى النقطة المفردة نقطة ثنائية .

أما إذا كان $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$ ولكن لم تكن جميع a_3, b_3, c_3, d_3 أصفارا فإننا نسمى النقطة المفردة نقطة ثلاثية وهكذا .

تصنيف النقطة الثنائية عند نقطة الأصل :

(١) الحالة : $c_2 \neq 0$.

(١) نضع mx بدلا من y في الحدود $a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$ فنحصل على $(c_2 m^2 + b_2 m + a_2)x^2$.

(٢) نحل المعادلة $c_2 m^2 + b_2 m + a_2 = 0$ بالنسبة لـ m .

إذا كان الجذران m_1, m_2 حقيقيين ومختلفين فإن للمنحنى مماسين مختلفين $y = m_1 x$ و $y = m_2 x$ عند نقطة الأصل والنقطة الثنائية في هذه الحالة عقدة .

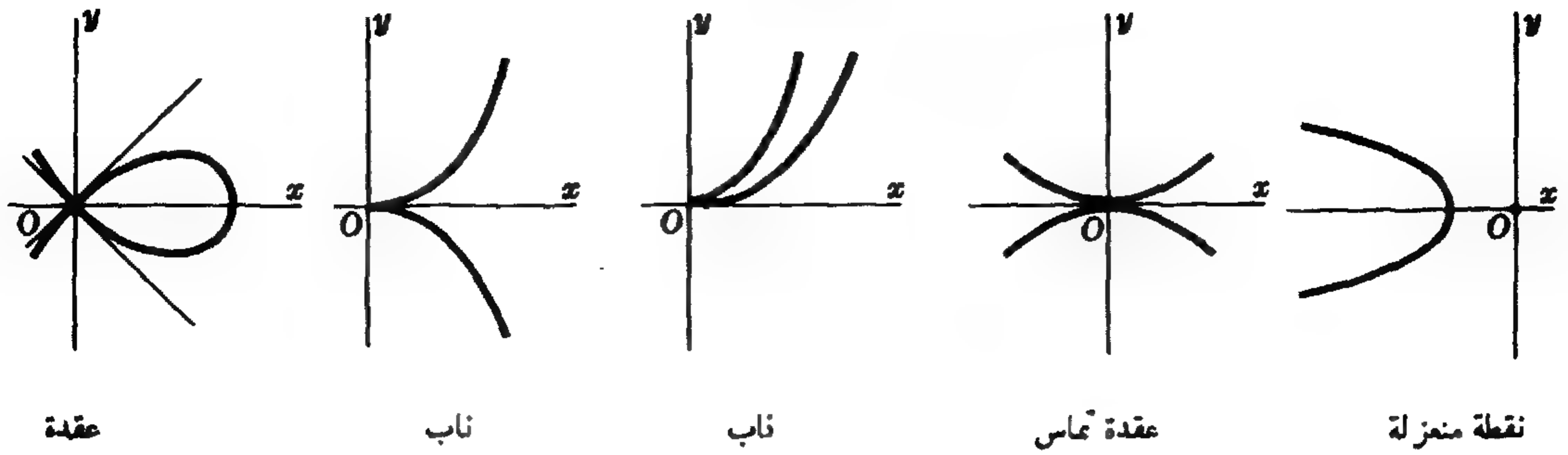
وإذا كان الجذران حقيقيين ومتساويين فمعتدئ يكون للمنحنى « بوجه عام » مماس واحد عند نقطة الأصل وتسمى النقطة الثنائية :

(أ) ناب المنحنى إذا لم يستمر المنحنى مارا بنقطة الأصل .

(ب) عقدة تماس إذا استمر المنحنى مارا بنقطة الأصل .

وقد تكون نقطة الأصل في حالات استثنائية نقطة منعزلة .

وإذا كانت الجذور تخيلية فإن نقطة الأصل نقطة منعزلة ثنائية .



شكل ٢٤ — ١

(ب) الحالة : $c_2 = 0, a_2 \neq 0$.

نضع ny بدلا من x في الحدود $a_2x^2 + b_2xy$ ونجري الخطوات كما في (١).

(ج) الحالة : $a_2 = c_2 = 0, b_2 \neq 0$.

نقطة الأصل عقدة والمماسان هناك هما المحوران الاحداثيان.

مسائل محلولة

المستقيمات المقاربة :

١- أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $y^2(1+x) = x^2(1-x)$.
إن معامل أعلى قوة y هو $(1+x)$ ولذلك فالمستقيم $x+1=0$ خط مقارب رأسي . وحيث أن معامل أعلى قوة x ثابت فإنه لا يوجد خطوط مقاربة أفقية .

وللحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx+b$ بدلا من y فنحصل على
(١) $(m^2+1)x^3 + (m^2+2mb-1)x^2 + b(b+2m)x + b^2 = 0$
وحل المعادلتين الناتجتين عن مساواة كل من معامل أعلى قوتين x بالصفر ، آتيا
 $m^2+1=0$ و $m^2+2mb-1=0$

تخيل وبالتالي ليس هنالك مستقيمات مقاربة مائلة (انظر الشكل ٢٤ - ٢) .

٢- أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$
ليس هنالك خطوط مقاربة رأسية أو أفقية لأن معاملات أعلى قوة لكل من x و y ثابت . وللحصول على المستقيمات المقاربة المائلة فإننا نضع $mx+b$ بدلا من y فنحصل على :

$$(١) \quad (m^3+1)x^3 + 3(m^2b-2)x^2 + 3mb^2x + b^3 = 0$$

وبحل المعادلتين $m^3+1=0$ و $m^2b-2=0$ آتيا فنجد أن $b=2$ ، $m=-1$ إذن معادلة المستقيم المقارب هي $y = -x + 2$.

وإذا عوضنا بالقيم $m=-1$ و $b=2$ في المعادلة (١) فإن المعادلة تأخذ الشكل $-12x + 8 = 0$ فهناك إذن نقطة تقاطع جديدة للمنحنى مع خطه المقارب احداثها السيني $x = 2/3$. (انظر الشكل ٢٤ - ٣)

$$٣ - \text{أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى } y^2(x-1) - x^3 = 0$$

حيث أن معامل أعلى قوة لـ y هو $(x-1)$ إذن فالمستقيم $x-1=0$ مستقيم مقارب رأسي ولا يوجد مستقيمات مقاربة أفقية .

ولاحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx+b$ بدلا من y فنحصل على :

$$(m^2-1)x^3 + m(2b-m)x^2 + b(b-2m)x - b^2 = 0$$

وبحل المعادلتين $m^2-1=0$ و $m(2b-m)=0$ آتيا فإننا نجد $b=-1/2$ و $m=1$ ، $b=1/2$ ، $m=-1$.

إذن معادلتى المستقيمين المقاربين هما $y=x+1/2$ و $y=-x-1/2$.

ويقطع المستقيم المقارب $y=x+1/2$ المنحنى فى نقطة محددة واحداها السينى يعطى بـ $x-1/4=0$ $(1/2-2) \cdot 1/2$ أى أن $x=-1/3$. والاحداثى السينى لنقطة التقاطع المحددة للمنحنى مع المستقيم المقارب $y=-x-1/2$ هو أيضا $-1/3$ (انظر الشكل ٢٤ - ٤)

النقط المفردة :

$$٤ - \text{ابحث فى النقط المفردة للمنحنى } y^2(1+x) = x^2(1-x)$$

إن حدود الدرجة الأدنى هى من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن $c_2 \neq 0$ أى أن حد y^2 موجود وبوضع mx بدلا من y فى الحدين y^2-x^2 ومساواة معامل x^2 بالصفر نحصل على $m^2-1=0$ إذن $m=\pm 1$ والمستقيمان $y=x$ و $y=-x$ مماسان للمنحنى عند نقطة الأصل ، ونقط الأصل هى عقدة . (انظر الشكل ٢٤ - ٢)

$$٥ - \text{ابحث فى النقط الشاذة للمنحنى } x^3 + y^3 - 6x^2 = 0.$$

إن حدود الدرجة الأدنى هى من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن $c_2 = 0$ وبوضع ny بدلا من x فى حدود الدرجة الأدنى ومساواة معامل y^2 بالصفر فنحصل على $n^2 = 0$. لذلك فإنه يوجد مماس وحيد $x=0$ للمنحنى عند نقطة الأصل . ونقطة الأصل هى نقطة ناب للمنحنى لأنه إذا وضعنا $y=-x$ فإن للمعادلة $x^3 - 6x^2 - x^3 = 0$ استنادا إلى قاعدة . ديكارت فى الإشارات ، جذرا موجبا واحدا وجذرين تخيليين وبالتالي فإن المنحنى لا يستمر مارا بنقطة الأصل . (انظر الشكل ٢٤ - ٣)

$$٦ - \text{ابحث فى النقط المفردة للمنحنى } y^2(x-1) - x^3 = 0.$$

إن حدود الدرجة الأدنى هى من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن $c_2 \neq 0$ وبوضع mx بدلا من y فى حدود الدرجة الأدنى ثم مساواة معامل x^2 بالصفر فنحصل على $m^2 = 0$ ونقطة الأصل قرة للمنحنى لأن y معرفة عندما $x < 0$ وتخيلية عندما $0 < x < 1$. (انظر الشكل ٢٤ - ٤)

$$٧ - \text{ابحث (أ) فى النقط الشاذة (ب) فى المستقيمات المقاربة للمنحنى } y^2(x^2-4) = x^4$$

(أ) إن نقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن $a_2 = b_2 = 0$ و $c_2 \neq 0$ فإن النتيجة التى نحصل عليها من وضع $mx = y$ والمساواة بالصفر هى $m^2 = 0$. ونقطة الأصل التى نحصل عليها نقطة ثنائية منزلة لأن y تخيلية عندما يكون x قريبة من 0 .

(ب) المستقيمان $x=2$ و $x=-2$ خطان مقاربان رأسيان .

ولاحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx+b$ بدلا من y فنحصل على :

$$(m^2-1)x^4 + 2mbx^3 + (b^2-4m^2)x^2 - 8mbx - 4b^2 = 0$$

وبحل المعادلتين $m^2 - 1 = 0$ و $mb = 0$ آتينا نجد $m = 1$: $b = 0$ و $m = -1$: $b = 0$ ومعادلتى المنحنيين المقاربين هما $y = x$ و $y = -x$.
والمنحنيين المقاربين يقطعان المنحنى عند نقطة الأصل . (انظر الشكل ٢٥ - ٥) .

رسم المنحنيات :

٨- ادرس المنحنى $y^2(1+x) = x^2(1-x)$ وارسمه .

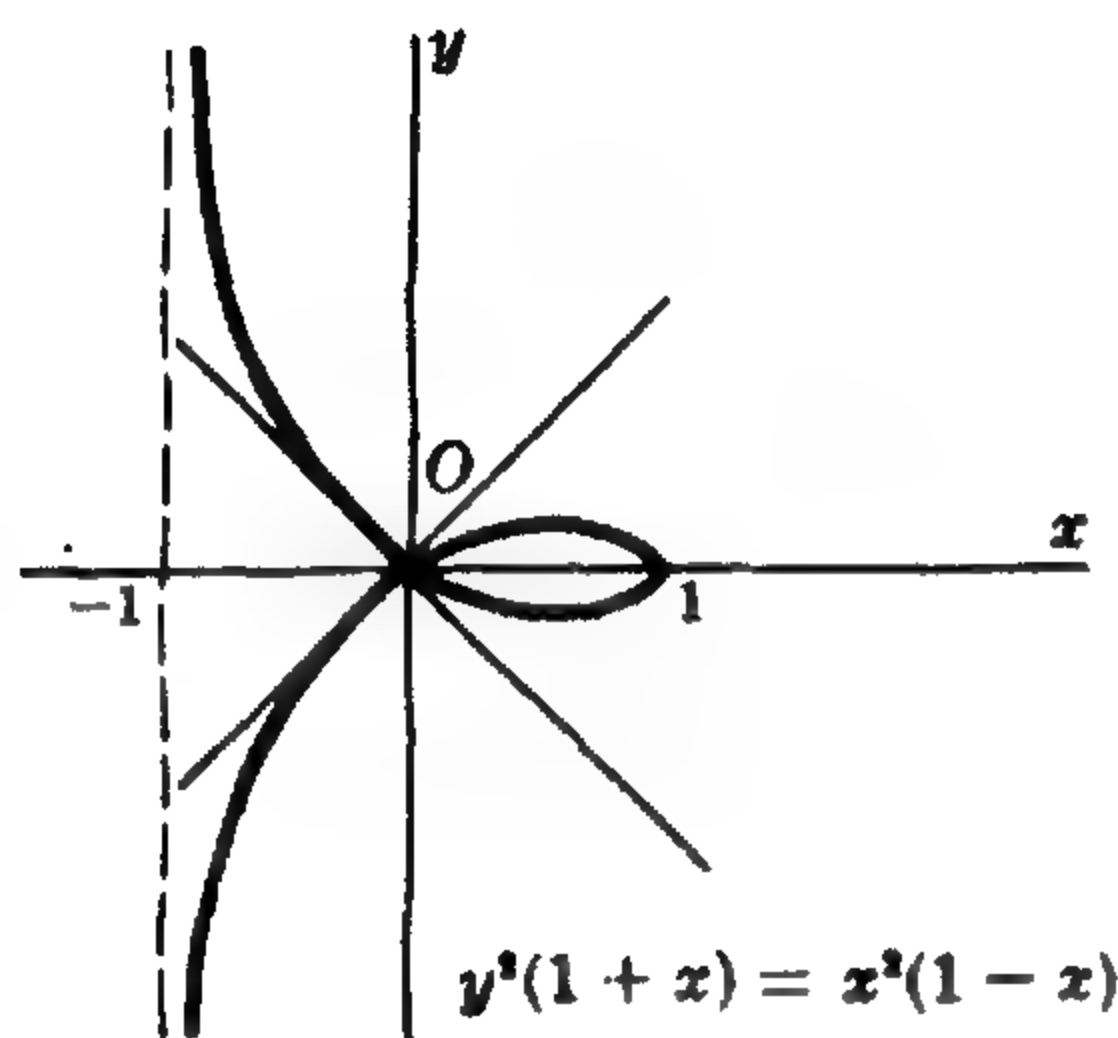
التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحور السينات .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحور السينى x فى $x = 0$ و $x = 1$ ويقطع المحور الصادى فى $y = 0$.

الحيز : إن المنحنى موجود فى الفترة $-1 < x \leq 1$ ولجميع قيم y .

القيم العظمى والصغرى الخ : يتكون المنحنى من فرعين هما

$$y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad \text{و} \quad y = -\frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad \text{وللفرع الأول يكون}$$



شكل ٢٤ - ٢

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x-2}{(1+x)^{5/2}(1-x)^{3/2}} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}$$

والقيم الحرجة هي $x = 1$ و $x = (-1 + \sqrt{5})/2$ والنقطة $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ نقطة نهاية عظمى . ولا يوجد نقطة انعطاف والفرع مقعر لأسفل .

ويوجد ، بالتماثل ، نقطة نهاية صغرى عند $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ والفرع الثانى مقعر لأعلى .

الخطوط المقاربة : من المسألة (١) نجد أن المستقيم $x = -1$ هو مستقيم مقارب .

النقط المفردة : من المسألة ٤ نجد أن نقطة الأصل هي عقدة وأنه يوجد مماسان (النقطة الثنائية أو نقطة العقدة) هما $y = x$ و $y = -x$.

(انظر الشكل ٢٤ - ٣) .

٩- ادرس المنحنى $y^3 - x^2(6-x) = 0$ وارسمه .

التماثل : لا يوجد تماثل .

التقاطع مع المحاور : نقطة التقاطع هي $y = 0$ و $x = 6$ و $x = 0$.

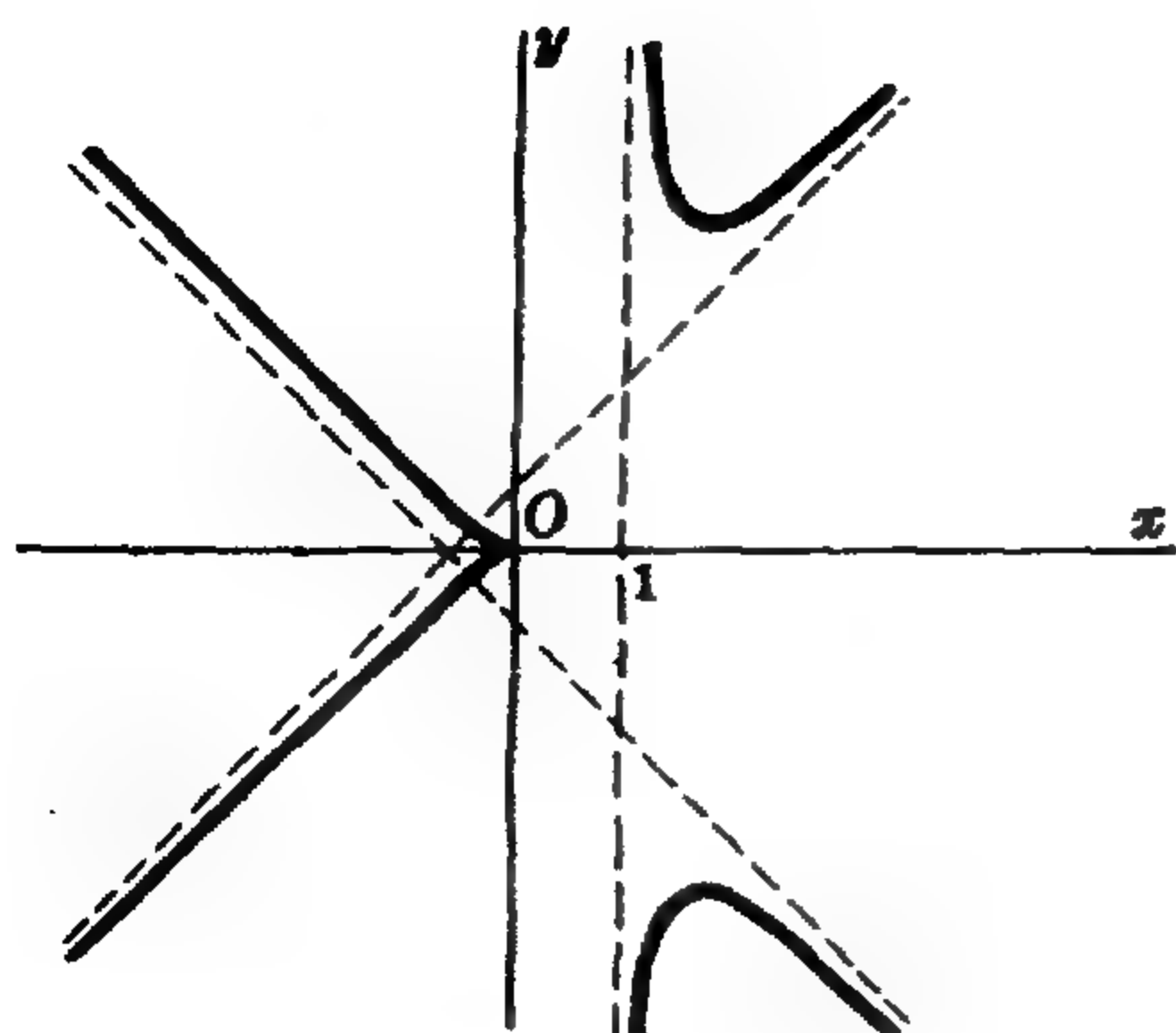
الحيز : المنحنى معرف وموجود لجميع قيم x و y .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \quad \text{إن}$$

والقيم الحرجة هي $x = 0, 4, 6$ والنقطة $(0,0)$ نقطة نهاية صغرى والنقطة $(4, 2\sqrt[3]{4})$ نقطة نهاية عظمى ، والنقطة $(6,0)$ نقطة انعطاف والمنحنى مقعر لأسفل إلى اليسار ومقعر لأعلى إلى اليمين .

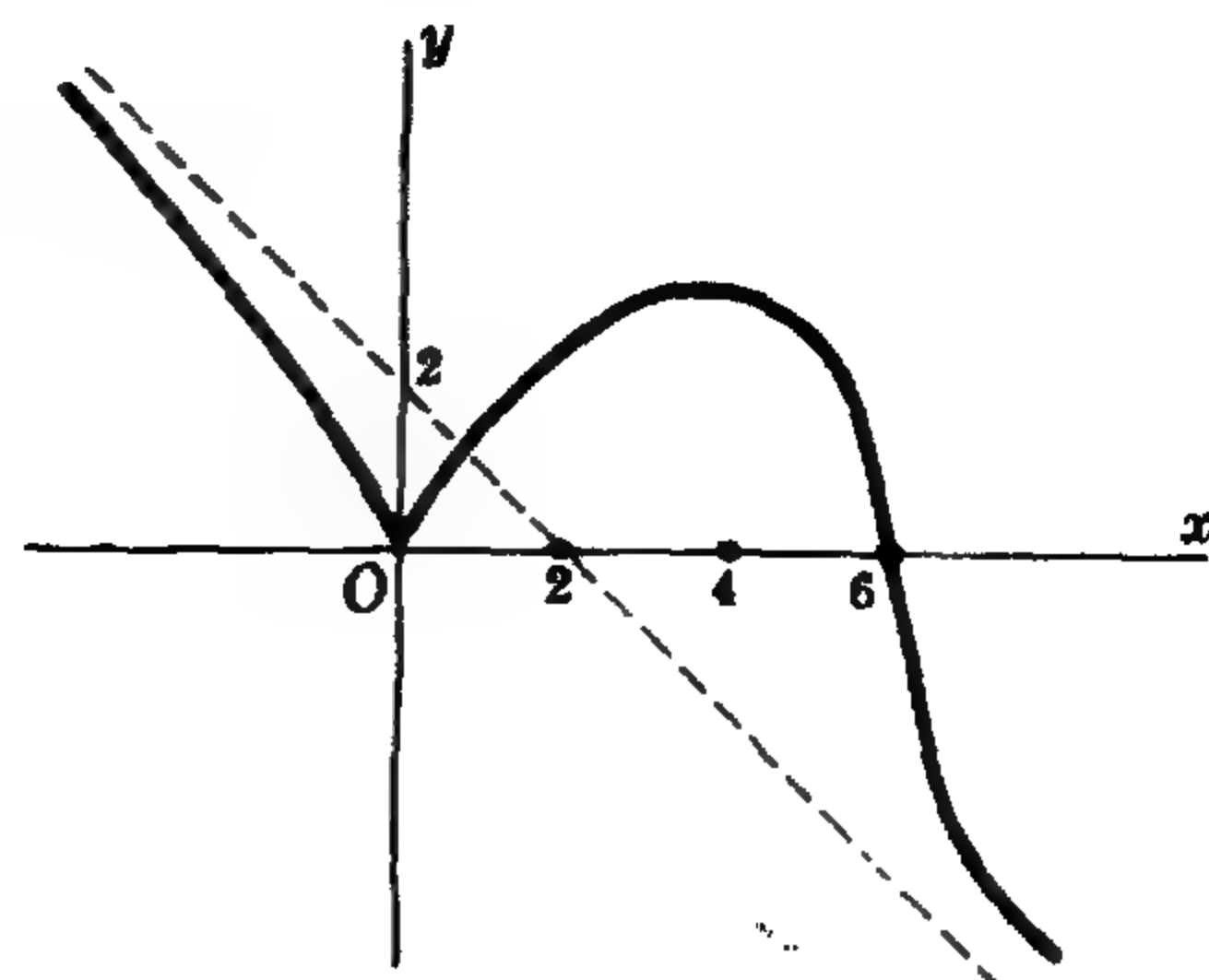
المستقيمت المقاربة : من المسألة (٢) نجد أن $y = -x + 2$ هو خط مقارب .

النقطة المفردة : من المسألة (٥) نجد أن نقطة الأصل نقطة قمة للمنحنى والمماس عندها هو المحور الصادى .



$$y^3(x-1) - x^3 = 0$$

شكل ٢٤ - ٤



$$x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$$

شكل ٢٤ - ٣

١٠ - ادرس المنحنى $y^3(x-1) - x^3 = 0$ وارسمه . (انظر الشكل ٢٤ - ٤) .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة للمحور السيني .

التقاطع مع المحاور : نقطة التقاطع مع المحاور هي $x=0$ و $y=0$.

الحيز : المنحنى موجود في الفترتين $-\infty < x \leq 0$ و $x > 1$ ولجميع قيم y .

القيم العظمى والصغرى : الخ : إذا أخذنا الفرع $y = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ ،

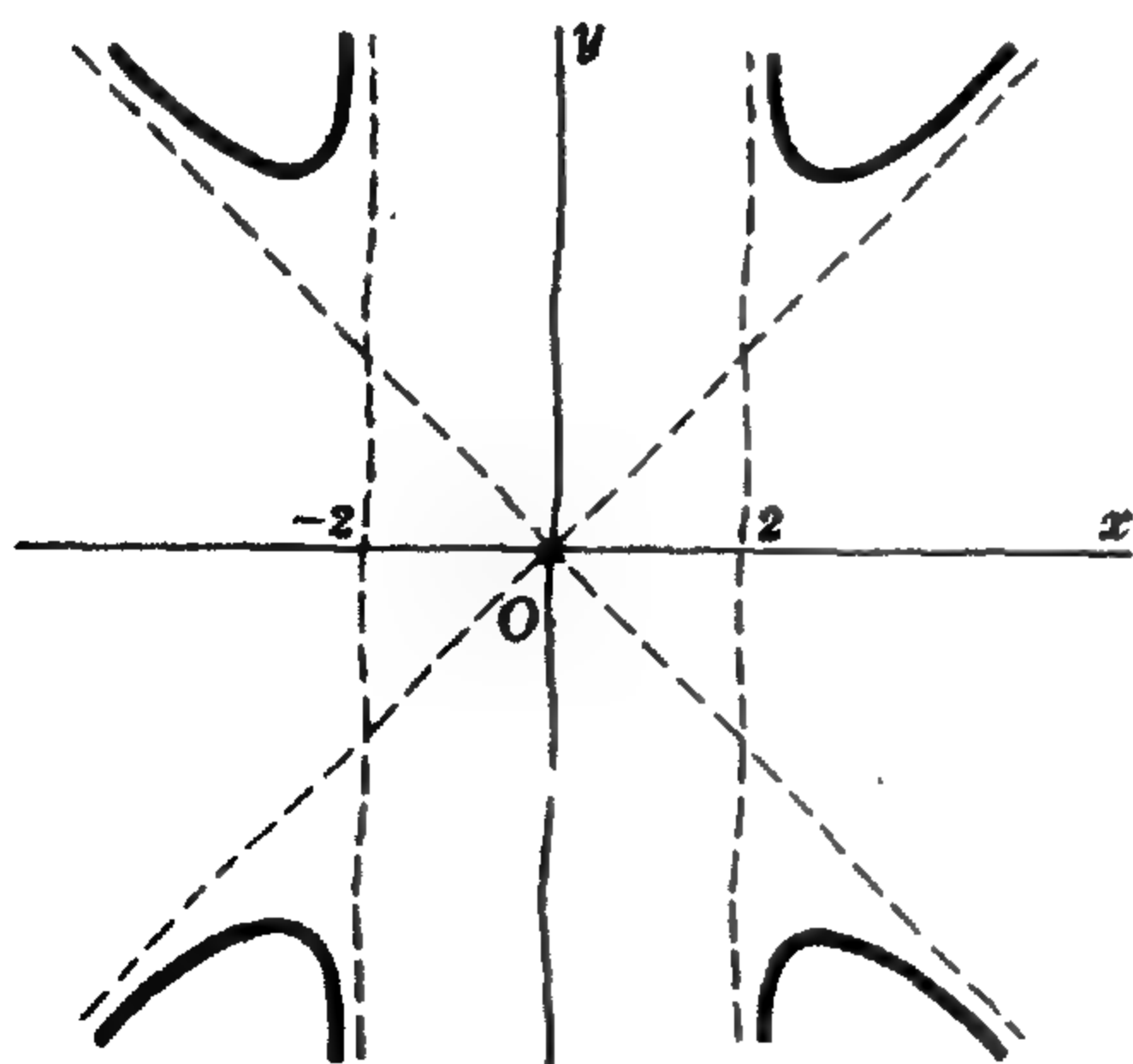
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3)x^{1/2}}{2(x-1)^{3/2}} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4x^{1/2}(x-1)^{5/2}}$$

والقيم الحرجة هي $x=0, 3/2$ والنقطة $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$ نقطة نهاية صغرى . ولا يوجد نقطة انعطاف والفرع

مقعر لأعلى . ومن التماثل يكون للفرع $y = -x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ نقطة نهاية عظمى هي $3\sqrt{3}/2$ و $3/2$ والمنحنى مقعر لأسفل .

الخطوط المقاربة : من المسألة (٣) نجد أن المستقيمتان $y = x + 1/2$ و $y = -x - 1/2$ هي مستقيمتان مقاربتان .

النقطة المفردة : من المسألة (٦) نجد أن نقطة الأصل هي نقطة ناب للمنحنى والمستقيم $y=0$ هو المماس للمنحنى عندها .



$$y^3(x^2-4) = x^4$$

شكل ٢٤ - ٥

١١ - ادرس المنحنى $y^3(x^2-4) = x^4$ وارسمه .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحوري الاحداثيات وبالنسبة

لنقطة الأصل .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحورين في :

$$x=0 \text{ و } y=0$$

الحيز : المنحنى موجود في الفترة $-\infty < x < -2$ و

$$2 < x < +\infty \text{ وفي الفترتين } -\infty < y \leq -4 \text{ و } 4 \leq y < +\infty$$

والنقطة $(0,0)$ نقطة منزلة .

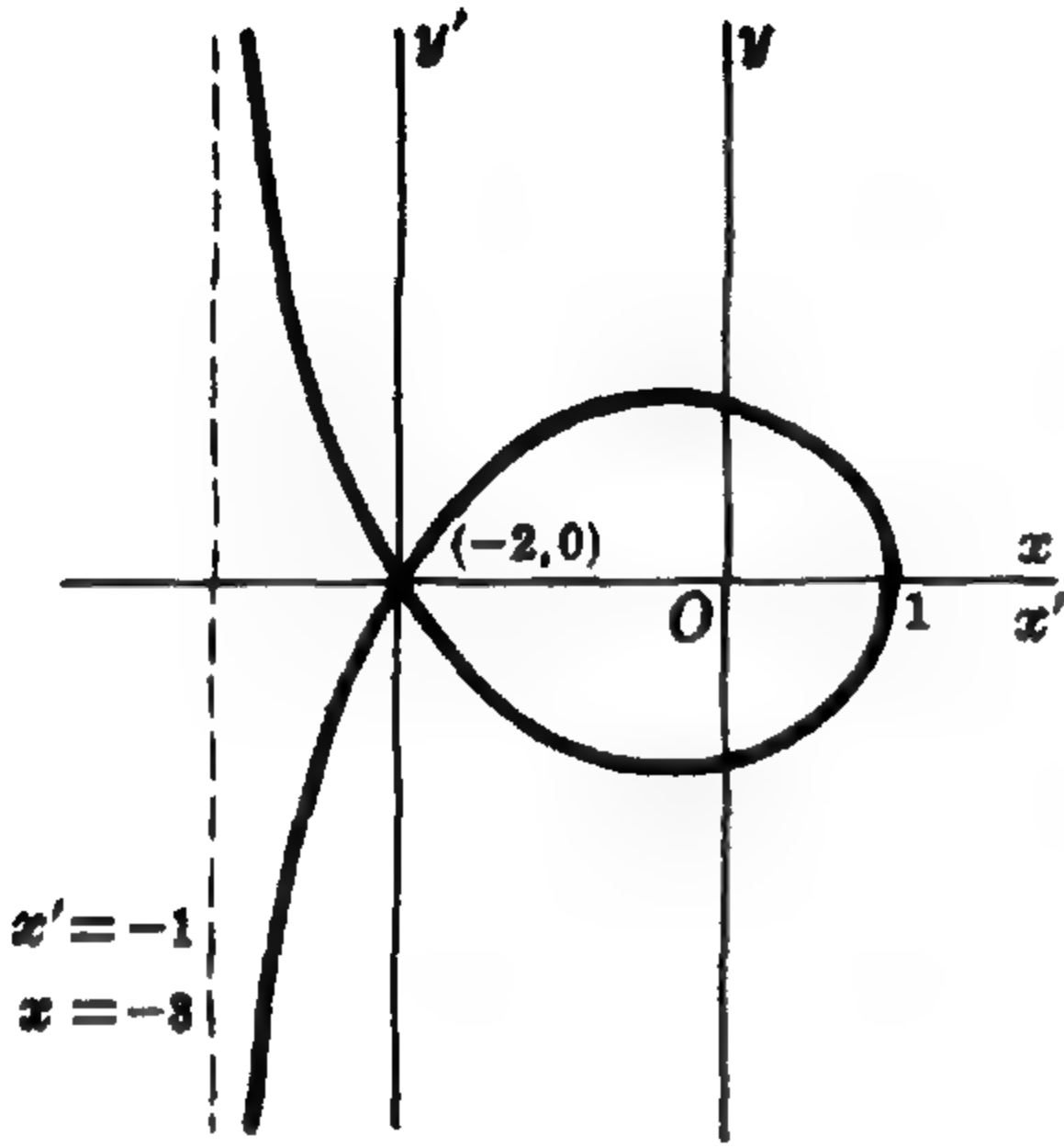
القيم العظمى والصغرى الخ : بالنسبة للجزء

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, \quad x > 2,$$

$$\text{نجد أن : } \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2 - 4)^{3/2}} \text{ و } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x^2 + 32}{(x^2 - 4)^{5/2}}$$

والقيمة الحرجة هي $x = 2\sqrt{2}$ والمنحنى مقعر لأعلى في هذا الجزء والنقطة $(2\sqrt{2}, 4)$ نقطة نهاية صفري ، ومن التماثل نجد أن النقطة $(-2\sqrt{2}, 4)$ هي نقطة نهاية صفري وأن $(2\sqrt{2}, -4)$ و $(-2\sqrt{2}, -4)$ نقطتا نهاية عظمى .

المستقيمتان المقاربة : النقط المفردة . (انظر المسألة ٧)



$$(x+3)(x^3+y^3)=4$$

شكل ٢٤ - ٦

١٢ - ادرس المنحنى $(x+3)(x^3+y^3)=4$ وارسمه .

قبل دراسة هذا المنحنى سنمين أولاً موضع النقطة المفردة إن وجدت ثم نقل المحاور إلى هذه النقطة باعتبارها نقطة أصل جديدة .

$$\text{إن } \frac{dy}{dx} = -\frac{(x+2)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+3)^2y} \text{ ومنه نرى أن}$$

عندما $y=0$ و $x=-2$ يكون dy/dx صيغة غير محددة من النمط $0/0$ والنقطة $(-2, 0)$ نقطة مفردة .

وإذا أجرينا التحويل $y=y'$ و $x=x'-2$.

$$\text{فإن معادلة المنحنى تأخذ الشكل } y'^2(x'+1)+x'^3-3x'^2=0.$$

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة للمحور x' .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحاور الاحداثية في :

$$y'=0 \text{ و } x'=3 \text{ و } x'=0.$$

الحيز : إن المنحنى معرف في الفترة $-1 < x' \leq 3$ ولجميع قيم y' .

$$\text{القيم العظمى والصغرى : الخ : بالنسبة للفرع } y' = \frac{x'\sqrt{3-x'}}{\sqrt{x'+1}}$$

$$\text{نجد أن : } \frac{dy'}{dx'} = \frac{3-x'^2}{(3-x')^{1/2}(x'+1)^{3/2}} \text{ و } \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{-12}{(3-x')^{3/2}(x'+1)^{5/2}}$$

والقيم الحرجة هي $x' = \sqrt{3}$ والنقطة $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$ نقطة نهاية عظمى والفرع مقعر لأسفل .

ومن التماثل نجد أن النقطة $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$ هي نقطة نهاية صفري وأن الفرع الآخر مقعر لأعلى .

المستقيمتان المقاربة : إن المستقيم $x' = -1$ مستقيم مقارب رأسى . وللبحث عن المستقيمتان المقاربة المائلة نضع

$$mx' + b \text{ بدلا من } y' \text{ فنحصل على المعادلة } (m^2+1)x'^3 + \dots = 0. \text{ ولا يوجد خطوط مقاربة مائلة . لماذا ؟}$$

النقط المفردة : إن نقطة الأصل نقطة ثنائية . وإذا عوضنا بـ mx' بدلا من y' في حدود الدرجة الأدنى

$$3x'^2 - y'^2 \text{ نجد أن } (m^2-2)x'^2 \text{ ومن المعادلة } m^2-3=0 \text{ نجد } m = \pm\sqrt{3} \text{ والمماسان (عند العقدة)}$$

هما $y' = \pm\sqrt{3}x'$ وبالعودة إلى الاحداثيات الأصلية نجد أن $(\sqrt{3}-2, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$ نقطة نهاية عظمى وأن

$(\sqrt{3}-2, -\sqrt{6\sqrt{3}-9})$ نقطة نهاية صفري . وأن المستقيم $x = -3$ مستقيم مقارب رأسى والنقطة $(-2, 0)$

عقدة وإن معادلتى المماسين (عند العقدة) هما $y = \pm\sqrt{3}(x+2)$.

مسائل اضافية

ادرس كلا من المنحنيات التالية وارسمه :

$(x^2 + y^2)^2 = 8xy - ٢٢$	$x(x-1)y = x^2 - 4 - ٢٢$	$(x-2)(x-6)y = 2x^2 - ١٢$
$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y^2 - ٢٤$	$(x+1)(x+4)^2y^2 = x(x^2-4) - ٢٤$	$x(3-x^2)y = 1 - ١٤$
$y^4 - 4xy^2 = x^4 - ٢٥$	$y^2 = 4x^2(4-x^2) - ٢٥$	$(1-x^2)y = x^4 - ١٥$
$(x^2 + y^2)^2 = 4xy(x^2 - y^2) - ٢٦$	$y^2 = 5x^4 + 4x^2 - ٢٦$	$xy = (x^2 - 9)^2 - ١٦$
$y^2 = x(x-3)^2 - ٢٧$	$y^2 = x^2(8-x^2) - ٢٧$	$2xy = (x^2 - 1)^2 - ١٧$
$y^2 = x(x-2)^2 - ٢٨$	$y^2 = x^2(3-x) - ٢٨$	$x(x^2-4)y = x^2 - 6 - ١٨$
$3y^4 = x(x^2-9)^2 - ٢٩$	$(x^2-1)y^2 = x^2 - ٢٩$	$y^2 = x(x^2-4) - ١٩$
$x^2y^2 = (x-3)^2 - ٣٠$	$(x-3)y^2 = x^4 - ٣٠$	$y^2 = (x^2-1)(x^2-4) - ٢٠$
	$(x-6)y^2 = x^2(x-4) - ٣١$	$xy^2 = x^2 + 3x + 2 - ٢١$
	$(x^2-16)y^2 = x^2(x-2) - ٣٢$	$(x^2-2x-3)y^2 = 2x+3 - ٢٢$

الفصل الخامس والعشرون

الصيغ الأساسية للتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالة مشتقتها في فترة معينة من المحور السيني هي $f(x)$ ، فإننا ندعو $F(x)$ مضاد المشتقة أو التكامل غير المحدود لـ $f(x)$. والتكامل غير المحدود لدالة مفروضة ليس وحيداً. فعلى سبيل المثال: الدوال $x^2 - 4$ ، $x^2 + 5$ ، x^2 هي تكاملات غير محددة لـ $f(x) = 2x$ لأن $\frac{d}{dx}(x^2 - 4) = 2x$ ، $\frac{d}{dx}(x^2 + 5) = 2x$ ، $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. على ذلك فإن جميع التكاملات غير المحددة لـ $f(x) = 2x$ متضمنة في $x^2 + C$ حيث C الذي نسميه ثابت التكامل. هو أي ثابت اختياري.

ويستعمل الرمز $\int f(x) dx$ للإشارة إلى أن المطلوب هو التكامل غير المحدود لـ $f(x)$ وهكذا نكتب

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

الصيغ الأساسية للتكامل: إن عدداً من الصيغ الواردة أدناه تنتج مباشرة من صيغ الاشتقاق القياسية الواردة في الفصول السابقة. ويمكننا، على سبيل المثال، أن نتحقق من الصيغة ٢٥ على النحو التالي:

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C \right\} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

وقد تظهر إشارة القيمة المطلقة في بعض الصيغ، فعلى سبيل المثال نكتب:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

بدلاً من

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u > 0 \quad (١) \quad \bullet \quad \int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C, \quad u < 0 \quad (ب) \quad \bullet$$

ونكتب

$$\int \tan u du = \ln \sec u + C, \quad -١٠$$

بدلاً من

$$\int \tan u du = \ln |\sec u| + C \quad (١) \quad ١٠ \quad \text{جميع قيم } u \text{ التي تحقق العلاقة } u \geq 1.$$

$$\int \tan u du = \ln(-\sec u) + C, \quad (ب) \quad ١٠ \quad \text{جميع قيم } u \text{ التي تحقق العلاقة } u \leq -1.$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C \quad - ١٥$$

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)] \, dx = f(x) + C \quad - ١$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad - ١٦$$

$$\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx \quad - ٢$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C \quad - ١٧$$

$$\int au \, dx = a \int u \, dx, \quad \text{حيث } a \text{ ثابت} \quad - ٣$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad - ١٨$$

$$\int u^m \, du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1 \quad - ٤$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \quad - ١٩$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad - ٥$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C \quad - ٢٠$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1 \quad - ٦$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad - ٢١$$

$$\int e^u \, du = e^u + C \quad - ٧$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C \quad - ٢٢$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C \quad - ٨$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad - ٢٣$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + C \quad - ٩$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \quad - ٢٤$$

$$\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C \quad - ١٠$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C \quad - ٢٥$$

$$\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C \quad - ١١$$

$$\int \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad - ٢٦$$

$$\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C \quad - ١٢$$

$$\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C \quad - ١٣$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \quad - ٢٧$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C \quad - ١٤$$

مسائل محلولة

$$\int \sqrt[3]{z} \, dz = \int z^{1/3} \, dz = \frac{z^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} z^{4/3} + C \quad - ٢$$

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C \quad - ١$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} \, dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} x^{2/3} + C \quad - ٤, \quad \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \quad - ٧$$

$$\int (2x^2 - 5x + 3) \, dx = 2 \int x^2 \, dx - 5 \int x \, dx + 3 \int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C \quad - ٥$$

$$\int (1-x) \sqrt{x} \, dx = \int (x^{1/2} - x^{3/2}) \, dx = \int x^{1/2} \, dx - \int x^{3/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + C \quad - ٦$$

$$\int (3s+4)^2 \, ds = \int (9s^2 + 24s + 16) \, ds = 9(\frac{1}{3}s^3) + 24(\frac{1}{2}s^2) + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C \quad - ٧$$

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^3} \, dx = \int (1 + 5x^{-1} - 4x^{-3}) \, dx = \frac{1}{2} x^2 + 5x - \frac{4x^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2} x^2 + 5x + \frac{2}{x^2} + C \quad - ٨$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt[4]{(x^3+2)}} \quad (١) \quad \int \frac{8x^3 \, dx}{(x^3+2)^3}, \quad (٢) \quad \int (x^3+2)^{1/2} x^3 \, dx, \quad (٣) \quad \int (x^3+2)^3 \cdot 3x^2 \, dx, \quad (٤) \quad \text{احسب} \quad - ٩$$

ضع $u = x^3 + 2$ فيكون $du = 3x^2 \, dx$

$$\int (x^3 + 2)^2 \cdot 3x^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^3 + 2)^3 + C \quad (١)$$

$$\int (x^3 + 2)^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{1/2} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3 + 2)^{3/2} + C \quad (ب)$$

$$\int \frac{8x^2 dx}{(x^3 + 2)^3} = 8 \cdot \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{-3} 3x^2 dx = \frac{8}{3} \int u^{-3} du = -\frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} u^{-2} \right) + C = -\frac{4}{3(x^3 + 2)^2} + C \quad (ج)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{-1/4} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int u^{-1/4} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} u^{3/4} + C = \frac{4}{9}(x^3 + 2)^{3/4} + C \quad (د)$$

١٠ - احسب $\int 3x\sqrt{1-2x^2} dx$. ضع $u = 1 - 2x^2$ فيكون $du = -4x dx$

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx &= 3 \left(-\frac{1}{4} \right) \int (1-2x^2)^{1/2} (-4x dx) = -\frac{3}{4} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = -\frac{1}{2} (1-2x^2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

١١ - احسب $\int \frac{(x+3) dx}{(x^3+6x)^{1/3}}$. ضع $u = x^3 + 6x$ فيكون $du = (2x+6) dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+3) dx}{(x^3+6x)^{1/3}} &= \frac{1}{2} \int (x^3+6x)^{-1/3} (2x+6) dx = \frac{1}{2} \int u^{-1/3} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} u^{2/3} + C = \frac{3}{4} (x^3+6x)^{2/3} + C \end{aligned}$$

$$\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{1/3} (-2x dx) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (1-x^2)^{4/3} + C = -\frac{3}{8} (1-x^2)^{4/3} + C \quad ١٢$$

$$\int \sqrt{x^2-2x^4} dx = \int (1-2x^2)^{1/2} x dx = -\frac{1}{4} \int (1-2x^2)^{1/2} (-4x dx) \quad ١٣$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1-2x^2)^{3/2} + C = -\frac{1}{6} (1-2x^2)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}} dx = \int (x^{-1/2} + 2x^{1/2} + x^{3/2}) dx = 2x^{1/2} + \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} x^{5/2} + C \quad ١٤$$

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx = \int \left\{ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx = x + \frac{1}{x+1} + C' = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C' = \frac{x^2}{x+1} + C \quad ١٥$$

٧ - الصيغ ٥

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C \quad ١٧ \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad ١٦$$

$$\int \frac{du}{2x-3} = 2dx, u=2x-3 \text{ حيث } \int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C, \quad ١٨$$

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$\int \frac{x dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \ln c = \ln c \sqrt{|x^2-1|} \quad ١٩$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1-2x^3} = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x^2 dx}{1-2x^3} = -\frac{1}{6} \ln|1-2x^3| + C = \ln \frac{c}{\sqrt[6]{|1-2x^3|}} \quad ٢٠$$

$$\int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = x + \ln|x+1| + C \quad ٢١$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} (3 dx) = \frac{e^{3x}}{3} + C \quad ٢٢ \quad \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} (-dx) = -e^{-x} + C \quad ٢٣$$

$$\int \frac{e^{1/x} dx}{x^2} = -\int e^{1/x} \left(-\frac{dx}{x^2} \right) = -e^{1/x} + C \quad ٢٤ \quad \int a^{2x} dx = \frac{1}{2} \int a^{2x} (2 dx) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^{2x}}{\ln a} \right) + C \quad ٢٥$$

$$\text{أو } du = e^x dx \text{ و } u = e^x + 1 \text{ حيث } \int (e^x + 1)^3 e^x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + C \quad ٢٦$$

$$\int (e^x + 1)^3 e^x dx = \int (e^x + 1)^3 d(e^x + 1) = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + C$$

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = - \int \frac{-e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = -\ln(1 + e^{-x}) + C = \ln \frac{e^x}{1 + e^x} + C \quad ٢٧$$

$$= x - \ln(1 + e^x) + C$$

ولمنا في حاجة إلى تحديد إشارة القيمة المطلقة لأن $1 + e^{-x} > 0$ مهما كانت قيمة x .

الصيغ ٨ - ١٧

$$\int \sin \frac{1}{2}x dx = 2 \int \sin \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2} dx = -2 \cos \frac{1}{2}x + C - ٢٨$$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \cdot 3 dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C - ٢٩$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\cos x dx) = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C - ٣٠$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C - ٣١$$

$$\int \tan 2x dx = \frac{1}{2} \int \tan 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \ln |\sec 2x| + C - ٣٢$$

$$\int x \cot x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cot x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \ln |\sin x^2| + C - ٣٣$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + C - ٣٤$$

$$\int \sec \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int \sec x^{1/2} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = 2 \ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + C - ٣٥$$

$$\int \sec^2 2ax dx = \frac{1}{2a} \int \sec^2 2ax \cdot 2a dx = \frac{\tan 2ax}{2a} + C - ٣٦$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} dx = \int (\tan x + 1) dx = \ln |\sec x| + x + C - ٣٧$$

$$\int \frac{\sin y dy}{\cos^3 y} = \int \tan y \sec y dy = \sec y + C - ٣٨$$

$$\int (1 + \tan x)^2 dx = \int (1 + 2 \tan x + \tan^2 x) dx = \int (\sec^2 x + 2 \tan x) dx - ٣٩$$

$$= \tan x + 2 \ln |\sec x| + C$$

$$\int e^x \cos e^x dx = \int \cos e^x \cdot e^x dx = \sin e^x + C - ٤٠$$

$$\int e^{3 \cos 2x} \sin 2x dx = -\frac{1}{6} \int e^{3 \cos 2x} (-6 \sin 2x dx) = -\frac{e^{3 \cos 2x}}{6} + C - ٤١$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) dx - ٤٢$$

$$= -\cot x + \csc x + C$$

$$\int (\tan 2x + \sec 2x)^2 dx = \int (\tan^2 2x + 2 \tan 2x \sec 2x + \sec^2 2x) dx - ٤٣$$

$$= \int (2 \sec^2 2x + 2 \tan 2x \sec 2x - 1) dx = \tan 2x + \sec 2x - x + C$$

$$\int \csc u du = \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2 \sin \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}u} = \int \frac{\sec^2 \frac{1}{2}u \cdot \frac{1}{2} du}{\tan \frac{1}{2}u} = \ln |\tan \frac{1}{2}u| + C - ٤٤$$

$$\int (\sec 4x - 1)^2 dx = \int (\sec^2 4x - 2 \sec 4x + 1) dx = \frac{1}{4} \tan 4x - \frac{1}{2} \ln |\sec 4x + \tan 4x| + x + C - ٤٥$$

$$\int \frac{\sec x \tan x dx}{a + b \sec x} = \frac{1}{b} \int \frac{\sec x \tan x \cdot b dx}{a + b \sec x} = \frac{1}{b} \ln |a + b \sec x| + C - ٤٦$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\csc 2x - \cot 2x} &= \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x \cdot 2 dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2} \ln (1 - \cos 2x) + C' - ٤٧ \\ &= \frac{1}{2} \ln (2 \sin^2 x) + C' = \frac{1}{2} (\ln 2 + 2 \ln |\sin x|) + C' = \ln |\sin x| + C \end{aligned}$$

الصيغ ١٨ - ٢٠

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C - ٥١ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C - ٤٨$$

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C - ٥٢ \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C - ٤٩$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{4 dx}{\sqrt{5^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{4x}{5} + C - ٥٣ \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C - ٥٠$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C - ٥٤$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2 dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} \frac{2x}{3} + C - ٥٥$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin x^4 + C - ٥٦$$

$$\int \frac{x dx}{x^4+3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2)^2+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \frac{x^2\sqrt{3}}{3} + C - ٥٧$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} x^2 + C = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{x^2} + C - ٥٨$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \arctan e^x + C - ٦٠ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{2} + C - ٥٩$$

$$\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx = \int \left(3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \arctan x + C - ٦١$$

$$\int \frac{\sec x \tan x dx}{9 + 4 \sec^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \sec x \tan x dx}{3^2 + (2 \sec x)^2} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2 \sec x}{3} + C - ٦٢$$

$$\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3 \arcsin x + C - ٦٣$$

$$\int \frac{(2x-7) dx}{x^2+9} = \int \frac{2x dx}{x^2+9} - 7 \int \frac{dx}{x^2+9} = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3} \arctan \frac{x}{3} + C - ٦٤$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 10y + 30} = \int \frac{dy}{(y^2 + 10y + 25) + 5} = \int \frac{dy}{(y+5)^2 + 5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{(y+5)\sqrt{5}}{5} + C - ٦٥$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x^2-8x+16)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \arcsin \frac{x-4}{6} + C - ٦٦$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \int \frac{2 dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{2 dx}{(2x+1)^2+9} = \frac{1}{3} \arctan \frac{2x+1}{3} + C - ٦٧$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3-4x+8} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^3-4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4)+6}{x^3-4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4) dx}{x^3-4x+8} + 3 \int \frac{dx}{x^3-4x+8} - ٦٨ \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4) dx}{x^3-4x+8} + 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+8) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x-2}{2} + C \end{aligned}$$

ولسنا في حاجة إلى تحديد إشارة القيمة المطلقة لأن $x^2 - 4x + 8 > 0$ مهما كانت قيمة x .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x^2+12x+36)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}} = \arcsin \frac{x+6}{8} + C - \text{٧٩}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx - \text{٧٠} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} \\ &= -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{18x+27}{9x^2-12x+8} dx = \frac{1}{9} \int \frac{(18x-12)+39}{9x^2-12x+8} dx - \text{٧١} \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{18x-12}{9x^2-12x+8} dx + \frac{13}{3} \int \frac{dx}{(3x-2)^2+4} \\ &= \frac{1}{9} \ln(9x^2-12x+8) + \frac{13}{18} \arctan \frac{3x-2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}} dx - \text{٧٢} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x-2}{2} + C \end{aligned}$$

الصيغ ٢١ - ٢٤

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9-x^2} &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C - \text{٧٦} & \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C - \text{٧٣} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C - \text{٧٧} & \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C - \text{٧٤} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C - \text{٧٨} & \int \frac{dx}{x^2-4} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C - \text{٧٥} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C - \text{٧٩}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3} \int \frac{3dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3} \ln|3z + \sqrt{9z^2-25}| + C - \text{٨٠}$$

$$\int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{(3x)^2-16} = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+4} \right| + C - \text{٨١}$$

$$\int \frac{dy}{25-16y^2} = \frac{1}{4} \int \frac{4dy}{25-(4y)^2} = \frac{1}{40} \ln \left| \frac{5+4y}{5-4y} \right| + C - \text{٨٢}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+3)-1}{(x+3)+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + C - \text{٨٣}$$

$$\int \frac{dx}{4x-x^2} = \int \frac{dx}{4-(x-2)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+(x-2)}{2-(x-2)} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{4-x} \right| + C - \text{٨٤}$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4s+s^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s+2)^2-4}} = \ln|s+2 + \sqrt{4s+s^2}| + C - \text{٨٥}$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+9}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} \quad - ٨٦$$

$$= \sqrt{x^2+9} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+9}) + C$$

$$\int \frac{2x-3}{4x^2-11} dx = \frac{1}{4} \int \frac{8x-12}{4x^2-11} dx = \frac{1}{4} \int \frac{8x dx}{4x^2-11} - \frac{3}{2} \int \frac{2 dx}{4x^2-11} \quad - ٨٧$$

$$= \frac{1}{4} \ln |4x^2-11| - \frac{3\sqrt{11}}{44} \ln \left| \frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}} \right| + C$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} \quad - ٨٨$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x-3}| + C$$

$$\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{8x-16}{4x^2+4x-3} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3} dx + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(2x+1)^2-4} \quad - ٨٩$$

$$= -\frac{1}{8} \ln |4x^2+4x-3| + \frac{5}{16} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C$$

الصيغ ٢٥ - ٢٧

$$\int \sqrt{25-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} + C \quad - ٩٠$$

$$\int \sqrt{3-4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{3-4x^2} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2} \sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} \right) + C \quad - ٩١$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x\sqrt{3}}{3} + C$$

$$\int \sqrt{x^2-36} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-36} - 18 \ln |x + \sqrt{x^2-36}| + C \quad - ٩٢$$

$$\int \sqrt{3x^2+5} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{3x^2+5} \cdot \sqrt{3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2} \ln (\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2+5}) \right] + C \quad - ٩٣$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln (\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2+5}) + C$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + C \quad - ٩٤$$

$$\int \sqrt{4x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(2x-1)^2+4} \cdot 2 dx \quad - ٩٥$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2x-1}{2} \sqrt{4x^2-4x+5} + 2 \ln (2x-1 + \sqrt{4x^2-4x+5}) \right] + C$$

$$= \frac{2x-1}{4} \sqrt{4x^2-4x+5} + \ln (2x-1 + \sqrt{4x^2-4x+5}) + C$$

مسائل إضافية

أجر عمليات التكامل التالية :

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 5) dx = x^4 + x^3 + x^2 + 5x + C \quad - ٩٦$$

$$\int (3 - 2x - x^4) dx = 3x - x^2 - x^5/5 + C \quad - ٩٧$$

$$\int (x^2 - 1)^2 dx = x^5/5 - 2x^3/3 + x + C - ٩٩ \quad \int (2 - 3x + x^2) dx = 2x - 3x^2/2 + x^3/4 + C - ٩٨$$

$$\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + 2/\sqrt{x}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2 + 4x^{1/2} + C - ١٠٠$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/3}} = \frac{3}{2b}(a+bx)^{2/3} + C - ١٢٢$$

$$\int (a+x)^2 dx = \frac{1}{3}(a+x)^3 + C - ١٠١$$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C - ١٢٣$$

$$\int (x-2)^{3/2} dx = \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + C - ١٠٢$$

$$\int \sqrt{x}(3-5x) dx = 2x^{3/2}(1-x) + C - ١٢٤$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2x^2} + C - ١٠٣$$

$$\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C - ١٢٥$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C - ١٠٤$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C - ١٢٦$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C - ١٠٥$$

$$\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C - ١٢٧$$

$$\int \sqrt{3x-1} dx = \frac{2}{5}(3x-1)^{5/2} + C - ١٠٦$$

$$\int \frac{3x dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + C - ١٢٨$$

$$\int \sqrt{2-3x} dx = -\frac{2}{5}(2-3x)^{5/2} + C - ١٠٧$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = -\frac{1}{3}\ln|1-x^2| + C - ١٢٩$$

$$\int (2x^2+3)^{1/3} x dx = \frac{3}{16}(2x^2+3)^{4/3} + C - ١٠٨$$

$$\int \frac{x-1}{x+1} dx = x - 2\ln|x+1| + C - ١٣٠$$

$$\int (x-1)^2 x dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C - ١٠٩$$

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x+2} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x+2| + C - ١٣١$$

$$\int (x^2-1)x dx = \frac{1}{4}(x^2-1)^2 + C - ١١٠$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C - ١٣٢$$

$$\int \sqrt{1+y^4} y^3 dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2} + C - ١١١$$

$$\int \left(\frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1} \right) = \ln \sqrt{\left| \frac{2x-1}{2x+1} \right|} + C - ١٣٣$$

$$\int (x^2+3)x^2 dx = \frac{1}{6}(x^2+3)^3 + C - ١١٢$$

$$\int a^{4x} dx = \frac{1}{4} \frac{a^{4x}}{\ln a} + C - ١٣٤$$

$$\int (4-x^2)^2 x^2 dx = \frac{16}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + C - ١١٣$$

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C - ١٣٥$$

$$\int \frac{dy}{(2-y)^3} = \frac{1}{2(2-y)^2} + C - ١١٤$$

$$\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C - ١٣٦$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + C - ١١٥$$

$$\int e^{-x^2+2} x dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2+2} + C - ١٣٧$$

$$\int (1-x^2)^2 dx = x - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C - ١١٦$$

$$\int x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{3}e^{x^2} + C - ١٣٨$$

$$\int (1-x^2)^2 x dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^8 + C - ١١٧$$

$$\int (e^x+1)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C - ١٣٩$$

$$\int (1-x^2)^2 x^2 dx = -\frac{1}{9}(1-x^2)^3 + C - ١١٨$$

$$\int (e^x - x^2) dx = e^x - \frac{x^{x+1}}{e+1} + C - ١٤٠$$

$$\int (x^2-x)^4(2x-1) dx = \frac{1}{5}(x^2-x)^5 + C - ١١٩$$

$$\int (e^x+1)^2 e^x dx = \frac{1}{3}(e^x+1)^3 + C - ١٤١$$

$$\int \frac{3t dt}{\sqrt[3]{t^2+3}} = \frac{9}{4}(t^2+3)^{2/3} + C - ١٢٠$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C - ١٤٢$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \sqrt{x^2+2x-4} + C - ١٢١$$

$$\int \frac{dx}{1 - \sin \frac{1}{2}x} = 2(\tan \frac{1}{2}x + \sec \frac{1}{2}x) + C - ١٦٢ \quad \int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C - ١٦٣$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 3x} = \frac{1 - \cos 3x}{3 \sin 3x} + C - ١٦٤ \quad \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1)^2 - x + C - ١٦٥$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sec ax} = x + \frac{1}{a}(\cot ax - \csc ax) + C - ١٦٥ \quad \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3} dx = \ln(e^{2x} + 3)^{2/3} - \frac{1}{3}x + C - ١٦٥$$

$$\int \sec^2 \frac{x}{a} \tan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}a \tan^2 \frac{x}{a} + C - ١٦٦ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} = \ln \frac{C}{(1 - \sqrt{x})^2}, C > 0 - ١٦٦$$

$$\int \frac{\sec^3 3x}{\tan 3x} dx = \frac{1}{3} \ln |\tan 3x| + C - ١٦٧ \quad 147. \int \frac{dx}{x + x^{1/3}} = \frac{3}{2} \ln C(x^{2/3} + 1), C > 0 - ١٦٧$$

$$\int \frac{\sec^5 x}{\csc x} dx = \frac{1}{4} \sec^4 x + C - ١٦٨ \quad \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C - ١٦٨$$

$$\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} e^{\tan 2x} + C - ١٦٩ \quad \int \cos \frac{1}{2}x dx = 2 \sin \frac{1}{2}x + C - ١٦٩$$

$$\int e^{2 \sin 3x} \cos 3x dx = \frac{1}{6} e^{2 \sin 3x} + C - ١٧٠ \quad \int \sec 3x \tan 3x dx = \frac{1}{3} \sec 3x + C - ١٧٠$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \arcsin \frac{x\sqrt{5}}{5} + C - ١٧١ \quad \int \csc^2 2x dx = -\frac{1}{2} \cot 2x + C - ١٧١$$

$$\int \frac{dx}{5 + x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{x\sqrt{5}}{5} + C - ١٧٢ \quad \int x \sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \tan x^2 + C - ١٧٢$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arcsec} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C - ١٧٣ \quad \int \tan^2 x dx = \tan x - x + C - ١٧٣$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \arcsin e^x + C - ١٧٤ \quad \int \tan \frac{1}{2}x dx = 2 \ln |\sec \frac{1}{2}x| + C - ١٧٤$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^{4x}} = \frac{1}{2} \arctan e^{2x} + C - ١٧٥ \quad \int \csc 3x dx = \frac{1}{3} \ln |\csc 3x - \cot 3x| + C - ١٧٥$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C - ١٧٦ \quad \int b \sec ax \tan ax dx = \frac{b}{a} \sec ax + C - ١٧٦$$

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \frac{1}{6} \arctan \frac{3x}{2} + C - ١٧٧ \quad \int (\cos x - \sin x)^2 dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C - ١٧٧$$

$$\int \frac{\sin 8x}{9 + \sin^4 4x} dx = \frac{1}{12} \arctan \frac{\sin^2 4x}{3} + C - ١٧٨ \quad \int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax + C - ١٧٨$$

$$\int \frac{\sec^3 x dx}{\sqrt{1 - 4 \tan^2 x}} = \frac{1}{2} \arcsin (2 \tan x) + C - ١٧٩ \quad = -\frac{1}{2a} \cos^2 ax + C' = -\frac{1}{4a} \cos 2ax + K$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9 \ln^2 x}} = \frac{1}{3} \arcsin \ln x^{3/2} + C - ١٨٠ \quad \int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C - ١٨٠$$

$$\int \frac{2x^4 - x^2}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan x\sqrt{2} + C - ١٨١ \quad \int \cos^4 x \sin x dx = -\frac{1}{5} \cos^5 x + C - ١٨٠$$

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 2x + 8} = \frac{\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}} + C - ١٨٢ \quad \int \tan^5 x \sec^2 x dx = \frac{1}{6} \tan^6 x + C - ١٨١$$

$$\int \cot^4 3x \csc^2 3x dx = -\frac{1}{15} \cot^5 3x + C - ١٨٢$$

$$\int \frac{(2x - 3) dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{(2x + 6) dx}{x^2 + 6x + 13} - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \ln(x^2 + 6x + 13) - \frac{9}{2} \arctan \frac{x + 3}{2} + C - ١٨٣$$

$$\frac{(x-1)dx}{3x^2-4x+3} = \frac{1}{6} \int \frac{(6x-4)dx}{3x^2-4x+3} - \int \frac{dx}{9x^2-12x+9} = \frac{1}{6} \ln(3x^2-4x+3) - \frac{\sqrt{5}}{15} \arctan \frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C - ١٨٤$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3 \arcsin \frac{x-3}{6} + C - ١٨٥$$

$$\int \frac{(5-4x)dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}} = \sqrt{12x-4x^2-8} - \frac{1}{2} \arcsin(2x-3) + C - ١٨٦$$

$$\int \frac{dx}{25-9x^2} = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{3x+5}{3x-5} \right| + C - ١٩٠$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C - ١٨٧$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C - ١٩١$$

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C - ١٨٨$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \frac{1}{2} \ln |2x+\sqrt{4x^2-25}| + C - ١٩٢$$

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + C - ١٨٩$$

$$\int \sqrt{16-9x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{16-9x^2} + \frac{8}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C - ١٩٣$$

$$\int \sqrt{x^2-16} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-16} - 8 \ln |x+\sqrt{x^2-16}| + C - ١٩٤$$

$$\int \sqrt{4x^2+9} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4} \ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) + C - ١٩٥$$

$$\int \sqrt{x^2-2x-3} dx = \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{x^2-2x-3} - 2 \ln |x-1+\sqrt{x^2-2x-3}| + C - ١٩٦$$

$$\int \sqrt{12+4x-x^2} dx = \frac{1}{2} (x-2) \sqrt{12+4x-x^2} + 8 \arcsin \frac{1}{2} (x-2) + C - ١٩٧$$

$$\int \sqrt{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} (x+2) \sqrt{x^2+4x} - 2 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C - ١٩٨$$

$$\int \sqrt{x^2-8x} dx = \frac{1}{2} (x-4) \sqrt{x^2-8x} - 8 \ln |x-4+\sqrt{x^2-8x}| + C - ١٩٩$$

$$\int \sqrt{6x-x^2} dx = \frac{1}{2} (x-3) \sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-3}{3} + C - ٢٠٠$$

الفصل السادس والعشرون

التكامل بالتجزئة

التكامل بالتجزئة : إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق فإن :

$$\begin{aligned} d(uv) &= u dv + v du \\ u dv &= d(uv) - v du \\ \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned} \quad (i)$$

ولإستخدام (i) في حساب تكامل مطلوب ، ينبغي فصل التكامل المعطى إلى جزئين أحدهما u والآخر مع dx هو dv . ولهذا السبب فإن التكامل باستخدام المعادلة (i) يسمى التكامل بالتجزئة . وهناك قاعدتان عامتان هما :
(أ) ينبغي أن يكون الجزء الذي اخترناه dv قابلاً للتكامل مباشرة .

(ب) ينبغي أن لا يكون $\int v du$ أكثر تعقيداً من $\int u dv$.

مثال ١ : أوجد $\int x^3 e^{x^2} dx$

لنضع $u = x^2$ و $dv = e^{x^2} dx$ فيكون $du = 2x dx$ و $v = \frac{1}{2} e^{x^2}$.
واستناداً إلى القاعدة يكون :

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

مثال ٢ : أوجد $\int \ln(x^2 + 2) dx$

لنأخذ $u = \ln(x^2 + 2)$, $dv = dx$ فيكون $du = \frac{2x dx}{x^2 + 2}$ و $v = x$ واستناداً إلى القاعدة يكون

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 2) dx &= x \ln(x^2 + 2) - \int \frac{2x^2 dx}{x^2 + 2} = x \ln(x^2 + 2) - \int \left(2 - \frac{4}{x^2 + 2} \right) dx \\ &= x \ln(x^2 + 2) - 2x + 2\sqrt{2} \arctan x/\sqrt{2} + C \end{aligned}$$

أنظر المسائل ١ - ١٠

صيغ الاختزال : يمكن بالإستفادة من صيغ الإختزال تقليل الجهد الذي يبذل في تكرار عملية التكامل بالتجزئة لحساب قيمة تكامل ما . وتقودنا صيغ الإختزال ، بوجه عام إلى تكامل جديد له شكل التكامل الأصلي ذاته بأس أصغر أو أكبر . وتكون صيغ الإختزال ناجحة إذا نتج في آخر المطاف تكاملاً يمكن حسابه .

وفيما يلي بعض صيغ الاختزال :

$$\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}} \right\}, \quad m \neq 1 \quad (أ)$$

$$\int (a^2 \pm u^2)^m du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1} \int (a^2 \pm u^2)^{m-1} du, \quad m \neq -1/2 \quad (ب)$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}} \right\}, \quad m \neq 1 \quad (ج)$$

$$\int (u^2 - a^2)^m du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1} \int (u^2 - a^2)^{m-1} du, \quad m \neq -1/2 \quad (د)$$

$$\int u^m e^{au} du = \frac{1}{a} u^m e^{au} - \frac{m}{a} \int u^{m-1} e^{au} du \quad (هـ)$$

$$\int \sin^m u du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} u du \quad (و)$$

$$\int \cos^m u du = \frac{\cos^{m-1} u \sin u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} u du \quad (ز)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^m u \cos^n u du &= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u du \\ &= -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u du, \quad m \neq -n \end{aligned} \quad (ح)$$

$$\int u^m \sin bu du = -\frac{u^m}{b} \cos bu + \frac{m}{b} \int u^{m-1} \cos bu du \quad (ط)$$

$$\int u^m \cos bu du = \frac{u^m}{b} \sin bu - \frac{m}{b} \int u^{m-1} \sin bu du \quad (ع)$$

أنظر المأنة ١١

مسائل محلولة

١ - أوجد : $\int x \sin x dx$.

لدينا الاختيارات التالية :

(أ) $u = x \sin x, dv = dx$; (ب) $u = \sin x, dv = x dx$; (ج) $u = x, dv = \sin x dx$.

(أ) فإذا اخترنا $u = x \sin x, dv = dx$ إذن $du = (\sin x + x \cos x) dx, v = x$ وبالتالى

$$\int x \sin x dx = x \cdot x \sin x - \int x(\sin x + x \cos x) dx$$

ولكن التكامل الناتج في هذه الحالة ليس بدرجة بساطة التكامل الأصيل وبذلك فإننا نستبعد هذا الاختيار .

(ب) وإذا اخترنا $u = \sin x, dv = x dx$ إذن $du = \cos x dx, v = \frac{1}{2}x^2$ وبالتالى :

$$\int x \sin x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \int \frac{1}{2}x^2 \cos x dx$$

ولكن التكامل الناتج في هذه الحالة أيضا ليس بدرجة بساطة التكامل الأصيل ولذلك فإننا نستبعد هذا الاختيار .

(ج) وإذا اخترنا $u = x$, $dv = \sin x \, dx$ إذن $du = dx$, $v = -\cos x$, وبالتالي :

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

٧- أوجد : $\int x e^x \, dx$.

لنضع $u = x$, $dv = e^x \, dx$ إذن $du = dx$, $v = e^x$, ومنه

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

٨- أوجد : $\int x^3 \ln x \, dx$.

لنضع $u = \ln x$, $dv = x^3 \, dx$ إذن $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^4}{4}$, ومنه

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^2 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{12} x^3 + C$$

٩- أوجد : $\int x \sqrt{1+x} \, dx$.

لنضع $u = x$, $dv = \sqrt{1+x} \, dx$ إذن $du = dx$, $v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$, ومنه

$$\int x \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{3} x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (1+x)^{3/2} \, dx = \frac{2}{3} x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + C$$

١٠- أوجد : $\int \arcsin x \, dx$.

لنضع $u = \arcsin x$, $dv = dx$ إذن $du = dx/\sqrt{1-x^2}$, $v = x$, ومنه

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

١١- أوجد : $\int \sin^2 x \, dx$.

لنضع $u = \sin x$, $dv = \sin x \, dx$ إذن $du = \cos x \, dx$, $v = -\cos x$, ومنه

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

وننقل التكامل الناتج إلى الطرف الأيسر نجد :

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \text{ومن} \quad 2 \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C'$$

١٢- أوجد : $\int \sec^2 x \, dx$.

لنضع $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x \, dx$ إذن $du = \sec x \tan x \, dx$, $v = \tan x$, ومنه

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx\end{aligned}$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \int \sec x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C' \quad \text{وبالتالي}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \{ \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| \} + C \quad \text{وأخيراً}$$

$$8 - \text{أوجد } \int x^2 \sin x \, dx.$$

لنضع $u = x^2$, $dv = \sin x \, dx$. إذن $du = 2x \, dx$, $v = -\cos x$, ومن

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

لنضع في التكامل الأخير $u = x$ و $dv = \cos x \, dx$. إذن $du = dx$, $v = \sin x$, ومن

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \{ x \sin x - \int \sin x \, dx \} \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C\end{aligned}$$

$$9 - \text{أوجد } \int x^3 e^{2x} \, dx.$$

لنضع $u = x^3$, $dv = e^{2x} \, dx$. إذن $du = 3x^2 \, dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$, ومن

$$\int x^3 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x} \, dx$$

لنضع في التكامل الأخير $u = x^2$ و $dv = e^{2x} \, dx$. إذن $du = 2x \, dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$, ومن

$$\int x^3 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} \, dx \right\} = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \int x e^{2x} \, dx$$

ولنضع في التكامل الأخير $u = x$ و $dv = e^{2x} \, dx$. إذن $du = dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$, ومن

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{2x} \, dx &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$10 - \text{أوجد } \int \frac{x^2 \, dx}{(a^2 \pm x^2)^m}.$$

(أ) لنأخذ $u = x$, $dv = \frac{x \, dx}{(a^2 \pm x^2)^m}$; إذن $du = dx$, $v = \frac{\pm 1}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$, ومن

$$\int \frac{x^2 \, dx}{(a^2 \pm x^2)^m} = \frac{\pm x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} \pm \frac{1}{2m-2} \int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$$

(ب) لنأخذ $u = x$, $dv = x(a^2 \pm x^2)^{m-1} \, dx$; إذن $du = dx$, $v = \frac{\pm 1}{2m}(a^2 \pm x^2)^m$, ومن

$$\int x^2(a^2 \pm x^2)^{m-1} \, dx = \frac{\pm x}{2m}(a^2 \pm x^2)^m \mp \frac{1}{2m} \int (a^2 \pm x^2)^m \, dx$$

$$١١- أوجد (١) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ (ب) $\int (9+x^2)^{3/2} dx$.$$

(١) بما أن استخدام صيغة الاختزال (١) تنقص الأس في المقام بمقدار الوحدة . فإننا نجد باستخدام هذه الصيغة مرتين أن :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(ب) باستخدام صيغة الاختزال (ب) نجد أن :

$$\begin{aligned} \int (9+x^2)^{3/2} dx &= \frac{1}{4} x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4} \int (9+x^2)^{1/2} dx \\ &= \frac{1}{4} x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8} \{x(9+x^2)^{1/2} + 9 \ln(x + \sqrt{9+x^2})\} + C \end{aligned}$$

مسائل إضافية

$$\int x \sec^3 3x dx = \frac{x}{3} \tan 3x - \frac{1}{9} \ln |\sec 3x| + C - ١٢ \quad \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C - ١٣$$

$$\int \arccos 2x dx = x \arccos 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C - ١٤$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C - ١٥$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C - ١٦ \quad \int x^2 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{105} (1-x)^{3/2} (15x^2 + 12x + 8) + C - ١٧$$

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2} x + C - ١٨$$

$$\int x^3 e^{-2x} dx = -\frac{1}{8} e^{-2x} (x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{3}{8}) + C - ١٩$$

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{2}{3} \cos^3 x - \sin^2 x \cos x + C - ٢٠$$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C - ٢١$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15} (3x^3 - 4x + 8) \sqrt{1+x} + C - ٢٢ \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C - ٢٣$$

$$\int x \arcsin x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C - ٢٤$$

$$\int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{8} \sin 3x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos 3x + C - ٢٥$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + C - ٢٦$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C - ٢٧$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C - ٢٨$$

$$٢٩- (١) اكتب $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \int \frac{(a^2 \pm x^2) \mp x^2}{(a^2 \pm x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} \mp \int \frac{x^2 dx}{(a^2 \pm x^2)^n}$ واستخدم$$

نتيجة المسألة ١٠ (١) لتحصل على صيغة الاختزال (١) .

(ب) اكتب $\int (a^2 \pm x^2)^n dx = a^2 \int (a^2 \pm x^2)^{n-1} dx \pm \int x^2 (a^2 \pm x^2)^{n-1} dx$ واستخدم نتيجة المسألة ١٠ (ب) لتحصل على الاختزال (ب).

٣٠ - استنتج صيغة الاختزال من (ج) إلى (د).

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(4+x^2)^{1/2}} + C \quad \text{--- ٣١} \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int (4-x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{4}x(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin \frac{1}{2}x + C \quad \text{--- ٣٢}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-16)^3} = \frac{1}{2048} \left\{ \frac{x(3x^2-80)}{(x^2-16)^2} + \frac{3}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| \right\} + C \quad \text{--- ٣٤}$$

$$\int (x^2-1)^{3/2} dx = \frac{1}{48}x(8x^4-26x^2+33)\sqrt{x^2-1} - \frac{5}{16} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C \quad \text{--- ٣٥}$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8} \sin x \cos x - \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + C \quad \text{--- ٣٦}$$

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{15}(3 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 8) \sin x + C \quad \text{--- ٣٧}$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = -\frac{1}{5} \cos^3 x (\sin^2 x + \frac{2}{3}) + C \quad \text{--- ٣٨}$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \frac{1}{9} \sin^5 x (\cos^4 x + \frac{4}{7} \cos^2 x + \frac{8}{35}) + C \quad \text{--- ٣٩}$$

وهناك طريقة بديلة تصلح لبعض المسائل الصعبة في هذا الفصل. ويمكن الحصول على هذه الطريقة بملاحظة أن (أنظر المسألة ٩).

$$\int x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C \quad (i)$$

حيث حدود الطرف الأيمن. بنفس النظر عن المعاملات (الأمثال). هي الحدود المختلفة التي نحصل عليها باشتقاق متكررة للدالة المكاملة $x^3 e^{2x}$ وبالتالي فإنه يمكننا أن نكتب مباشرة.

$$\int x^3 e^{2x} dx = Ax^3 e^{2x} + Bx^2 e^{2x} + Dxe^{2x} + Ee^{2x} + C \quad (ii)$$

وبالاشتقاق نجد أن

$$x^3 e^{2x} = 2Ax^3 e^{2x} + (3A+2B)x^2 e^{2x} + (2B+2D)xe^{2x} + (D+2E)e^{2x}$$

وبمساواة المعاملات نجد أن

$$2A = 1, \quad 3A + 2B = 0, \quad 2B + 2D = 0, \quad D + 2E = 0$$

وبالتالي فإن $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{3}{4}A = -\frac{3}{8}, D = -B = \frac{3}{8}, E = -\frac{1}{2}D = -\frac{3}{16}$. وبالتعويض عن

E, D, B, A في (ii) نحصل على (i).

يمكن استخدام هذه الطريقة للحصول على $\int f(x) dx$ إذا كان التفاضل المتكرر للدالة $f(x)$ يعطى في كل مرة عدد محدود من الحدود المختلفة.

٤٠- أوجد $\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{13} e^{2x} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C$ وذلك باستخدام :

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = A e^{2x} \sin 3x + B e^{2x} \cos 3x + C$$

٤١- أوجد $\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = \frac{1}{25} e^{3x} (-14 \sin 4x - 23 \cos 4x) + C$ وذلك باستخدام :

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = A e^{3x} \sin 4x + B e^{3x} \cos 4x + C$$

٤٢- أوجد $\int \sin 3x \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5} (2 \sin 3x \sin 2x + 3 \cos 3x \cos 2x) + C$ وذلك باستخدام

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = A \sin 3x \sin 2x + B \cos 3x \cos 2x + D \cos 3x \sin 2x + E \sin 3x \cos 2x + C$$

٤٣- أوجد $\int e^{3x} x^2 \sin x \, dx$

$$= \frac{e^{3x}}{250} [25x^2(3 \sin x - \cos x) - 10x(4 \sin x - 3 \cos x) + 9 \sin x - 13 \cos x] + C$$

الفصل السابع والعشرون

التكاملات المثلثية

نستخدم المتطابقات التالية للحصول على التكاملات المثلثية في هذا الفصل .

$$\begin{array}{ll} \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)] & - ٧ \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] & - ٨ \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] & - ٩ \\ 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x & - ١٠ \\ 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2}x & - ١١ \\ 1 \pm \sin x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x) & - ١٢ \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & - ١ \\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x & - ٢ \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x & - ٣ \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) & - ٤ \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) & - ٥ \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x & - ٦ \end{array}$$

مسائل محلولة

الجيب وجيوب التمام :

$$\begin{array}{ll} \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C & - ١ \\ \int \cos^2 3x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \sin 6x + C & - ٢ \\ \int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C & - ٣ \\ \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx & - ٤ \\ = \int \cos x \, dx - 2 \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \sin^4 x \cos x \, dx \\ = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C \\ \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx & - ٥ \\ = \int \sin^2 x \cos x \, dx - \int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \\ \int \cos^4 2x \sin^3 2x \, dx = \int \cos^4 2x \sin^2 2x \sin 2x \, dx = \int \cos^4 2x (1 - \cos^2 2x) \sin 2x \, dx & - ٦ \\ = \int \cos^4 2x \sin 2x \, dx - \int \cos^6 2x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{10} \cos^5 2x + \frac{1}{14} \cos^7 2x + C \\ \int \sin^3 3x \cos^3 3x \, dx = \int (1 - \cos^2 3x) \cos^3 3x \sin 3x \, dx & - ٧ \\ = \int \cos^3 3x \sin 3x \, dx - \int \cos^5 3x \sin 3x \, dx = -\frac{1}{18} \cos^6 3x + \frac{1}{24} \cos^8 3x + C \\ \int \sin^3 3x \cos^3 3x \, dx = \int \sin^2 3x (1 - \sin^2 3x) \cos 3x \, dx \\ = \int \sin^2 3x \cos 3x \, dx - 2 \int \sin^4 3x \cos 3x \, dx + \int \sin^6 3x \cos 3x \, dx \\ = \frac{1}{12} \sin^4 3x - \frac{1}{9} \sin^6 3x + \frac{1}{24} \sin^8 3x + C \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 \frac{x}{3} dx &= \int \left(1 - \sin^2 \frac{x}{3}\right) \cos \frac{x}{3} dx = 3 \sin \frac{x}{3} - \sin^3 \frac{x}{3} + C \quad \text{٨} \\
 \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx \quad \text{٩} \\
 &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx \\
 &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\
 \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C \quad \text{١٠} \\
 \int \sin^4 3x \cos^2 3x dx &= \int (\sin^2 3x \cos^2 3x) \sin^2 3x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x (1 - \cos 6x) dx \quad \text{١١} \\
 &= \frac{1}{8} \int \sin^2 6x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 12x) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x dx \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C \\
 \int \sin 3x \sin 2x dx &= \int \frac{1}{2} \{\cos (3x - 2x) - \cos (3x + 2x)\} dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) dx \quad \text{١٢} \\
 &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C \\
 \int \sin 3x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} \{\sin (3x - 5x) + \sin (3x + 5x)\} dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C \quad \text{١٣} \\
 \int \cos 4x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin 6x + C \quad \text{١٤} \\
 \int \sqrt{1 - \cos x} dx &= \sqrt{2} \int \sin \frac{1}{2} x dx = -2\sqrt{2} \cos \frac{1}{2} x + C \quad \text{١٥} \\
 \int (1 + \cos 3x)^{3/2} dx &= 2\sqrt{2} \int \cos^3 \frac{3}{2} x dx = 2\sqrt{2} \int (1 - \sin^2 \frac{3}{2} x) \cos \frac{3}{2} x dx \quad \text{١٦} \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2} x - \frac{2}{15} \sin^3 \frac{3}{2} x \right) + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin 2x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos (\frac{1}{2}\pi - 2x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sin (\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \csc (\frac{1}{4}\pi - x) dx \quad \text{١٧} \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\csc (\frac{1}{4}\pi - x) - \cot (\frac{1}{4}\pi - x)| + C
 \end{aligned}$$

الظل والقاطع وظلال التمام وقواطع التمام :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx \quad \text{١٨} \\
 &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \\
 \int \tan^3 x dx &= \int \tan^3 x \tan^2 x dx = \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) dx \quad \text{١٩} \\
 &= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x| + C \\
 \int \sec^4 2x dx &= \int \sec^2 2x \sec^2 2x dx = \int \sec^2 2x (1 + \tan^2 2x) dx \quad \text{٢٠} \\
 &= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} \tan 2x + \frac{1}{6} \tan^3 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^3 3x \sec^3 3x dx &= \int \tan^3 3x (1 + \tan^2 3x) \sec^3 3x dx \quad \text{— ٢١} \\ &= \int \tan^3 3x \sec^3 3x dx + \int \tan^5 3x \sec^3 3x dx = \frac{1}{12} \tan^4 3x + \frac{1}{18} \tan^6 3x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^3 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx \quad \text{— ٢٢} \\ &= \frac{1}{2} \sec^3 x \tan x - \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^3 2x \sec^3 2x dx &= \int \tan^2 2x \sec^3 2x \cdot \sec 2x \tan 2x dx \quad \text{— ٢٣} \\ &= \int (\sec^2 2x - 1) \sec^3 2x \cdot \sec 2x \tan 2x dx \\ &= \int \sec^4 2x \cdot \sec 2x \tan 2x dx - \int \sec^3 2x \cdot \sec 2x \tan 2x dx \\ &= \frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{8} \sec^3 2x + C \end{aligned}$$

$$\int \cot^3 2x dx = \int \cot 2x (\csc^2 2x - 1) dx = -\frac{1}{2} \cot^2 2x + \frac{1}{2} \ln |\csc 2x| + C \quad \text{— ٢٤}$$

$$\begin{aligned} \int \cot^4 3x dx &= \int \cot^3 3x (\csc^2 3x - 1) dx = \int \cot^3 3x \csc^2 3x dx - \int \cot^3 3x dx \quad \text{— ٢٥} \\ &= \int \cot^3 3x \csc^2 3x dx - \int (\csc^2 3x - 1) dx = -\frac{1}{3} \cot^2 3x + \frac{1}{3} \cot 3x + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \csc^6 x dx &= \int \csc^4 x (1 + \cot^2 x)^2 dx \quad \text{— ٢٦} \\ &= \int \csc^4 x dx + 2 \int \cot^2 x \csc^4 x dx + \int \cot^4 x \csc^2 x dx \\ &= -\cot x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cot 3x \csc^4 3x dx &= \int \cot 3x (1 + \cot^2 3x) \csc^2 3x dx \quad \text{— ٢٧} \\ &= \int \cot 3x \csc^2 3x dx + \int \cot^3 3x \csc^2 3x dx = -\frac{1}{3} \cot^2 3x - \frac{1}{12} \cot^4 3x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cot^3 x \csc^5 x dx &= \int \cot^3 x \csc^4 x \cdot \csc x \cot x dx = \int (\csc^2 x - 1) \csc^4 x \cdot \csc x \cot x dx \quad \text{— ٢٨} \\ &= \int \csc^6 x \cdot \csc x \cot x dx - \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x dx \\ &= -\frac{1}{7} \csc^7 x + \frac{1}{5} \csc^5 x + C \end{aligned}$$

مسائل إضافية

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \text{— ٢٩} \quad \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \cos^2 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \quad \text{— ٣٠}$$

$$\int \sin^4 2x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + C \quad \text{— ٣١}$$

$$\int \cos^4 \frac{1}{2}x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \sin 2x + C \quad \text{— ٣٢}$$

$$\int \sin^7 x dx = \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{2}{5} \cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C \quad \text{— ٣٣}$$

$$\int \cos^6 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C \quad - \text{٢٤}$$

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{3}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C \quad - \text{٢٥}$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^5 x + C \quad - \text{٢٦}$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{48}\cos^3 2x - \frac{1}{16}\cos 2x + C \quad - \text{٢٧}$$

$$\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{128}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C \quad - \text{٢٨}$$

$$\int \sin 2x \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C \quad - \text{٢٩}$$

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C \quad - \text{٣٠}$$

$$\int \sin 5x \sin x \, dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C \quad - \text{٣١}$$

$$\int \frac{\cos^{2/3} x}{\sin^{5/3} x} \, dx = -\frac{3}{5}\cot^{5/3} x + C \quad - \text{٣٢} \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{1 - \sin x} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C \quad - \text{٣٣}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C \quad - \text{٣٤}$$

$$\int x(\cos^3 x^2 - \sin^3 x^2) \, dx = \frac{1}{12}(\sin x^2 + \cos x^2)(4 + \sin 2x^2) + C \quad - \text{٣٥}$$

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln |\cos x| + C \quad - \text{٣٦}$$

$$\int \tan^3 3x \sec 3x \, dx = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C \quad - \text{٣٧}$$

$$\int \tan^{3/2} x \sec^4 x \, dx = \frac{2}{3}\tan^{5/2} x + \frac{2}{9}\tan^{3/2} x + C \quad - \text{٣٨}$$

$$\csc^4 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8}\cot^3 2x + C \quad - \text{٣٩} \quad \int \tan^4 x \sec^4 x \, dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{3}\tan^5 x + C \quad - \text{٤٠}$$

$$\int \left(\frac{\sec x}{\tan x}\right)^4 \, dx = -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \quad - \text{٤١} \quad \int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln |\sin x| + C \quad - \text{٤٢}$$

$$\int \frac{\cot^3 x}{\csc x} \, dx = -\sin x - \csc x + C \quad - \text{٤٣} \quad \int \cot^3 x \csc^4 x \, dx = -\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{8}\cot^6 x + C \quad - \text{٤٤}$$

$$\int \tan x \sqrt{\sec x} \, dx = 2\sqrt{\sec x} + C \quad - \text{٤٥} \quad \int \cot^2 x \csc^3 x \, dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + \frac{1}{3}\csc^5 x + C \quad - \text{٤٦}$$

٤٧ - استخدم طريقة التكامل بالتجزئة لتستنتج صيغ الاختزال التالية :

$$\int \sec^m u \, du = \frac{1}{m-1} \sec^{m-2} u \tan u + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} u \, du \quad (أ)$$

$$\int \csc^m u \, du = -\frac{1}{m-1} \csc^{m-2} u \cot u + \frac{m-2}{m-1} \int \csc^{m-2} u \, du \quad (ب)$$

استخدم صيغ الاختزال في المسألة ٥٧ لحساب قيم المسائل ٥٨ - ٦٠

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln |\sec x + \tan x| + C \quad - \text{٥٨}$$

$$\int \csc^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\csc^3 x \cot x - \frac{3}{8}\csc x \cot x + \frac{3}{8}\ln |\csc x - \cot x| + C \quad - \text{٥٩}$$

$$\begin{aligned} \int \sec^6 x \, dx &= \frac{1}{5}\sec^4 x \tan x + \frac{4}{15}\sec^2 x \tan x + \frac{8}{15}\tan x + C \quad - \text{٦٠} \\ &= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C \end{aligned}$$

الفصل الثامن والعشرون

التعويضات المثلثية

يمكن تحويل دالة التكامل، التي تحتوى على أحد الأشكال $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$ ، و $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$ ، أو $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$ ، بشرط عدم احتوائها على أى مضروب غير قياسى آخر إلى دالة تكامل أخرى. تحتوى على ذوال مثلثية لمتغير جديد :

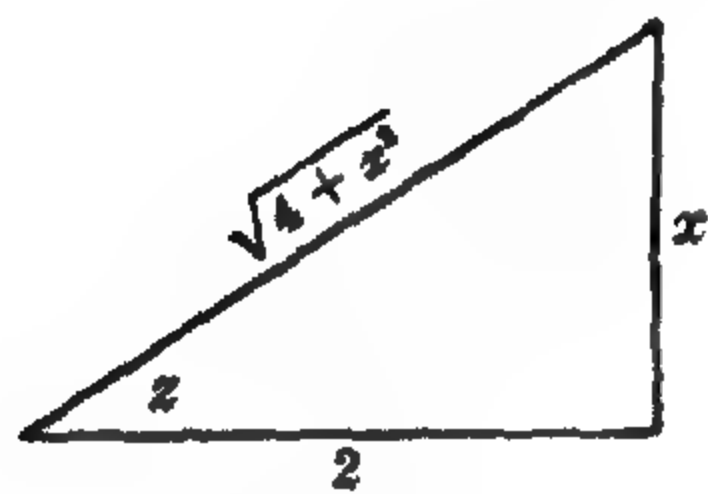
من أجل	استخدم	لتحصل على
$\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \sin z$	$a \sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \tan z$	$a \sqrt{1 + \tan^2 z} = a \sec z$
$\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b} \sec z$	$a \sqrt{\sec^2 z - 1} = a \tan z$

وفى كل حالة يقودنا التكامل إلى تعبير فى المتغير z . وللحصول على التعبير المقابل فى المتغير الأصل نستخدم المثلث القائم كما هو مبين فى المسائل المحلولة التالية :

مسائل محلولة

١- أوجد $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$.

لنضع $x = 2 \tan z$; فيكون $dx = 2 \sec^2 z dz$ و $\sqrt{4+x^2} = 2 \sec z$. وبالتالى فإن

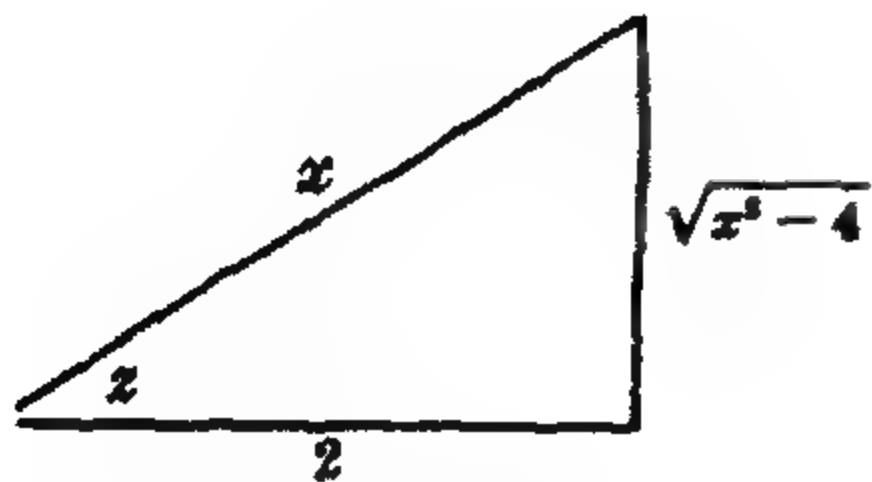


شكل ٢٨ - ١

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2 \sec^2 z dz}{(4 \tan^2 z)(2 \sec z)} = \frac{1}{4} \int \frac{\sec z}{\tan^2 z} dz \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^{-2} z \cos z dz = -\frac{1}{4 \sin z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C \end{aligned}$$

٢- أوجد $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

لنضع $x = 2 \sec z$; فيكون $dx = 2 \sec z \tan z dz$ و $\sqrt{x^2-4} = 2 \tan z$. وبالتالى فإن



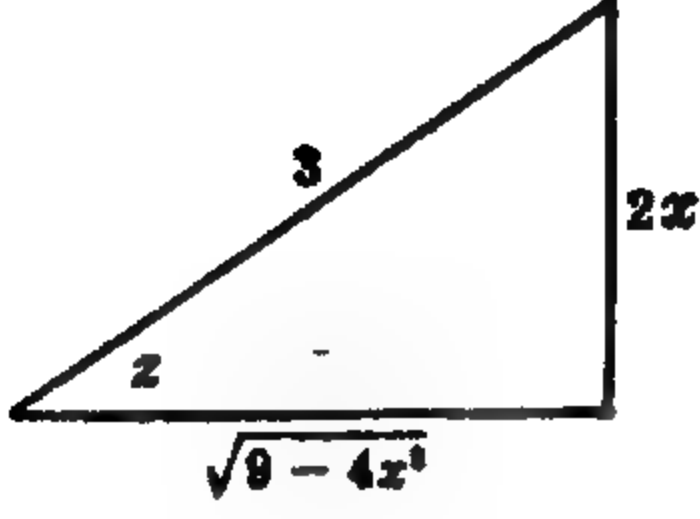
شكل ٢٨ - ٢

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{4 \sec^2 z}{2 \tan z} (2 \sec z \tan z dz) = 4 \int \sec^3 z dz \\ &= 2 \sec z \tan z + 2 \ln |\sec z + \tan z| + C' \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-4} + 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C \end{aligned}$$

٣ - أوجد $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$.

لنضع $x = \frac{3}{2} \sin z$; فيكون $dx = \frac{3}{2} \cos z dz$ ، وبالتالى فإن $\sqrt{9-4x^2} = 3 \cos z$ ، وبالتالى فإن

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx &= \int \frac{3 \cos z}{\frac{3}{2} \sin z} \left(\frac{3}{2} \cos z dz \right) = 3 \int \frac{\cos^2 z}{\sin z} dz \\ &= 3 \int \frac{1 - \sin^2 z}{\sin z} dz = 3 \int \csc z dz - 3 \int \sin z dz \\ &= 3 \ln |\csc z - \cot z| + 3 \cos z + C' \\ &= 3 \ln \left| \frac{3 - \sqrt{9-4x^2}}{x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + C \end{aligned}$$

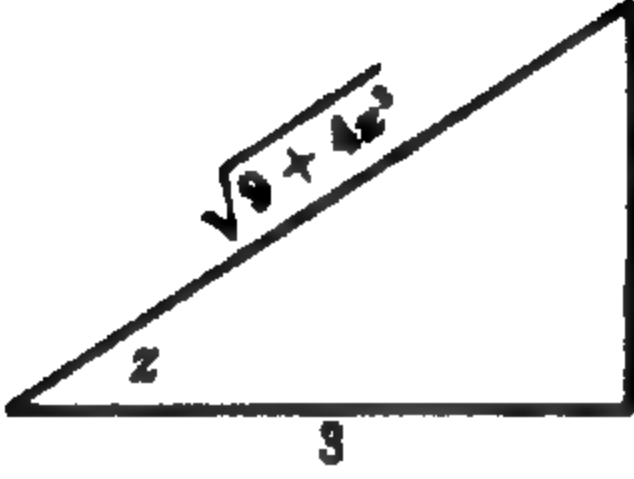


شكل ٢٨ - ٣

٤ - أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$.

لنضع $x = \frac{3}{2} \tan z$; فيكون $dx = \frac{3}{2} \sec^2 z dz$ ، وبالتالى فإن $\sqrt{9+4x^2} = 3 \sec z$ ، وبالتالى فإن

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2 z dz}{\frac{3}{2} \tan z \cdot 3 \sec z} = \frac{1}{3} \int \csc z dz \\ &= \frac{1}{3} \ln |\csc z - \cot z| + C' = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{9+4x^2} - 3}{x} \right| + C \end{aligned}$$

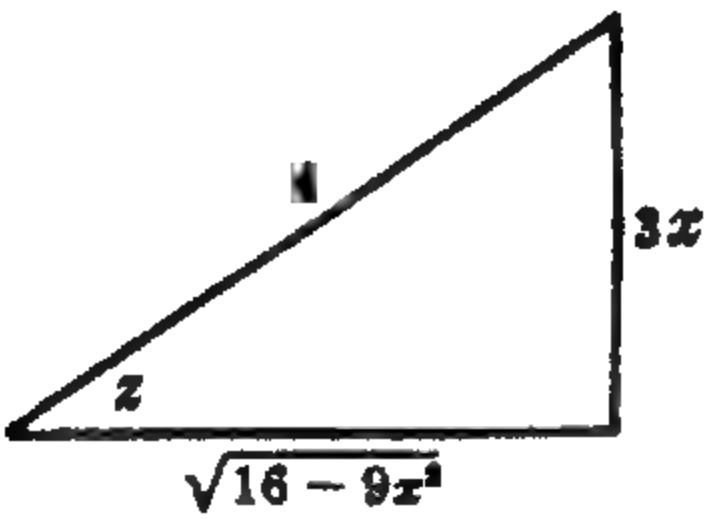


شكل ٢٨ - ٤

٥ - أوجد $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^5} dx$.

لنضع $x = \frac{4}{3} \sin z$; فيكون $dx = \frac{4}{3} \cos z dz$ ، وبالتالى فإن $\sqrt{16-9x^2} = 4 \cos z$ ، وبالتالى فإن

$$\begin{aligned} \int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^5} dx &= \int \frac{64 \cos^3 z \cdot \frac{4}{3} \cos z dz}{\frac{4096}{729} \sin^5 z} = \frac{243}{16} \int \frac{\cos^4 z}{\sin^5 z} dz \\ &= \frac{243}{16} \int \cot^4 z \csc^2 z dz = -\frac{243}{80} \cot^3 z + C \\ &= -\frac{243}{80} \cdot \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{243x^5} + C = -\frac{1}{80} \cdot \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^5} + C \end{aligned}$$

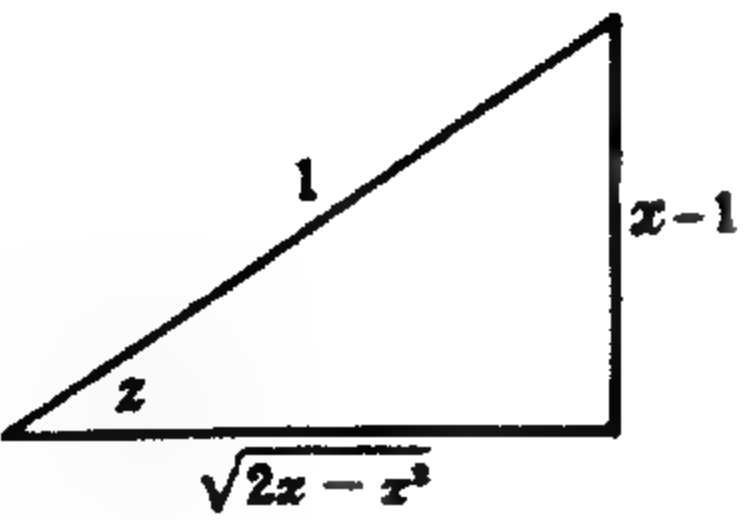


شكل ٢٨ - ٥

٦ - أوجد $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

لنضع $x-1 = \sin z$; فيكون $dx = \cos z dz$ ، وبالتالى فإن $\sqrt{2x-x^2} = \cos z$ ، وبالتالى فإن

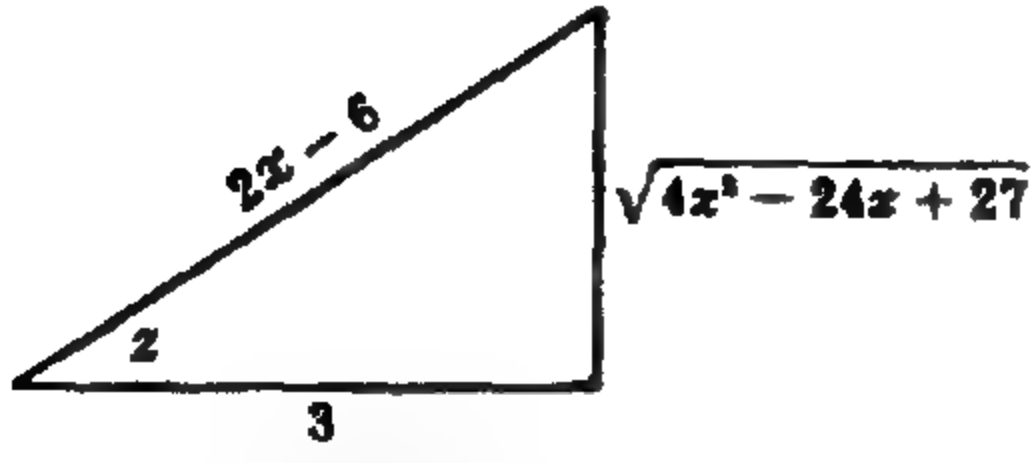
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} &= \int \frac{(1+\sin z)^2 \cos z dz}{\cos z} = \int (1+\sin z)^2 dz \\ &= \int \left(\frac{3}{2} + 2 \sin z - \frac{1}{2} \cos 2z \right) dz = \frac{3}{2} z - 2 \cos z - \frac{1}{4} \sin 2z + C \\ &= \frac{3}{2} \arcsin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C \\ &= \frac{3}{2} \arcsin(x-1) - \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C \end{aligned}$$



شكل ٢٨ - ٦

$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\{4(x-3)^2 - 9\}^{3/2}} \quad \text{٧ - أوجد}$$

لنضع $x - 3 = \frac{3}{2} \sec z$; فيكون $dx = \frac{3}{2} \sec z \tan z dz$ و $\sqrt{4x^2 - 24x + 27} = 3 \tan z$ وبالتالي فإن :



شكل ٢٨ - ٧

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec z \tan z dz}{27 \tan^3 z} \\ &= \frac{1}{18} \int \sin^{-2} z \cos z dz \\ &= -\frac{1}{18} \csc z + C \\ &= -\frac{1}{9} \frac{x-3}{\sqrt{4x^2 - 24x + 27}} + C \end{aligned}$$

مسائل إضافية

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C \quad \text{٨} \\ \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx &= 5 \ln \left| \frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x} \right| + \sqrt{25-x^2} + C \quad \text{٩} \\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C \quad \text{١٠} \\ \int \sqrt{x^2+4} dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C \quad \text{١١} \\ \int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{١٢} \\ \int \sqrt{x^2-4} dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C \quad \text{١٣} \\ \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a} + C \quad \text{١٤} \\ \int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{5/2}} &= \frac{x^3}{12(4-x^2)^{3/2}} + C \quad \text{١٥} \\ \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C \quad \text{١٦} \\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C \quad \text{١٧} \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-16}} &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} + 8 \ln|x + \sqrt{x^2-16}| + C \quad \text{١٨} \\ \int x^2\sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{1}{5}(a^2-x^2)^{5/2} - \frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C \quad \text{١٩} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} &= \ln(x-2 + \sqrt{x^2-4x+13}) + C \quad \text{٢٠} \\ \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}} &= \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C \quad \text{٢١} \\ \int \frac{dx}{(9+x^2)^2} &= \frac{1}{54} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{18(9+x^2)} + C \quad \text{٢٢} \end{aligned}$$

أجرى التكامل بالتجزئة في المسائلين ٢٣ - ٢٤ واستخدم الطريقة المثبتة في هذا الفصل.

$$\int x \arcsin x dx = \frac{1}{4}(2x^2-1) \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C \quad \text{٢٣}$$

$$\int x \arccos x dx = \frac{1}{4}(2x^2-1) \arccos x - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C \quad \text{٢٤}$$

الفصل التاسع والعشرون

التكامل بالكسور الجزئية

متعددة الحدود في x هي دالة من الشكل $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ حيث المعاملات a_n ثوابت و $a_0 \neq 0$ و n عدد صحيح موجب أو صفر .

إذا تساوت متعددة حدود من نفس الدرجة لجميع قيم المتغير فإن معاملات المتغير ذات القوة الواحدة في المتعدتين تكون متساوية .

يمكن التعبير عن كل متعددة حدود ذات معاملات حقيقية (نظريا على الأقل) بحاصل ضرب معاملات خطية حقيقية من الشكل $2x + b$ ومعاملات تربيعية حقيقية ، غير قابلة للتحويل إلى مضاريب خطية ، من الشكل $ax^2 + bx + c$.

تسمى الدالة $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x)$ و $g(x)$ متعددا حدود بدالة جذرية .

وإذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسراً حقيقياً وخلاف ذلك فإن $F(x)$ تسمى كسراً غير حقيقى .

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقى بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقى . مثل $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$. يمكن (نظريا على الأقل) التعبير عن كل كسر قياسى بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) مقاماتها من الشكل $(ax+b)^n$ أو من الشكل $(ax^2+bx+c)^n$ حيث n عدد صحيح موجب . وهنا نشأ ، حسب طبيعة معاملات المقام ، أربع حالات :

الحالة I معاملات خطية متميزة :

يقابل كل معامل خطى $ax+b$ يظهر مرة واحدة في مقام كسر قياسى حقيقى كسراً جزئياً وحيداً من الشكل $\frac{A}{ax+b}$ حيث A ثابت يبنى تمييزه .

أنظر المسألتين ١ - ٢

الحالة II معاملات خطية متكررة :

يقابل كل معامل خطى $ax+b$ يظهر n مرة في مقام كسر قياسى حقيقى مجموع n كسراً جزئياً من الشكل

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث A_i ثوابت يبنى تمييزها .

أنظر المسألتين ٣ - ٤

الحالة III معاملات تربيعية متميزة :

يقابل كل معامل تربيعى ax^2+bx+c ، غير قابل للتحويل إلى معاملات خطية ، يظهر مرة واحدة

في مقام كسر قياسي حقيقي ، كسرا جزئيا وحيدا من الشكل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ، حيث A و B ثابتان ينبغي تعيينهما .
أنظر المسألتين ٥ - ٦

الحالة IV معاملات تربيعية متكررة :

يقابل كل معامل تربيعي ax^2+bx+c يظهر n مرة في مقام كسر قياسي حقيقي ، مجموع n كسرا جزئيا من الشكل .

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث A_i و B_i ثوابت ينبغي تعيينها .

أنظر المسألتين ٧ - ٨

مسائل محلولة

$$١- \text{أوجد } \int \frac{dx}{x^2-4}.$$

$$(١) \text{ نحلل المقام إلى } x^2-4 = (x-2)(x+2).$$

$$\text{ونكتب } \frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \text{ ونتخلص من المقامات فنحصل على :}$$

$$1 = (A+B)x + (2A-2B) \quad (٢) \quad \text{أو} \quad 1 = A(x+2) + B(x-2) \quad (١)$$

(ب) تعيين الثوابت .

الطريقة العامة . نساوي بين معاملات الحدود متساوية القوى لـ x في (٢) ، ثم نحل المعادلات الناتجة آنيا لنحصل على الثوابت ، وهكذا نجد أن $A+B=0$ و $2A-2B=1$ ومنه $A=\frac{1}{4}$ و $B=-\frac{1}{4}$

الطريقة المختصرة : بالتعويض عن $x=2$ في (١) نجد أن $1=4A$ و $1=-4B$ ومنه $A=\frac{1}{4}$ و $B=-\frac{1}{4}$ تماما كما وجدنا (للاحظ أن القيمتين اللتين اخترناهما لـ x هما القيمتان اللتان تجعلان مقام الكسرين الجزئيين مساويا للصفر) .

$$(ج) \text{ وهكذا يكون لدينا مهما كانت الطريقة } \frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2} \text{ ومنه}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$٢- \text{أوجد } \int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}.$$

$$(١) \text{ إذن } x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3). \text{ وبالتالي : } \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$(١) \quad x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$\text{أو} \quad (٢) \quad x+1 = (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A$$

(ب) الطريقة العامة . نحل مجموعة المعادلات :

$$A + B + C = 0, \quad A + 3B - 2C = 1, \quad \text{و} \quad -6A = 1$$

آتيا فنحصل على $C = -2/15$ ، $B = 3/10$ ، $A = -1/6$

الطريقة المختصرة : لنعوض في (١) بالقيم $x = 0$ و $x = 2$ و $x = -3$ فنحصل على $1 = -6A$

ومن $A = -1/6$ وعلى $3 = 10B$ ومنه $B = 3/10$ وعلى $-2 = 15C$ ومنه $C = -2/15$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} &= -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + C = \ln \frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6} |x+3|^{2/15}} + C \quad (ج) \end{aligned}$$

$$٣- \text{أوجد} \int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$$

أن $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ إذن $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ وبالتالي

$$3x + 5 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

وإذا وضعنا $x = -1$ نجد $2 = 4A$ ومنه $A = 1/2$. وإذا وضعنا $x = 1$ نجد $8 = 2C$ ومنه $C = 4$

ولتعيين الثوابت الأخرى استخدم أية قيمة أخرى لـ x ، مثلاً $x = 0$ فنجد $5 = A - B + C$ ومنه $B = -1/2$ إذن :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

$$٤- \text{أوجد} \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} dx$$

إن دالة التكامل كسر غير حقيقي . بالتقسيم نجد أن

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

$$\text{لنكتب} \quad \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad \text{إذن}$$

$$x + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

لنضع $x = 0$ فنجد $1 = -B$ ومنه $B = -1$. ثم لنضع $x = 1$ فنجد $2 = C$ ، أما إذا وضعنا $x = 2$

فإننا نجد $3 = 2A + B + 4C$ ومنه $A = -2$ ، وهكذا يكون :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} dx &= \int x dx + 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + C = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

$$٥- \text{أوجد} \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx$$

إن $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$. لنكتب $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$. إذن :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 2 &= (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+C)x^2 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D) \end{aligned}$$

وبالتالى $A = 0, B = 1, C = 1, D = 0$. نجد أن $A + C = 1, B + D = 1, 2A + C = 1, 2B + D = 2$.

إذن

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x dx}{x^2 + 2} = \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C$$

٦- حل المعادلة $\int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \int k dt$ التى ترد فى الكيمياء الفيزيائية.

$$\text{نكتب } \frac{x^2}{a^4 - x^4} = \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x} + \frac{Cx + D}{a^2 + x^2} \text{ إذن}$$

$$x^2 = A(a + x)(a^2 + x^2) + B(a - x)(a^2 + x^2) + (Cx + D)(a - x)(a + x)$$

إذا وضعنا $x = a$ نجد $a^2 = 4Aa^3$ ومنه $A = \frac{1}{4}a$ وإذا وضعنا $x = -a$ نجد $a^2 = 4Ba^3$ ومنه $B = \frac{1}{4}a$ وإذا وضعنا $x = 0$ نجد $0 = Aa^3 + Ba^3 + Da^2 = a^2/2 + Da^2$ ومنه $D = -1/2$ أما إذا وضعنا $x = 2a$ فإننا نجد $4a^2 = 15Aa^3 - 5Ba^3 - 6Ca^3 - 3Da^2$ ومنه $C = 0$

$$\text{إذن: } \int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \int \frac{dx}{a - x} + \frac{1}{4a} \int \frac{dx}{a + x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

$$= -\frac{1}{4a} \ln|a - x| + \frac{1}{4a} \ln|a + x| - \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\text{ومن } \int k dt = kt = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| - \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\text{٧- أوجد } \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx.$$

$$\text{نكتب } \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3} \text{ إذن:}$$

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 &= (Ax + B)(x^2 + 2)^2 + (Cx + D)(x^2 + 2) + Ex + F \\ &= Ax^5 + Bx^4 + (4A + C)x^3 + (4B + D)x^2 \\ &\quad + (4A + 2C + E)x + (4B + 2D + F) \end{aligned}$$

ومن هنا نجد $A = 1, B = -1, C = 0, D = 0, E = 4, F = 0$. وهكذا فإن التكامل يساوى :

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 2} dx + 4 \int \frac{x dx}{(x^2 + 2)^3} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2 + 2)^2} + C$$

$$\text{٨- أوجد } \int \frac{2x^3 + 3}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

$$\text{نكتب } \frac{2x^3 + 3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \text{ إذن:}$$

$$2x^3 + 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

ومنها نجد $A=0, B=2, A+C=0, B+D=3$ أى $A=0, B=2, C=0, D=1$ وممكننا يكون :

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

لحساب التكامل الثانى فى الطرف الأيمن نضع $x = \tan z$ فنجد

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z + C$$

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx = 2 \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C = \frac{5}{2} \arctan x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C$$
 ومنه

مسائل إضافية

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx = x + \ln |(x+2)(x-4)^2| + C - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C - ٩$$

$$\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x} dx = \ln \left| \frac{x^{1/3}(x+2)^{2/3}}{x-1} \right| + C - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^3+7x+6} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + C - ١٠$$

$$\int \frac{x dx}{(x-2)^2} = \ln |x-2| - \frac{2}{x-2} + C - ١١$$

$$\int \frac{x dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5} \ln |(x+1)(x-4)^2| + C - ١١$$

$$\int \frac{x^4}{(1-x)^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^2 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C - ١٥$$

$$\int \frac{x^2+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} dx = \ln \sqrt{x^2+3} + \arctan x + C - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x} = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C - ١٦$$

$$\int \frac{x^4-2x^2+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}} \right| + C - ١٨$$

$$\int \frac{2x^2 dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C - ١٩$$

$$\int \frac{2x^2+x^2+4}{(x^2+4)^2} dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2+4} + C - ٢٠$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{(x^2+1)^2} dx = \ln \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} \right) + C - ٢١$$

$$\int \frac{x^4+8x^2-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^2+1)} dx = \ln \left| \frac{x^2-x^2+x}{(x+1)^2} \right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C - ٢٢$$

$$\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)} dx = \ln \sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C - ٢٣$$

$$\int \frac{x^6+7x^5+15x^4+32x^3+23x^2+25x-3}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln \frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C - ٢٤$$

$$(e^x = u \text{ ضع}) \int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9} \ln \left| \frac{e^x-3}{e^x} \right| + C - ٢٥$$

$$(\cos x = u \text{ ضع}) \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1+\cos^2 x)} = \ln \left| \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x} \right| + C - ٢٦$$

$$\int \frac{(2+\tan^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta}{1+\tan^2 \theta} = \ln |1+\tan \theta| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \theta - 1}{\sqrt{3}} + C - ٢٧$$

الفصل الثالث

تعويضات متنوعة

إذا كانت دالة التكامل جذرية باستثناء جذر من الشكل :

$$1 - \sqrt[n]{au + b}, \quad \text{فإن التعويض } au + b = z^n \text{ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية.}$$

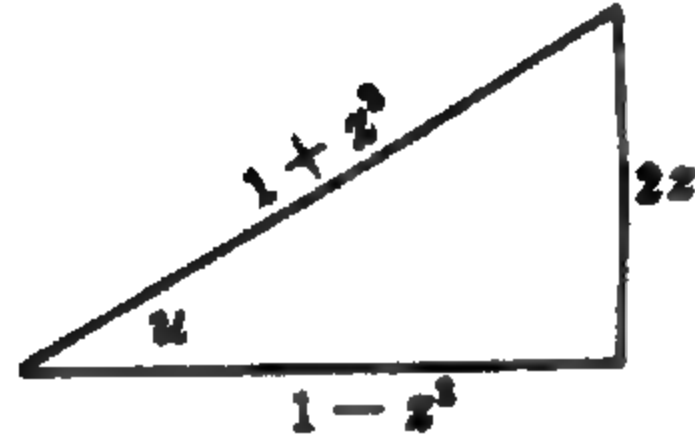
$$2 - \sqrt{q + pu + u^2}, \quad \text{فإن التعويض } q + pu + u^2 = (z - u)^2 \text{ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية.}$$

$$3 - \sqrt{q + pu - u^2} = \sqrt{(\alpha + u)(\beta - u)}, \quad \text{فإن التعويض } q + pu - u^2 = (\alpha + u)^2 z^2 \text{ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية.}$$

$$q + pu - u^2 = (\beta - u)^2 z^2$$

انظر المسائل ١ - ٥

التعويض $u = 2 \arctan z$ يحول أى دالة جذرية في $\sin u$ و $\cos u$ إلى دالة جذرية في z لأن :



$$\sin u = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{and} \quad du = \frac{2dz}{1+z^2}$$

نحصل على العلاقة الأولى والثانية من الشكل المرافق ١ - ٣٠ أما العلاقة الثالثة فنحصل عليها باشتقاق .

شكل ٣٠ - ١

$$u = 2 \arctan z$$

وبعد إجراء التكامل نعوض بـ $z = \tan^{1/2} u$ للمودة إلى المتغير الأصلي .

انظر المسائل ٦ - ١٠

وهناك تعويضات أخرى مجدية يوحى بها غالباً شكل دالة التكامل

انظر المسائل ١١ - ١٢

مسائل محلولة

$$1 - \text{أوجد } \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}. \text{ لنضع } 1-x = z^2, \text{ إذن } dx = -2z dz, \text{ ومنه } x = 1-z^2,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2z dz}{(1-z^2)z} = -2 \int \frac{dz}{1-z^2} = -\ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \right| + C$$

$$2 - \text{أوجد } \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}. \text{ لنضع } x+2 = z^2, \text{ إذن } dx = 2z dz, \text{ ومنه } x = z^2-2,$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2z dz}{z(z^2-4)} = 2 \int \frac{dz}{z^2-4} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2} \right| + C$$

٣ - أوجد $\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}}$. لنضع $x = z^4$ إذن $dx = 4z^3 dz$ ومنه :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}} &= \int \frac{4z^3 dz}{z^2 - z} = 4 \int \frac{z^2}{z-1} dz = 4 \int \left(z + 1 + \frac{1}{z-1} \right) dz \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} z^2 + z + \ln |z-1| \right) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln (\sqrt[4]{x}-1)^4 + C \end{aligned}$$

٤ - أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$. لنضع $x^2+x+2 = (z-x)^2$ إذن :

ومنه $x = \frac{z^2-2}{1+2z}$, $dx = \frac{2(z^2+z+2) dz}{(1+2z)^2}$, $\sqrt{x^2+x+2} = \frac{z^2+z+2}{1+2z}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} &= \int \frac{\frac{2(z^2+z+2)}{(1+2z)^2}}{\frac{z^2-2}{1+2z} \cdot \frac{z^2+z+2}{1+2z}} dz = 2 \int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+x+2} + x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2} + x + \sqrt{2}} \right| + C \end{aligned}$$

٥ - أوجد $\int \frac{x dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$. لنضع $5-4x-x^2 = (5+x)(1-x) = (1-x)^2 z^2$ إذن :

ومنه $x = \frac{z^2-5}{1+z^2}$, $dx = \frac{12z dz}{(1+z^2)^2}$, $\sqrt{5-4x-x^2} = (1-x)z = \frac{6z}{1+z^2}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{z^2-5}{1+z^2} \cdot \frac{12z}{(1+z^2)^2}}{\frac{216z^3}{(1+z^2)^3}} dz = \frac{1}{18} \int \left(1 - \frac{5}{z^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{18} \left(z + \frac{5}{z} \right) + C = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z(1+z)} = \ln |z| - \ln |1+z| + C \\ &= \ln \left| \frac{z}{1+z} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{1}{2}x}{1 + \tan \frac{1}{2}x} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3-2\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{3 - 2\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{1+5z^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan z\sqrt{5} + C \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan (\sqrt{5} \tan \frac{1}{2}x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1+z^2}{1-z^2} \cdot \frac{2 dz}{1+z^2} = 2 \int \frac{dz}{1-z^2} = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan \frac{1}{2}x} \right| + C \\ &= \ln |\tan (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{2 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{z}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{1}{2}x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+4\sin x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{5 + 4\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{5+8z+5z^2} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}} \\ &= \frac{2}{3} \arctan \frac{z+4/5}{3/5} + C = \frac{2}{3} \arctan \frac{5 \tan \frac{1}{2}x + 4}{3} + C \end{aligned}$$

١١ - استخدم التعويض $1 - x^3 = z^2$ لتحصل على $\int x^3 \sqrt{1 - x^3} dx$. أن $x^3 = 1 - z^2$ ومنه $3x^2 dx = -2z dz$ وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{1 - x^3} dx &= \int x^3 \sqrt{1 - x^3} \cdot x^2 dx = \int (1 - z^2) z (-\frac{2}{3} z dz) = -\frac{2}{3} \int (1 - z^2) z^2 dz \\ &= -\frac{2}{3} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right) + C = -\frac{2}{45} (1 - x^3)^{3/2} (2 + 3x^3) + C \end{aligned}$$

١٢ - استخدم $x = \frac{1}{z}$ لتحصل على $\int \frac{\sqrt{x - x^3}}{x^4} dx$. أن $\sqrt{x - x^3} = \frac{1}{z} \sqrt{z - 1}$ ، ومنه $dx = -\frac{dz}{z^2}$ ،

$$\int \frac{\sqrt{x - x^3}}{x^4} dx = \int \frac{\frac{1}{z} \sqrt{z - 1} \left(-\frac{dz}{z^2} \right)}{1/z^4} = -\int z \sqrt{z - 1} dz$$

لنضع $z - 1 = s^2$ إذن :

$$\begin{aligned} \int z \sqrt{z - 1} dz &= -\int (s^2 + 1) s \cdot 2s ds = -2 \left(\frac{s^5}{5} + \frac{s^3}{3} \right) + C \\ &= -2 \left(\frac{(z - 1)^{5/2}}{5} + \frac{(z - 1)^{3/2}}{3} \right) + C = -2 \left(\frac{(1 - x)^{5/2}}{5x^{5/2}} + \frac{(1 - x)^{3/2}}{3x^{3/2}} \right) + C \end{aligned}$$

مسائل إضافية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C \quad ١٤ \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C \quad ١٣$$

$$\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} - 6 \ln(3 + \sqrt{x+2}) + C \quad ١٥$$

$$\int \frac{1 - \sqrt{3x+2}}{1 + \sqrt{3x+2}} dx = -x + \frac{4}{3} \left\{ \sqrt{3x+2} - \ln(1 + \sqrt{3x+2}) \right\} + C \quad ١٦$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \ln |2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x - 1| + C \quad ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}} = 2 \arctan(\sqrt{x^2 + x - 1} + x) + C \quad ١٨$$

$$\int \frac{\sqrt{4x - x^2}}{x^3} dx = -\frac{(4x - x^2)^{3/2}}{6x^3} + C \quad ٢٠ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{6 + x - x^2}} = \arcsin \frac{2x - 1}{5} + C \quad ١٩$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^{1/2} + (x+1)^{1/4}} = 2(x+1)^{1/2} - 4(x+1)^{1/4} + 4 \ln(1 + (x+1)^{1/4}) + C \quad ٢١$$

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{1}{2}x + 1}{\sqrt{3}} + C \quad ٢٢$$

$$\int \frac{dx}{1 - 2 \sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\tan \frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}} \right| + C \quad ٢٣$$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1} = \ln |\tan \frac{1}{2}x - 1| + C \quad ٢٥$$

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3 \tan \frac{1}{2}x + 1}{\tan \frac{1}{2}x + 3} \right| + C \quad ٢٤$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan^2 \frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan^2 \frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}} \right| + C \quad ٢٧$$

$$\int \frac{dx}{5 + 3 \sin x} = \frac{1}{2} \arctan \frac{5 \tan \frac{1}{2}x + 3}{4} + C \quad ٢٦$$

$$\int \frac{dx}{2 - \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan \frac{1}{2}x) + C \quad ٢٩$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \ln |1 + \tan \frac{1}{2}x| + C \quad ٢٨$$

$$\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C \quad ٣٠$$

$$\text{ضع } x = 1/z \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = -\arcsin \frac{1-x}{2x} + C \quad ٢١$$

$$\text{ضع } e^x + 1 = z \quad \int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1} dx = e^x - 3 \ln(e^x+1) + C \quad ٢٢$$

$$\text{ضع } \cos x = z \quad \int \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x} dx = \cos x + \ln(1-\cos x) + C \quad ٢٣$$

$$\text{ضع } x = 2/z \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C \quad ٢٤$$

$$\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8} \arctan \frac{2}{x} + C \quad ٢٥$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C \quad ٢٦$$

$$\int \frac{dx}{3(1-x^2) - (5+4x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + C \quad ٢٧$$

الفصل الحادي والثلاثون

تكامل الدوال الزائدية

قواعد التكامل :

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u^2 < a^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u^2 > a^2$$

مسائل محلولة

$$\int \operatorname{sech}^2(2x-1) \, dx = \frac{1}{2} \tanh(2x-1) + C \quad \text{— ٢} \quad \int \sinh \frac{1}{2}x \, dx = 2 \cosh \frac{1}{2}x + C \quad \text{— ١}$$

$$\int \operatorname{csch} 3x \coth 3x \, dx = -\frac{1}{3} \operatorname{csch} 3x + C \quad \text{— ٤} \quad \int \cosh 2x \, dx = \frac{1}{2} \sinh 2x + C \quad \text{— ٢}$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{1}{\cosh x} \, dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} \, dx = \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} \, dx = \arctan(\sinh x) + C \quad \text{— ٥}$$

$$\int \sinh^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2}x + C \quad \text{— ٦}$$

$$\int \tanh^2 2x \, dx = \int (1 - \operatorname{sech}^2 2x) \, dx = x - \frac{1}{2} \tanh 2x + C \quad \text{— ٧}$$

$$\int \cosh^3 \frac{1}{2}x \, dx = \int (1 + \sinh^2 \frac{1}{2}x) \cosh \frac{1}{2}x \, dx = 2 \sinh \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \sinh^3 \frac{1}{2}x + C \quad \text{— ٨}$$

$$\int \operatorname{sech}^4 x \, dx = \int (1 - \tanh^2 x) \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x - \frac{1}{3} \tanh^3 x + C \quad \text{— ٩}$$

$$\int e^x \cosh x \, dx = \int e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 1) \, dx = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x + C \quad \text{— ١٠}$$

$$\int x \sinh x \, dx = \int x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x e^x \, dx - \frac{1}{2} \int x e^{-x} \, dx \quad \text{— ١١}$$

$$= \frac{1}{2} (x e^x - e^x) - \frac{1}{2} (-x e^{-x} - e^{-x}) + C = x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$$

$$= x \cosh x - \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 25} = -\frac{1}{15} \coth^{-1} \frac{3x}{5} + C - ١٣ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{2} \cosh^{-1} \frac{2x}{3} + C - ١٤$$

١٤ - أوجد $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$. نضع $x = 2 \sinh z$. إذن $\sqrt{x^2 + 4} = 2 \cosh z$, $dx = 2 \cosh z dz$, ومنه :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 4} dx &= 4 \int \cosh^2 z dz = 2 \int (\cosh 2z + 1) dz = \sinh 2z + 2z + C \\ &= 2 \sinh z \cosh z + 2z + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 4} + 2 \sinh^{-1} \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

١٥ - أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. نضع $x = \operatorname{sech} z$. إذن $1-x^2 = \tanh^2 z$, $dx = -\operatorname{sech} z \tanh z dz$, ومنه :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\operatorname{sech} z \tanh z}{\operatorname{sech} z \tanh z} dz = -\int dz = -z + C = -\operatorname{sech}^{-1} x + C$$

مسائل إضافية

$$\int \cosh^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} (\sinh x + x) + C - ٢٢ \quad \int \sinh 3x dx = \frac{1}{3} \cosh 3x + C - ١٦$$

$$\int \coth^2 3x dx = x - \frac{1}{3} \coth 3x + C - ٢٣ \quad \int \cosh \frac{1}{4} x dx = 4 \sinh \frac{1}{4} x + C - ١٧$$

$$\int \sinh^3 x dx = \frac{1}{3} \cosh^3 x - \cosh x + C - ٢٤ \quad \int \coth \frac{3}{2} x dx = \frac{2}{3} \ln |\sinh \frac{3}{2} x| + C - ١٨$$

$$\int e^x \sinh x dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x + C - ٢٥ \quad \int \operatorname{csch}^2 (1+3x) dx = -\frac{1}{3} \coth (1+3x) + C - ١٩$$

$$\int e^{2x} \cosh x dx = \frac{1}{6} e^{3x} + \frac{1}{2} e^x + C - ٢٦ \quad \int \operatorname{sech} 2x \tanh 2x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sech} 2x + C - ٢٠$$

$$\int x \cosh x dx = x \sinh x - \cosh x + C - ٢٧ \quad \int \operatorname{csch} x dx = \ln \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} + C - ٢١$$

$$\int x^2 \sinh x dx = (x^2 + 2) \cosh x - 2x \sinh x + C - ٢٨$$

$$\int \sinh^3 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{5} \cosh^5 x - \frac{1}{3} \cosh^3 x + C - ٢٩$$

$$\int \sinh x \ln \cosh^2 x dx = \cosh x (\ln \cosh^2 x - 2) + C - ٣٠$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 17}} = \sinh^{-1} \frac{x-1}{4} + C - ٢٦ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \sinh^{-1} \frac{x}{3} + C - ٢١$$

$$\int \frac{dx}{4x^3 + 12x + 5} = -\frac{1}{4} \coth^{-1} \left(x + \frac{3}{2} \right) + C - ٢٧ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \cosh^{-1} \frac{x}{5} + C - ٢٢$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx = \sinh^{-1} \frac{1}{2} x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + C - ٢٨ \quad \int \frac{dx}{4 - 9x^2} = \frac{1}{6} \tanh^{-1} \frac{3}{2} x + C - ٢٣$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx = \sinh^{-1} x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C - ٢٩ \quad \int \frac{dx}{16x^2 - 9} = -\frac{1}{12} \coth^{-1} \frac{4}{3} x + C - ٢٤$$

$$\int \sqrt{x^2 - 9} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{3} + C - ٣٥$$

الفصل الثاني والثلاثون

تطبيقات على التكامل غير المحدد

إذا كانت المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى مفروض فإن ميله m عند أية نقطة منه $P(x, y)$ يعطى بـ $m = f'(x)$ وبالعكس إذا كان ميل المنحنى عند نقطة منه $P(x, y)$ يعطى بـ $m = dy/dx = f'(x)$ فإننا نحصل بالتكامل على مجموعة منحنيات $y = f(x) + C$. ولكي نحصل على منحنى خاص من هذه المجموعة ينبغي أن نعين أو أن نعطي قيمة معينة لـ C ويمكن أن يتم هذا الأمر بأن نشترط في المنحنى أن يمر بنقطة مفروضة.

انظر المسائل ١ - ٤

ان المعادلة : $s = f(t)$ ، حيث s بعد جسم ما عند اللحظة t عن نقطة ثابتة من مساره (المستقيم) ،
تعبّر حركة الجسم تماماً وتعطى سرعة الجسم وتسارعه عند اللحظة t بـ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) , v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

وبالعكس إذا كانت السرعة (التسارع) معروفة عند الزمن t وإذا كان الموضع (الموضع والسرعة) معروفا عند لحظة مفروضة ، عادة هي اللحظة $t = 0$ فن الممكن عندئذ الحصول على معادلة الحركة .

انظر المسائل ٧ - ١٠

مسائل محلولة

١ - أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أية نقطة يساوى ضعفى الاعداد السينى للنقطة بإشارة مخالفة . أوجد ذلك المنحنى من المجموعة الذي يمر بالنقطة (1,1) .

بما أنه من المفروض أن $dy/dx = -2x$ فإن $dy = -2x dx$ ومنه $\int dy = \int -2x dx$ وبالتالي $y = -x^2 + C$. وهذه معادلة مجموعة من القطاعات المكافئة .

وإذا وضعنا $x=1, y=1$ في معادلة المجموعة نجد أن : $1 = -1 + C$ ومنه $C = 2$.

ومعادلة منحنى المجموعة الذي يمر بالنقطة (1,1) هي $y = -x^2 + 2$.

٢ - أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أية نقطة $P(x, y)$ منها هو $m = 3x^2y$ ومعادلة منحنى المجموعة الذي يمر بالنقطة (0,8)

$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y$ أو $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$ وبالتالي $y = x^3 + C = x^3 + \ln c$ ومنه $y = ce^{x^3}$.

وعندما يكون $x = 0$ و $y = 8$ نجد $8 = Ce^0 = C$. ومعادلة المنحنى المطلوب هي : $y = 8e^{x^3}$.

٣ - لنفرض أن $y'' = x^2 - 1$ عند كل نقطة من منحنى مفروض . أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (1,1) والذي يمر هناك المستقيم : $x + 12y = 13$.

إن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^3 - 1$ إذن $\int \frac{d}{dx}(y') dx = \int (x^3 - 1) dx$ ومنه $y' = \frac{x^4}{4} - x + C_1$.
وحيث أن الميل y' للمنحنى عند $(1,1)$ يساوى $-1/12$ وهو ميل المستقيم ، فإن $C_1 = \frac{7}{12}$ ،
ومنه $C_1 = \frac{7}{12}$ وبالتالي :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^4 - x + \frac{7}{12}, \quad \int dy = \int \left(\frac{1}{4}x^4 - x + \frac{7}{12}\right) dx, \quad y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C_2$$

ويكون عند النقطة $(1,1)$ ، $1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$ ، ومنه $C_2 = 5/6$ والمعادلة المطلوبة هي :

$$y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6}.$$

٤ - إن مجموعة المسارات المتعامدة لمجموعة معينة من المنحنيات هي مجموعة أخرى من المنحنيات يقطع كل منها كل منحنى من منحنيات المجموعة المفروضة بزاوية قائمة . أوجد معادلات المسارات المتعامدة لمجموعة القطاعات الزائدة $x^2 - y^2 = c$.
إن ميل القاطع الزائد عند أية نقطة $P(x, y)$ من يعطى بـ $m_1 = x/y$ وميل المسار المتعامد المار بـ P هو $m_2 = dy/dx = -y/x$. إذن :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{ومنه } |y| = -\ln|x| + \ln C' \quad \text{وبالتالى} \quad |xy| = C'$$

والمعادلة المطلوبة هي $xy = \pm C'$ ، اختصارا ، $xy = C$.

٥ - لنفرض أن كمية معينة q تزايد بمعدل متناسب مع الكمية نفسها . فإذا كانت $q = 25$ عندما $t = 0$ و $q = 75$ عندما $t = 2$ فما هي q عندما $t = 6$.

$$\text{بما أن } dq/dt = kq \text{ فإن } dq/q = k dt \text{ ومنه } \ln q = kt + \ln c \text{ أو } q = ce^{kt}.$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } q = 25 = ce^0 = c; \text{ وبالتالى } q = 25e^{kt}.$$

$$\text{وعندما } t = 2 \text{ يكون } q = 25e^{2k} = 75; \text{ ومنه } e^{2k} = 3 = e^{1.10} \text{ و } k = .55.$$

$$\text{وعندما } t = 6 \text{ يكون } q = 25e^{3k} = 25e^{1.65} = 25(e^{1.1})^3 = 25(27) = 675.$$

٦ - تتحول مادة إلى أخرى بمعدل يتناسب مع الكمية غير المحولة . فإذا كانت الكمية الأصلية 50 وأصبحت 25 عندما $t = 3$ فتي يبقى 1/10 من المادة غير محول .
لنفرض أن q تمثل الكمية المحولة في اللحظة t . عندئذ :

$$\ln(50 - q) = -kt + \ln c, \quad \text{and} \quad 50 - q = ce^{-kt}, \quad \frac{dq}{dt} = k(50 - q), \quad \frac{dq}{50 - q} = k dt,$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } q = 0 \text{ ومنه } c = 50 \text{ وبالتالى } 50 - q = 50e^{-kt}.$$

$$\text{وعندما } t = 3 \text{ يكون } 50 - q = 25 = 50e^{-3k} \text{ وبالتالى } e^{-3k} = .5 = e^{-1.10} \text{ ومنه } k = .23.$$

$$\text{وعندما تكون الكمية غير المحولة تساوى 5 يكون } 50e^{-kt} = 5; \text{ ومنه } e^{-kt} = .1 = e^{-1.10} \text{ وبالتالى } t = 10.$$

٧ - تتدحرج كرة على مستوى بسرعة ابتدائية 8 ms^{-1} . فإذا كانت السرعة تتناقص بسبب الاحتكاك ، بمعدل 2 ms^{-1} ، فما هي المسافة التي تقطعها الكرة ؟

$$\text{إن } \frac{dv}{dt} = -2 \text{ ومنه } v = -2t + C_1. \text{ وبما أن } v = 8 \text{ عندما } t = 0 \text{ إذن } C_1 = 8 \text{ ومنه } v = -2t + 8.$$

$$\text{ومن } v = ds/dt = -2t + 8 \text{ نجد } s = -t^2 + 8t + C_2. \text{ وبما أن } s = 0 \text{ عندما } t = 0 \text{ إذن } C_2 = 0$$

ومنها $s = -t^2 + 8t$.

$$\text{وعندما } t = 4 \text{ يكون } v = 0 \text{ أى أن الكرة تتدحرج على المرج مدة أربع ثوان قبل أن تقف .}$$

$$\text{وعندما } t = 4 \text{ يكون } s = -16 + 32 = 16 \text{ m.}$$

٨ - رمى حجر من منطاد ساكن يملو عن الأرض 3000 m لأسفل مباشرة بسرعة 15 ms^{-1} . أوجد موضع الحجر وسرعته بعد 20 seconds.

نفرض أن الاتجاه الموجب لأعلى. وعندما يترك الحجر المنطاد يكون :

$$v = -9.8t + C_1 \quad \text{ومنه} \quad a = dv/dt = -9.8 \text{ ms}^{-2}$$

وعندما $t = 0$ يكون $v = -15$ وبالتالي $C_1 = -15$. إذن $v = ds/dt = -9.8t - 15$

$$\text{ومنه} \quad s = -4.9t^2 - 15t + C_2$$

وعندما $t = 0$ يكون $s = 3000$ ومنه $C_2 = 3000$ وبالتالي $s = -4.9t^2 - 15t + 3000$.

وعندما $t = 20$ يكون $s = -4.9(20)^2 - 15(20) + 3000 = 750$ و $v = -9.8(20) - 15 = -211$.

إذن بعد 20 sec يكون الحجر على ارتفاع 750 m عن سطح الأرض وتكون سرعته 211 ms^{-1} .

٩ - تركزت كرة تسقط من منطاد يملو 196 m عن الأرض. فإذا كان المنطاد يرتفع لأعلى بمعدل 14.7 ms^{-1} فأوجد :

(أ) أقصى ارتفاع عن الأرض تبلغه الكرة.

(ب) الوقت الذي تقضيه الكرة في الجو.

(ج) سرعة الكرة عندما تصطدم بالأرض.

نفرض أن الاتجاه الموجب لأعلى. عندئذ :

$$v = -9.8t + C_1 \quad \text{ومنه} \quad a = dv/dt = -9.8 \text{ ms}^{-2}$$

وعندما $t = 0$ يكون $v = 14.7$ ومنه $C_1 = 14.7$ إذن $v = ds/dt = -9.8t + 14.7$ وبالتالي :

$$s = -4.9t^2 + 14.7t + C_2$$

وعندما $t = 0$ يكون $s = 196$ ومنه $C_2 = 196$ وبالتالي $s = -4.9t^2 + 14.7t + 196$.

(أ) عندما $t = 3/2$ يكون $v = 0$ ومنه $s = -4.9(3/2)^2 + 14.7(3/2) + 196 = 207$ وأقصى ارتفاع عن

الأرض تبلغه الكرة هو 207 m.

(ب) عندما $s = 0$ يكون $-4.9t^2 + 14.7t + 196 = 0$ ومنه $t = -5.8$ والكرة تبقى في الجو 8 sec.

(ج) وعندما $t = 8$ يكون $v = -9.8(8) + 14.7 = -63.7$ والكرة تصطدم بالأرض بسرعة

$$63.7 \text{ ms}^{-1}$$

١٠ - ينسكب ماء بسرعة $0.6\sqrt{2gh} \text{ ms}^{-1}$ من فتحة صغيرة تقع على عمق h m تحت سطح السائل ، حيث

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$. احسب الزمن اللازم لتفريغ خزان اسطوانى قائم إذا كان ارتفاعه 1.225 m ونصف

قطره 0.3 m من خلال فتحة في قاعة نصف قطرها 2.5 cm.

ليكن h هو عمق الماء عند اللحظة t . والماء الذى ينسكب فى زمن dt يكافئ اسطوانة ارتفاعها $v dt$ m ونصف

$$\text{قطرها } 1/80 \text{ m وحجمها } \pi(1/80)^2 \sqrt{2gh} dt \text{ m}^3$$

نفرض $-dh$ m هو مقدار الهبوط المرافق لمستوى سطح الماء. إذن الحجم المرافق الذى يفقده الخزان هو

$$-\pi(0.3)^2 dh \text{ m}^3$$

عندئذ $0.6\pi(1/80)^2 \sqrt{19.6h} dt = -\pi(0.3)^2 dh$ أو $dt = -960 dh / \sqrt{19.6h}$ ، $C = 1920\sqrt{h}/\sqrt{19.6} + 480$ وبالتالي

وعندما $t = 0$ يكون $h = 1.225$ ومنه $C = 1920\sqrt{1.225}/\sqrt{19.6} = 480$ وبالتالي

ويصبح الخزان فارغاً عندما $h = 0$ ومنه $t = 480 \text{ sec} = 8 \text{ mins}$.

مسائل إضافية

١١- أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها معطى فيما يلى ، ثم أوجد معادلة منحنى المجموعة الذى يمر بالنقطة المفروضة :

- (أ) $m = 4x$; (1, 5) (ب) $m = \sqrt{x}$; (9, 18) (ج) $m = (x-1)^2$; (3, 0) (د) $m = 1/x^2$; (1, 2) (هـ) $m = x/y$; (4, 2) (و) $m = x^2/y^2$; (3, 2) (ز) $m = xy/(1+x^2)$; (3, 5) (ح) $m = 2y/x$; (2, 8)

الجواب :

- (أ) $y = 2x^2 + C$; $y = 2x^2 + 3$ (ب) $3y = 2x^{3/2} + C$; $3y = 2x^{3/2}$ (ج) $4y = (x-1)^4 + C$; $4y = (x-1)^4 - 16$ (د) $xy = Cx - 1$; $xy = 3x - 1$ (هـ) $x^2 - y^2 = C$; $x^2 - y^2 = 12$ (و) $3y^4 = 4x^3 + C$; $3y^4 = 4x^3 - 60$ (ز) $y = Cx^2$; $y = 2x^2$ (ح) $y^3 = C(1+x^3)$; $2y^3 = 5(1+x^3)$

١٢- (أ) إذا كان $y'' = 2$ لمنحنى مفروض فأوجد معادله إذا كان هذا المنحنى ماراً بالنقط $P(2, 6)$ وميله عندها مساوى 10 .

ج : $y = x^2 + 6x - 10$

(ب) إذا كان $y'' = 6x - 8$ لمنحنى مفروض ، فأوجد معادله إذا فرضنا أنه يمر بالنقطة $P(1, 0)$ وأن ميله عندها يساوى 4 .

(ج) : $y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$

١٣- يتحرك جسم على خط مستقيم بدأ من نقطة الأصل 0 عند اللحظة $t=0$ بسرعة مفروضة v . أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال الفترة من $t=t_1$ إلى $t=t_2$:

- (أ) $v = 2t - 2$; 0, 5 (ب) $v = 4t + 1$; 0, 4 (ج) $v = 3t^2 + 2t$; 2, 4 (د) $v = \sqrt{t} + 5$; 4, 9 (هـ) $v = t^2 - 3t + 2$; 0, 4 (و) $v = 6t + 3$; 1, 3 (ز) $v = 2t - 2$; 0, 5 (ح) $v = 3t^2 + 2t$; 2, 4 (ط) $v = \sqrt{t} + 5$; 4, 9 (ي) $v = t^2 - 3t + 2$; 0, 4 (ك) $v = 6t + 3$; 1, 3 (ل) $v = 2t - 2$; 0, 5 (م) $v = 4t + 1$; 0, 4 (ن) $v = 3t^2 + 2t$; 2, 4 (س) $v = \sqrt{t} + 5$; 4, 9 (ع) $v = t^2 - 3t + 2$; 0, 4 (ف) $v = 6t + 3$; 1, 3 (ق) $v = 2t - 2$; 0, 5 (ج) : (أ) 36 ، (ب) 30 ، (ج) 68 ، (د) $37 \frac{2}{3}$ ، (هـ) 17 ، (و) $17/3$

١٤- أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي يكون لها تحت العامود عند أية نقطة مساوياً ضمنى الاحداثى السينى للنقطة .

ج : $y^2 = Cx$

١٥- أوجد معادلة مجموعة المسارات المتعامدة لمجموعة القطاعات المكافئة $y^2 = 2x + c$.

ج : $y = Ce^{-x}$

١٦- يتحرك جسم على خط مستقيم بدأ من نقطة الأصل (عند اللحظة $t=0$) بسرعة ابتدائية مفروضة v وتسارع a : أوجد s عند اللحظة t إذا كان :

- (أ) $a = 32$; $v_0 = 2$ (ب) $a = -32$; $v_0 = 96$ (ج) $a = 12t^2 + 6t$; $v_0 = -3$ (د) $a = 1/\sqrt{t}$; $v_0 = 4$ (هـ) $s = 16t^2 + 2t$ (ب) $s = -16t^2 + 96t$ (ج) $s = t^4 + t^3 - 3t$ (د) $s = \frac{4}{3}(t^{3/2} + 3t)$

١٧- تتباطأ سيارة بمعدل 0.025 ms^{-1} . فما هى المسافة التي تقطعها السيارة قبل أن تقف إذا كانت سرعتها الابتدائية 25 kmh^{-1} .

ج : 96.5 m

١٨- قذف جسم رأسياً لأعلى من موضع يعلو 34.3 m عن الأرض بسرعة ابتدائية 29.4 ms^{-1} .

(أ) كم تكون سرعته عندما يكون على ارتفاع 73.5 m عن الأرض ؟

(ب) متى يبلغ أعلى نقطة على مساره ؟

(ج) بأية سرعة يصطدم الجسم بالأرض ؟

ج : (أ) 9.8 ms^{-1} ، (ب) بعد ثلاث ثوان ، (ج) 39.2 ms^{-1} .

١٩- ينزلق قالب من الثلج لأسفل على مستوى بتسارع 1 ms^{-2} . فإذا فرضنا أن طول المستوى 20 m .

وإذا فرضنا أن قالب الثلج يصل نهاية المستوى بعد 5 sec . فما هي السرعة الابتدائية للثلج وما هي سرعته عندما يكون

على بعد 6 m من نهاية المستوى .

ج : 1.5 ms^{-1} ، 5.5 ms^{-1} .

٢٠- ماهو التسارع الثابت المطلوب : (أ) كي يتحرك جسم 25 m في 5 sec .

(ب) كي يتباطأ جسم بدءاً من السرعة 15 ms^{-1} إلى حالة السكون بعد أن يقطع 5 m ؟

ج : (أ) 2 ms^{-2} ، (ب) -22.5 ms^{-2} .

٢١- تتكاثر البكتريا في مزرعة طبقاً للقانون $dN/dt = 0.25 N$ فإذا كان $N = 200$ في البدء فما هي قيمة N

عندما $t = 8$.

ج : 1478.

الفصل الثالث والثلثون

التكامل المحدد

التكامل المحدد : إذا كانت $a \leq x \leq b$ هي الفترة التي فيها الدالة المفروضة $f(x)$ متصلة . نقسم هذه الفترة إلى n فترات

جزئية h_1, h_2, \dots, h_n وذلك بإدخال $n-1$ نقطة $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ حيث $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} < b$ ، ولنرمز لـ a بـ ξ_0 ولـ b بـ ξ_n ولنرمز لطول الفترة الجزئية h_1 بـ $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$ ، ولـ h_2 بـ $\Delta_2 x = \xi_2 - \xi_1$ ، ... ، ولـ h_n بـ $\Delta_n x = \xi_n - \xi_{n-1}$. (هذه الأطوال مسافات موجبة ، وكل واحدة منها موجبة بسبب المتباينة السابقة)



شكل ٣٣ - ١

لنختار على كل فترة جزئية نقطة — x_1 على الفترة الجزئية h_1 و x_2 على h_2 ، ... ، x_n على h_n — ولنشكل المجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = f(x_1) \Delta_1 x + f(x_2) \Delta_2 x + \dots + f(x_n) \Delta_n x \quad (I)$$

إن كل حد هو حاصل ضرب طول فترة جزئية بقيمة الدالة عند النقطة التي اخترناها على تلك الفترة الجزئية . لنرمز بـ λ_n لطول أطول فترة جزئية تظهر في (I) ولنجعل بعد ذلك عدد الفترات الجزئية يزداد إلى ما لا نهاية بحيث $\lambda_n \rightarrow 0$ (إحدى الطرق للوصول إلى هذا الهدف هو تنصيف كل فترة جزئية أصلية . ثم تنصيف كل فترة من هذه الفترات الناتجة ، وهكذا) . عندئذ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x \quad (II)$$

نصل إلى نفس النتيجة مهما كانت طريقة تقسيم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى فترات جزئية شريطة أن يتحقق الشرط $\lambda_n \rightarrow 0$ ومهما كانت الكيفية التي نختار بها x_k في الفترات الجزئية الناتجة .

إن برهان النظرية يخرج عن إطار هذا الكتاب . ولكننا سنرى في المسائل ١ - ٣ كيفية حساب قيم النهاية لبعض الدوال المختارة $f(x)$. علينا أن ندرك ، على كل حال ، أنه من الصعب سلوك هذه الطريقة في حساب قيمة النهاية لأية دالة اختيارية . بالإضافة إلى أنه من الضروري ، كي ننجح في حساب القيمة المذكورة هنا ، أن نتبع علاقة بين أطوال المجالات الجزئية (نعتبر هذه المجالات متساوية في الأطوال) ونتبع أسلوباً معيناً في اختيار النقط على الفترات الجزئية (كأن نختارها مثلاً نقطة النهاية اليسرى أو نقطة النهاية اليمنى أو نقطة منتصف هذه الفترات الجزئية) .

ولقد تم الاتفاق على أن يكتب :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$$

حيث نقرأ الرمز $\int_a^b f(x) dx$ ، التكامل المحدد لـ $f(x)$ ، بالنسبة لـ x من $x = a$ إلى $x = b$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة التكامل . ونسمى a و b على الترتيب الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل .

أنظر المسائل ١ - ٣

خواص التكاملات المحددة : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على فترة التكامل $a \leq x \leq b$ فإن :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad -١$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad -٢$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx , \quad -٣ \quad \text{مهما كان الثابت}$$

لبرهان هذه الخواص أنظر المسألة ٤

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad -٤$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx , \quad -٥ \quad \text{عندما } a < c < b$$

٦ - نظرية القيمة المتوسطة الأولى :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(x_0) \quad \text{لقبلة واحدة على الأقل } x = x_0 \text{ بين } a \text{ و } b . \text{ لبرهان أنظر المسألة ٥}$$

$$\text{٧ - إذا كان } F(u) = \int_a^u f(x) dx , \text{ فإن } \frac{d}{du} F(u) = f(u) . \text{ لبرهان أنظر المسألة ٦}$$

النظرية الأساسية في الحساب التكاملي : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكانت $F(x)$

تكاملًا غير محدد لـ $f(x)$. فتدث يكون :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

لبرهان أنظر المسألة ٧

مثال ١ :

$$(١) \text{ لنأخذ } f(x) = c , \text{ حيث } c \text{ ثابت} , \text{ ولنأخذ } F(x) = cx , \text{ عندئذ } \int_a^b c dx = cx \Big|_a^b = c(b-a) .$$

$$(ب) \text{ لنأخذ } f(x) = x \text{ و } F(x) = \frac{1}{2}x^2 , \text{ عندئذ } \int_0^5 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2} .$$

$$(ج) \text{ لنأخذ } f(x) = x^3 \text{ و } F(x) = \frac{1}{4}x^4 , \text{ عندئذ } \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20 .$$

قارن هذه النتائج بتلك التي سنحصل عليها في المسائل ١ - ٣ . ويمكن القارئ أن يبرهن أنه يمكن استخدام أى تكامل غير

محسود لـ $f(x)$ وذلك بتحليل (ج) أى $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

أنظر المسائل ٨ - ٢٠

نظرية بليس : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين في الفترة $a \leq x \leq b$ ، وإذا جزأنا الفترة إلى فترات جزئية كما فعلنا سابقاً واخترنا نقطتين على كل فترة جزئية (مثل x_k و x'_k في الفترة الجزئية k فيكون عندئذ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot g(x'_k) \Delta_k x = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

نلاحظ أولاً أن النظرية صحيحة إذا تطابقت النقط x_k مع x'_k وأن قيمة النظرية تكن في أن النتيجة تبقى كما هي سواء أكانت نقطتا كل زوج مختلفتين أو متطابقتين ولعل شعورنا الحدسي بصحة هذه النظرية ينتج من كتابة :

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot g(x'_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot g(x_k) \Delta_k x + \sum_{k=1}^n f(x_k) \{g(x'_k) - g(x_k)\} \Delta_k x$$

ويلاحظ أنه عندما $n \rightarrow \infty$ (أى $\Delta_k x \rightarrow 0$) فإن x'_k و x_k تقتربان من التطابق ، وحيث أن $g(x)$ متصلة فإن $g(x'_k) - g(x_k)$ يؤول إلى الصفر

مسائل محلولة

احسب قيمة التكامل المحدد في كل من المسائل ١ - ٣ وذلك عن طريق تشكيل S_n ثم حساب النهاية عندما $n \rightarrow +\infty$ ،

$$1 - \int_a^b c dx = c(b-a), \text{ حيث } c \text{ ثابت.}$$

نقسم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها $\Delta x = (b-a)/n$. بما أن دالة التكامل $f(x) = c$ فإن $f(x_k) = c$ مهما كان اختيارنا للنقطة x_k على الفترة الجزئية k وأن :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n c(\Delta x) = (c+c+\dots+c)(\Delta x) = nc \cdot \Delta x = nc \frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

$$\int_a^b c dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c(b-a) = c(b-a) \quad \text{وبالتالى فإن :}$$

$$2 - \int_1^5 x dx = 25/2.$$



شكل ٣٣ - ٢

نقسم الفترة $0 \leq x \leq 5$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها $\Delta x = 5/n$. ولنختار النقطة x_k بحيث تكون نقطة نهاية الطرف الأيمن لهذه الفترات الجزئية أى أن $x_1 = \Delta x$ ، $x_2 = 2\Delta x$ ، \dots ، $x_n = n\Delta x$ فيكون عندئذ :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n (k \cdot \Delta x) \Delta x = (1+2+\dots+n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^5 x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2} \quad \text{ومنـه :}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = 20. \quad - ٣$$

نقسم الفترة $1 \leq x \leq 3$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها $\Delta x = 2/n$.

I - لنختار النقط x_k بحيث تكون نقطة نهاية الطرف الأيسر لهذه الفترات الجزئية كما في الشكل ٣-٣٣ أي أن :

$$x_1 = 1, x_2 = 1 + \Delta x, \dots, x_n = 1 + (n-1)\Delta x.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x \quad \text{فيكون عندئذ :}$$

$$= [1 + (1 + \Delta x)^2 + (1 + 2\Delta x)^2 + \dots + \{1 + (n-1)\Delta x\}^2] \Delta x$$

$$= [n + 3\{1 + 2 + \dots + (n-1)\} \Delta x + 3\{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} (\Delta x)^2 + \{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} (\Delta x)^2] \Delta x$$

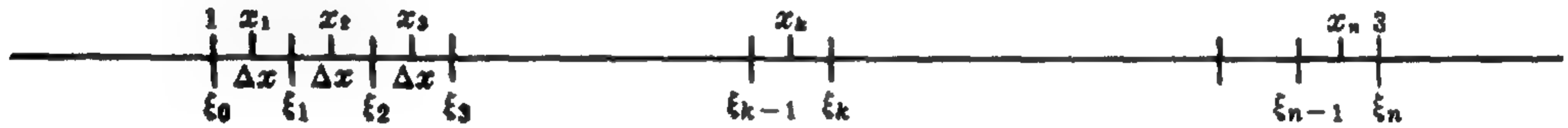
$$= \left[n + 3 \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \left(\frac{2}{n}\right) + 3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2 n^2}{(1 \cdot 2)^2} \left(\frac{2}{n}\right)^3 \right] \frac{2}{n}$$

$$= 2 + \left(6 - \frac{6}{n}\right) + \left(8 - \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}\right) = 20 \quad \text{ومن ثم :}$$



شكل ٣-٣٣



شكل ٤-٣٣

II - أما إذا اخترنا النقط x_k في منتصفات الفترات الجزئية كما في الشكل ٤-٣٣ أي أن

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}\Delta x, x_2 = 1 + \frac{3}{2}\Delta x, \dots, x_n = 1 + \frac{2n-1}{2}\Delta x.$$

$$S_n = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\Delta x\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\Delta x\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{2n-1}{2}\Delta x\right)^2 \right] \Delta x$$

$$= \left[\left\{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)\Delta x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right\} + \left\{1 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\Delta x + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right\} + \dots + \left\{1 + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Delta x + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right\} \right] \Delta x$$

$$= n\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}(4n^3 - n)\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{8}(2n^4 - n^2)\left(\frac{2}{n}\right)^4$$

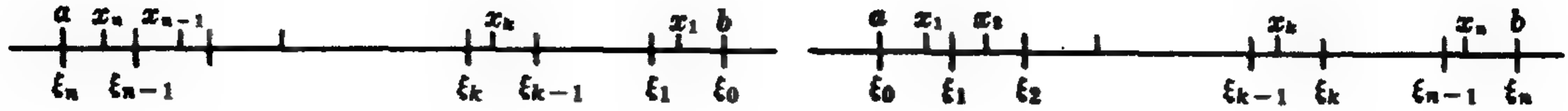
$$= 2 + 6 + \left(8 - \frac{2}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{2}{n^2}\right) = 20 - \frac{4}{n^2}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(20 - \frac{4}{n^2}\right) = 20 \quad \text{ومن ثم :}$$

٤ - برهن :

$$(١) \quad \int_a^b f(x) dx = 0. \quad \text{إن طول فترة التكامل هنا تساوى الصفر وبالتالي فإن } \Delta x = 0 \text{ و } S_n = 0 \text{ و}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$



شكل ٣٣ - ٦

شكل ٣٣ - ٥

(ب) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. لنقسم الفترة $a \leq x \leq b$ ولنختار النقط x_k كما في الشكل ٣٣ - ٥. $\int_a^b f(x) dx$ أما $\int_b^a f(x) dx$ فإننا ندع الفترة (شكل ٣٣ - ٦) تماماً كما كان قبلاً باستثناء النقط x_k و x_{k-1} فإننا نرفقها من اليمين إلى اليسار بدلاً من اليسار إلى اليمين. والآن فإن المجموع S_n إذا حسب من الشكل ٣٣ - ٥ لا يختلف عنه فيما لو حسب من الشكل ٣٣ - ٦ ، باستثناء إشارات $\Delta_k x$ حيث تكون موجبة في التكامل الأول وسالبة في الآخر.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$
 وبالتالي فإن :

$$(ج) \quad \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c f(x_k) \Delta_k x = c \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$$

ومن ثم : $\int_a^b c f(x) dx = c \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = c \int_a^b f(x) dx$

٥ - برهن نظرية القيمة المتوسطة الأولى للحساب التكامل. إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ فإن $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(x_0)$ لقيمة واحدة على الأقل $x = x_0$ واقعة بين a و b .

إن النظرية صحيحة في حالة المثال (١) عندما كانت $f(x) = c$ حيث c ثابت. وبخلاف ذلك نفرض أن m هي القيمة المطلقة الصغرى للدالة $f(x)$ في الفترة $a \leq x \leq b$ وأن M القيمة المطلقة العظمى ، فيكون لدينا لأية تجزئة مناسبة للفترة ولأى اختيار ما للنقط x_k على الفترات الجزئية .

$$\sum_{k=1}^n m \Delta_k x < \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x < \sum_{k=1}^n M \Delta_k x$$

فإذا جعلنا $n \rightarrow +\infty$ نجد أن :

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx$$

والتي تصبح ، استناداً إلى المسألة ١ ، على الشكل :

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$$

$$\text{وبالتالى : } m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M$$

ومنه نجد أن : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = N$ ، حيث N عدد بين m و M . وبما أن $f(x)$ متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ فإنه ينبغي استناداً إلى النظرية ١ من الفصل الثالث أن توجد قيمة واحدة على الأقل لهذه الدالة بين m و M ، أى ينبغي أن توجد قيمة لـ x مثل $x = x_0$ ، بحيث يكون $f(x_0) = N$. وهكذا يكون :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(x_0) \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = N = f(x_0)$$

$$\text{٦ - برهن أنه إذا كان } F(u) = \int_a^u f(x) dx, \text{ فإن } \frac{d}{du} F(u) = f(u).$$

نستخدم طريقة المراحل لإيجاد المشتقة :

$$F(u + \Delta u) - F(u) = \int_a^{u+\Delta u} f(x) dx - \int_a^u f(x) dx$$

وهذا يأخذ ، باستخدام الخواص ٢ ، ٥ ، ٦ ، الشكل

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u) - F(u) &= \int_a^u f(x) dx + \int_u^{u+\Delta u} f(x) dx = \int_u^{u+\Delta u} f(x) dx \\ &= f(u_0) \cdot \Delta u, \end{aligned} \quad \text{حيث } u < u_0 < u + \Delta u \text{ ومنه :}$$

$$\frac{dF}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} f(u_0) = f(u) \quad \text{وبالتالى} \quad \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u_0)$$

حيث أن $\Delta u \rightarrow 0$ و $u_0 \rightarrow u$.

إن هذه الخاصية غالباً ما توضع على الشكل :

$$(i) \quad \text{إذا كان } F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ فإن } F'(x) = f(x).$$

وما استعمال الحرف u هنا إلا مجرد محاولة لتجنب كل احتمال للالتباس بين الأدوار التى تلعبها x المختلفة . ويلاحظ جيداً أن $F(x)$ في (i) هى دالة حدها الأعلى للتكامل هو x وأنه ليس حرفاً صامتاً كالحرف x في $f(x) dx$. ويمكن ، بعبارة أخرى ، كتابة الخاصية المذكورة بالشكل :

$$\text{إذا كان } F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ فإن } F'(x) = f(x).$$

وينتج من (i) أن $F(x)$ هو بكل بساطة تكامل غير محدود لـ $f(x)$.

٧ - برهن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وإذا كان $F(x)$ هو تكامل غير محدود لـ $f(x)$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

باستخدام الصيغة الأخيرة في المسألة ٦ يمكن كتابة :

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$$

وعندما يكون الحد الأعلى للتكامل هو $x = a$ يكون :

$$C = -F(a) \quad \text{ومن ثم} \quad \int_a^a f(x) dx = 0 = F(a) + C$$

وبالتالى فإن $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ وعندما يكون الحد الأعلى للتكامل هو $x = b$ نجد المطلوب

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

استخدم النظرية الأساسية لحساب التكامل لتحسب قيمة كل من التكاملات :

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{3} \quad -٨$$

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right]_{-3}^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18} \right) = \frac{10}{9} \quad -٩$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2 \quad -١٠$$

$$\int_{-2}^3 e^{-x/2} dx = -2e^{-x/2} \Big|_{-2}^3 = -2(e^{-3/2} - e) = 4.9904 \quad -١١$$

$$\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_{-6}^{-10} = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2 \quad -١٢$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad -١٣$$

$$\int_{-3}^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}x \Big|_{-3}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi \right) \right] = \frac{1}{4}\pi \quad -١٤$$

$$\int_{-3}^{-5} \sqrt{x^2-4} dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2 \ln|x+\sqrt{x^2-4}| \right]_{-3}^{-5} = \frac{5}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2 \ln \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{21}} \quad -١٥$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{1}{5} - \ln 2 \right) = \frac{1}{6} \ln 0.1 \quad -١٦$$

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x - x \right]_1^e = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1 \quad -١٧$$

$$-١٨ \quad \text{أوجد} \quad \int_3^6 xy dx \quad \text{عند} \quad x = 6 \cos \theta, y = 2 \sin \theta.$$

نمبر أولاً عن x و y و dx بدلالة θ و $d\theta$ ونستبدل بحدود التكامل قيم الوسيط المرافقة ثم نحسب قيمة التكامل الناتج .

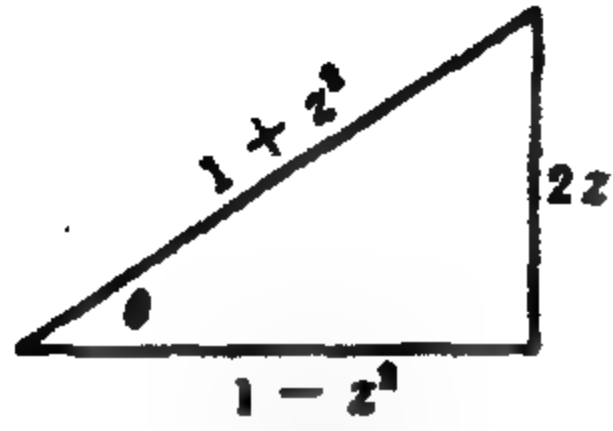
إن $dx = -6 \sin \theta d\theta$ وعندما $x = 6 \cos \theta = 6$ يكون $\theta = 0$ وعندما $x = 6 \cos \theta = 3$ يكون

$\theta = \pi/3$ وبالتالى

$$\begin{aligned}
 \int_1^6 xy \, dx &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} (6 \cos \theta)(2 \sin \theta)(-6 \sin \theta) \, d\theta \\
 &= -72 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = -24 \sin^3 \theta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -24\{0 - (\sqrt{3}/2)^3\} = 9\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{5 + 4 \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{9+z^2} \quad \text{إن} \quad \int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} \quad \text{أوجد} \quad -١٩$$

لنمين حدى z للتكامل $(\theta = 2 \arctan z)$ عندما $\theta = 0$ فإن $z = 0$ وعندما $\theta = 2\pi/3$ فإن $\arctan z = \pi/3$ ومنه $z = \sqrt{3}$.



شكل ٢٣ - ٧

$$\int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dz}{9 + z^2} = \frac{2}{3} \arctan \frac{z}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9} \quad \text{وبالتالى فإن} :$$

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{1 - \frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{(1-z)^2} \quad \text{إن} \quad \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \sin x} \quad \text{أوجد} \quad -٢٠$$

وعندما $x=0$ فإن $\arctan z=0$ ومنه $z=0$ وعندما $x=\pi/3$ فإن $\arctan z=\pi/6$ ومنه $z=\sqrt{3}/3$ وبالتالى فإن :

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \sin x} = 2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z} \Big|_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3} + 1$$

مسائل إضافية

٢١- احسب قيمة تكامل المسألة ١ : $\int_a^b c \, dx$ وذلك بتقسيم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى n من الفترات الجزئية أطوالها $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$. ولاحظ أن $\sum_{k=1}^n \Delta_k x = b - a$.

٢٢- احسب قيمة تكامل المسألة ٢ : $\int_0^3 x \, dx$ مستخدماً فترات جزئية أطوالها متساوية (أ) مختاراً النقط x_k بحيث تمثل نقط نهايات الأطراف اليسرى للفترات الجزئية.

(ب) مختاراً النقط x_k بحيث تمثل منتصفات الفترات الجزئية (ج) مختاراً النقط x_k على نهاية الثلث الأول لكل هذه الفترات أى أن $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x, x_2 = \frac{2}{3}\Delta x, \dots$

٢٣- احسب $\int_1^4 x^2 \, dx = 21$ مستخدماً فترات جزئية أطوالها متساوية ومختاراً النقط x_k بحيث تمثل (أ) نقط نهايات الأطراف اليمنى للفترات الجزئية (ب) نقط نهايات الأطراف اليسرى للفترات الجزئية (ج) نقط منتصفات الفترات الجزئية.

٢٤- استخدم نفس الاختيار للفترات الجزئية والنقط كما في المسألة ٢٣ (أ) لتعيب $\int_1^4 x \, dx$ و $\int_1^4 (x^2 + x) \, dx$.

$$\text{وأثبت أن} \quad \int_a^b \{f(x) + g(x)\} \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

٢٥- احسب قيمة $\int_1^7 x^2 dx$ وقيمة $\int_2^4 x^2 dx$ ، ثم قارن المجموع بنتيجة المسألة ٢٢. نثبت أن

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{عندما } a < c < b$$

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1. \quad \text{احسب} \quad \text{٢٦-}$$

إرشاد : $S_n = \sum_{k=1}^n e^{k \Delta x} \Delta x = e^{\Delta x} (e - 1) \cdot \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$ ، وإلى النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$ هي صيغة غير محددة من النمط $\frac{0}{0}$.

٢٧- برهن خاصية التكامل المحدود : $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

٢٨- استخدم النظرية الأساسية لحساب :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2+x) dx &= 6 \quad (أ) & \int_0^2 x^2(x^3+1) dx &= 40/3 \quad (ب) \\ \int_0^2 (2-x)^2 dx &= 8/3 \quad (ج) & \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} &= 2 \quad (د) \\ \int_0^2 (3-2x+x^2) dx &= 9 \quad (هـ) & \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2 dx &= 1/30 \quad (و) \\ \int_{-1}^2 (1-t^2)t dt &= -9/4 \quad (ز) & \int_4^9 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-15}} &= 6 \quad (ح) \\ \int_1^4 (1-u)\sqrt{u} du &= -116/15 \quad (ط) & \int_0^{\pi} \sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{1}{4}a^2\pi \quad (ق) \\ \int_0^2 \sqrt{1+3x} dx &= 26 \quad (ي) & \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (ك) \\ \int_1^4 \frac{dx}{25-x^2} &= \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2} \quad (ل) & \int_0^1 \ln(x^2+1) dx &= \ln 2 + \frac{1}{2}\pi - 2 \quad (م) \\ \int_{-1/2}^0 \frac{x^2 dx}{x^2+x+1} &= \frac{\sqrt{3}\pi}{9} - \frac{5}{8} \quad (ن) & \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}t dt &= 4 \quad (س) \\ \int_1^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx &= 4 \ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \quad (هـ) & \int_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx &= \frac{1}{27}(\pi^2-4) \quad (و) \\ \int_0^{27} \frac{dx}{x-x^{1/3}} &= \frac{3}{2} \ln \frac{8}{3} \quad (ز) & \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3+\cos 2x} &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \quad (ح) \end{aligned}$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} \quad \text{بين أن} \quad \text{٢٩-}$$

$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta. \quad \text{بفرض أن} \quad \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y dx = 3\pi, \quad \text{احسب قيمة} \quad \text{٣٠-}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x. \quad \text{بفرض أن} \quad \int_1^4 \sqrt{1+(y')^2} dx = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \ln 2, \quad \text{احسب} \quad \text{٣١-}$$

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t. \quad \text{بفرض أن} \quad \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{2} e^2 (e-1), \quad \text{احسب} \quad \text{٣٢-}$$

٣٣- استخدم صيغ الاختزال المناسبة (الفصل ٢٦) كي تبرهن صيغة واليس :

(إذا كان n عدداً زوجياً وأكبر من الصفر) .

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2)n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(وإذا كان n عدداً فردياً وأكبر من الواحد) .

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{1 \cdot 3 \dots (n-2)n}$$

(إذا كان كل من m و n زوجيين وأكبر من الصفر) .

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \dots (m+n-2)(m+n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(إذا كان m عدداً فردياً وأكبر من الواحد) .

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (m-3)(m-1)}{(n+1)(n+3) \dots (n+m)}$$

(إذا كان n عدداً فردياً وأكبر من الواحد) .

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{(m+1)(m+3) \dots (m+n)}$$

٣٤- احس :

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 4 \ln \frac{3}{4} - 1 \quad (أ)$$

$$\int_0^{11} \sqrt{2x+3} \, dx = 98/3 \quad (ب)$$

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(e^2 + 1) \quad (ج)$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1} dx = \frac{1}{4}\pi - 1 \quad (د)$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x - 5 \cos x + 4} = \frac{1}{3} \ln \frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} \quad (هـ)$$

$$\int_{-1}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx = \ln \frac{3-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{15} \quad (و)$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \ln \sqrt{3} \quad (ز)$$

$$\int_1^3 \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \, dx = 3 \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \quad (ح)$$

$$\int_{-1}^{-3} \frac{(x+2) \, dx}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \quad (ط)$$

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln(\sqrt{2}-1) \quad (ي)$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \tan x} = \frac{1}{5} \ln \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{10} \quad (ك)$$

$$\int_{1/4}^{3/4} \frac{(x+1) \, dx}{x^2(x-1)} = 4 \ln \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \quad (ل)$$

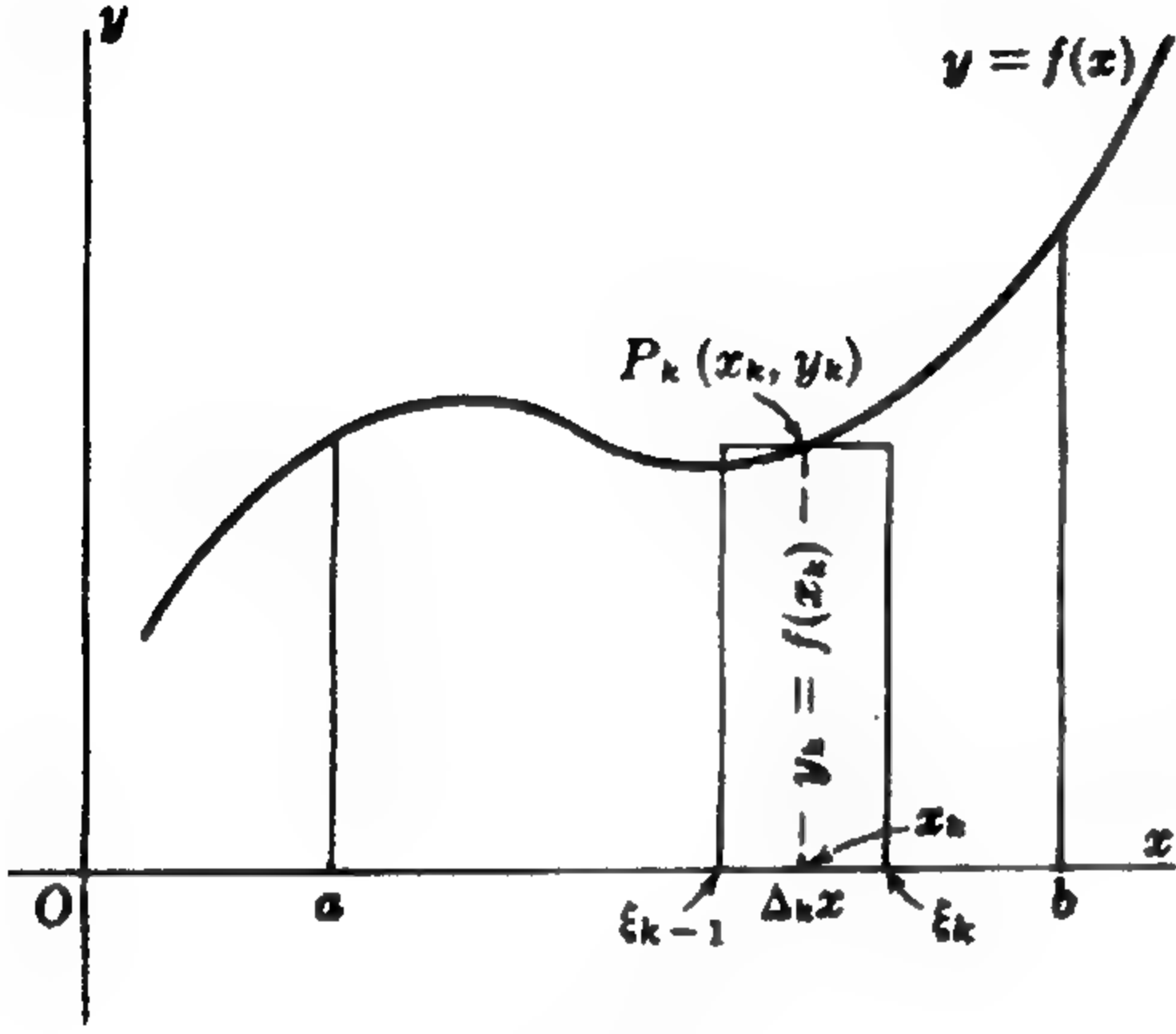
الفصل الرابع والشارثون

حساب المساحات المستوية بالتكامل

المساحات كنهاية مجموع : إذا كانت $f(x)$ متصلة وغير سالبة في الفترة $a \leq x \leq b$ ، فإنه يمكن إعطاء

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$$

تفسيراً هندسياً . لنفرض أن الفترة $a \leq x \leq b$ قسمت إلى فترات جزئية وأنها اخترنا فقط x_k كما في الفصل السابق . لرفع على المحور x أعمدة كل من أطراف الفترات الجزئية $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = b$



فينقسم بذلك الجزء المستوى المحدود من أعلى بالمنحنى $y = f(x)$ ومن أسفل بالمحور x ومن الجانبين بالمستقيمين $x = a$ و $x = b$ إلى شريحة . لنقرب كل شريحة إلى مستطيل قاعدته القاعدة السفلى للشريحة وارتفاعه يساوي الارتفاع العادي المقام على النقطة x_k في الفترة الجزئية ، وتكون مساحة المستطيل الموضح في الشكل ١ - ٣٤ مساوية $f(x_k) \Delta_k x$ وتمثل عندئذ $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$ مجموع مساحات المستطيلات n .

شكل ١ - ٣٤

ونهاية هذا المجموع $\int_a^b f(x) dx$ ، أي عندما يزداد عدد الشرائح إلى ما لا نهاية وفق الأسلوب الموصوف في الفصل ٣٣ تساوي حسب التعريف مساحة قطعة المستوى المشار إليها أعلاه أو اختصاراً هي المساحة تحت المنحنى من $x = a$ إلى $x = b$ أنظر المسألتين ١ - ٢

وبالمثل : إذا كانت $x = g(y)$ متصلة وغير سالبة في الفترة $c \leq y \leq d$ فإن التكامل المحدد $\int_c^d g(y) dy$ يمثل حسب التعريف مساحة قطعة السطح المستوى المحددة بالمنحنى $x = g(y)$ والمحور y والمستقيمين $y = c$ و $y = d$ أنظر المسألة ٣

وإذا كانت $y = f(x)$ متصلة وغير موجبة في الفترة $a \leq x \leq b$ فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون سالباً مشيراً بذلك إلى أن المساحة واقعة تحت المحور السيني . وبشكل مماثل إذا كانت $x = g(y)$ متصلة وغير موجبة في الفترة $c \leq y \leq d$ ، فإن $\int_c^d g(y) dy$ يكون سالباً مشيراً بذلك إلى أن المساحة واقعة على يسار المحور العادي .

أنظر المسألة ٤

وإذا غيرت $y = f(x)$ إشارتها في الفترة $a \leq x \leq b$ أو إذا غيرت $x = g(y)$ إشارتها في الفترة $c \leq y \leq d$ فإن المساحة تحت المنحنى تعطى بمجموع تكاملين محددين أو أكثر .

أنظر المسألة ٥

حساب المساحات بالتكامل : إن الخطوات الضرورية لتشكيل التكامل المحدود الذي يعطي المساحة المطلوبة هي :

١ - توضيح برسم تقريبي (١) المساحة التي نبحث عنها (ب) تمثيل الشرائح (ج) المستطيل المقرب . سنبين ، كما هو متعارف ، للفترة الجزئية بطول يساوي Δx (أو Δy) والنقطة x_k (أو y_k) واقعة على هذه الفترة الجزئية في منتصفها .

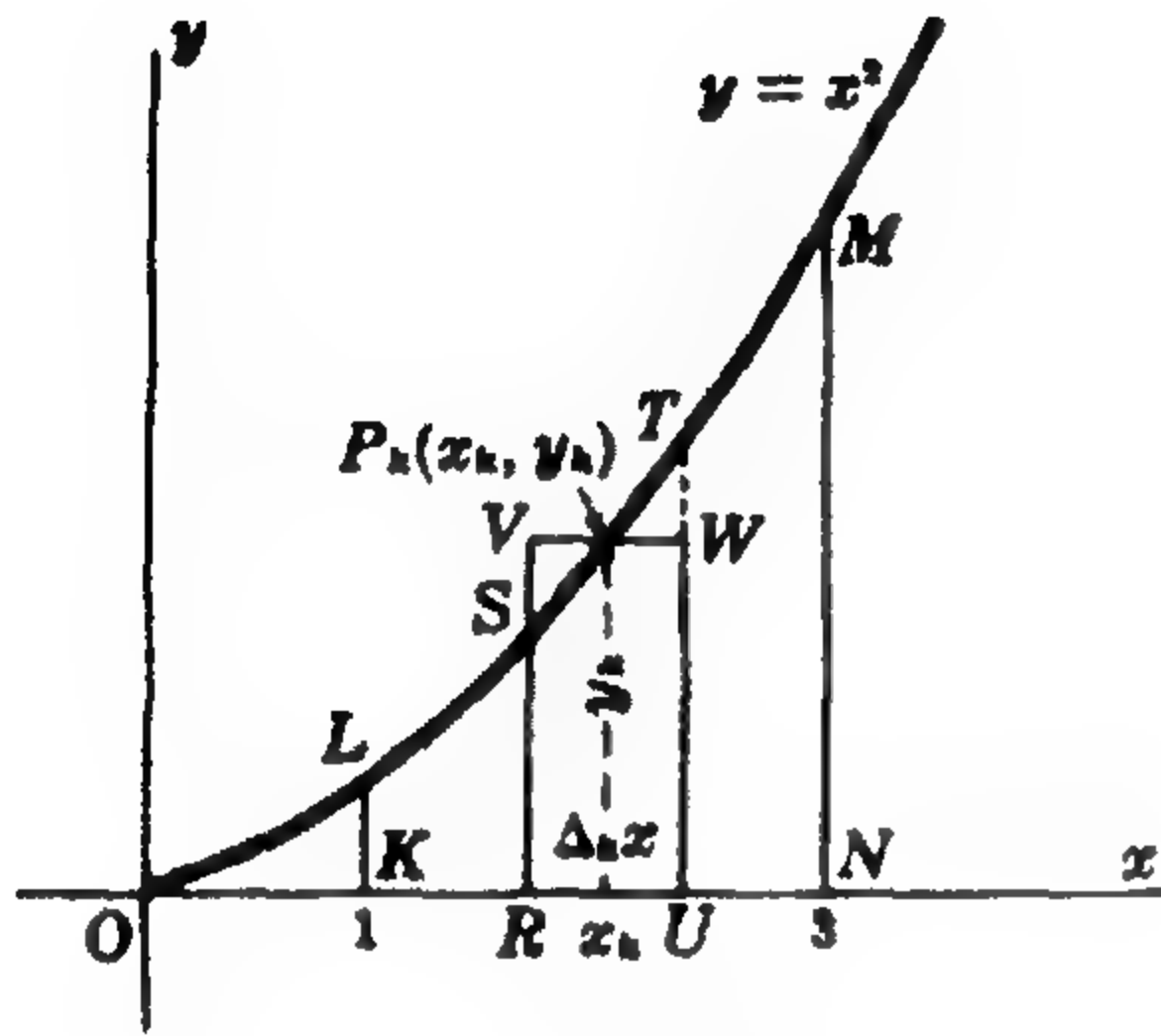
٢ - اكتب مساحة المستطيل المقرب وشكل مجموع المستطيلات n .

٣ - نفرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية ويمكن تطبيق النظرية الأساسية من الفصل السابق .

أنظر المسائل ٦ - ١٤

مسائل محلولة

١ - أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.

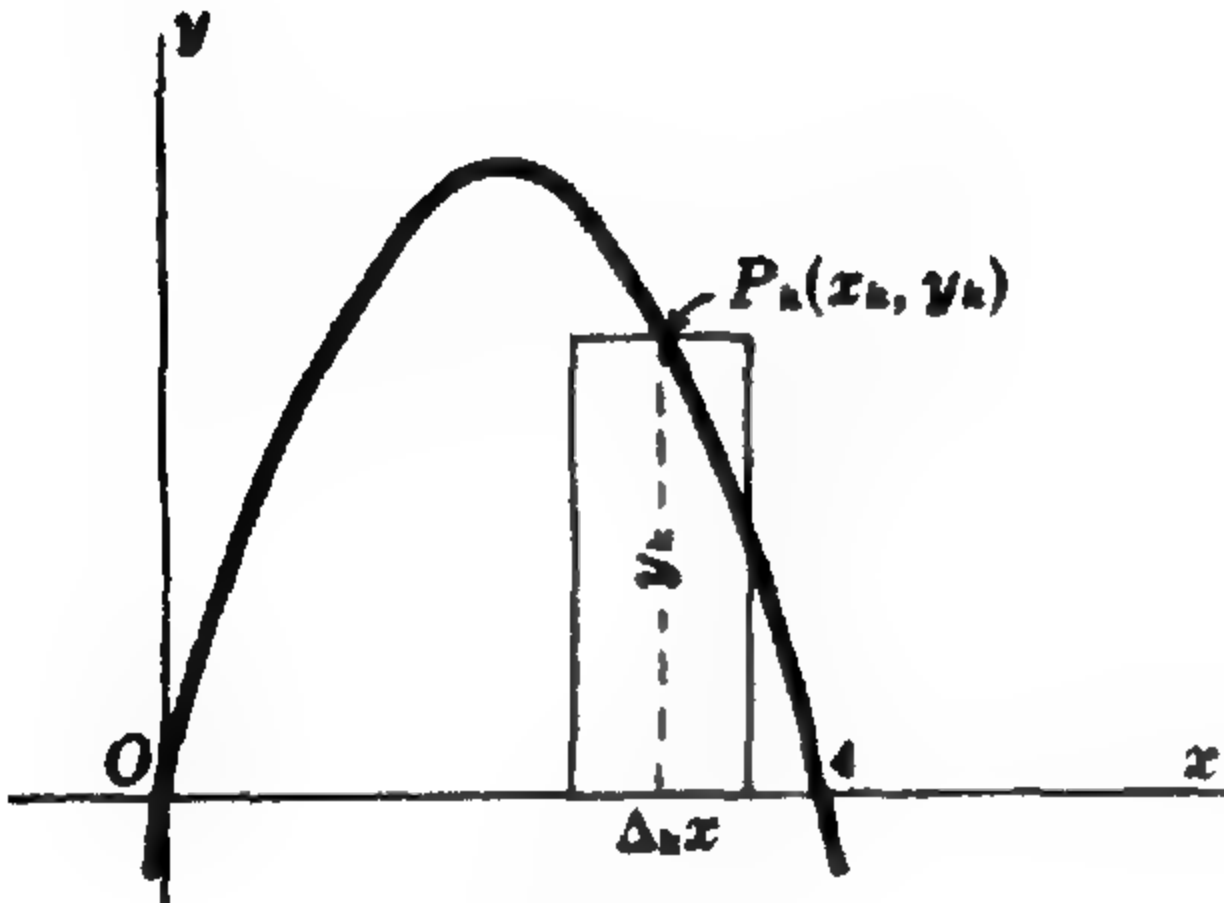


شكل ٢ - ٣٤

من الشكل ٢ - ٣٤ نجد أن المساحة التي نبحث عنها هي $KLMN$ والشريحة المثلثة هي $RSTU$ والمستطيل المقرب هو $RVWUF$ ، وقاعدة هذا المستطيل $\Delta_k x$ وارتفاعه $y_k = f(x_k) = x_k^2$ ومساحته $x_k^2 \cdot \Delta_k x$ إذن :

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x_k^2 \Delta_k x = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ sq. un.}$$

٢ - أوجد المساحة الواقعة فوق المحور السيني وتحت القطع المكافئ $y = 4x - x^2$.



شكل ٢ - ٣٤

المنحنى المفروض يقطع المحور السيني عند $x = 0$ و $x = 4$ وعندما نستخدم الشرائح الرأسية تكون هاتان القيمتان حدى التكامل . وعرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٢ - ٣٤ يساوي $\Delta_k x$ وارتفاعه $y_k = 4x_k - x_k^2$ ومساحته $(4x_k - x_k^2) \cdot \Delta_k x$ إذن :

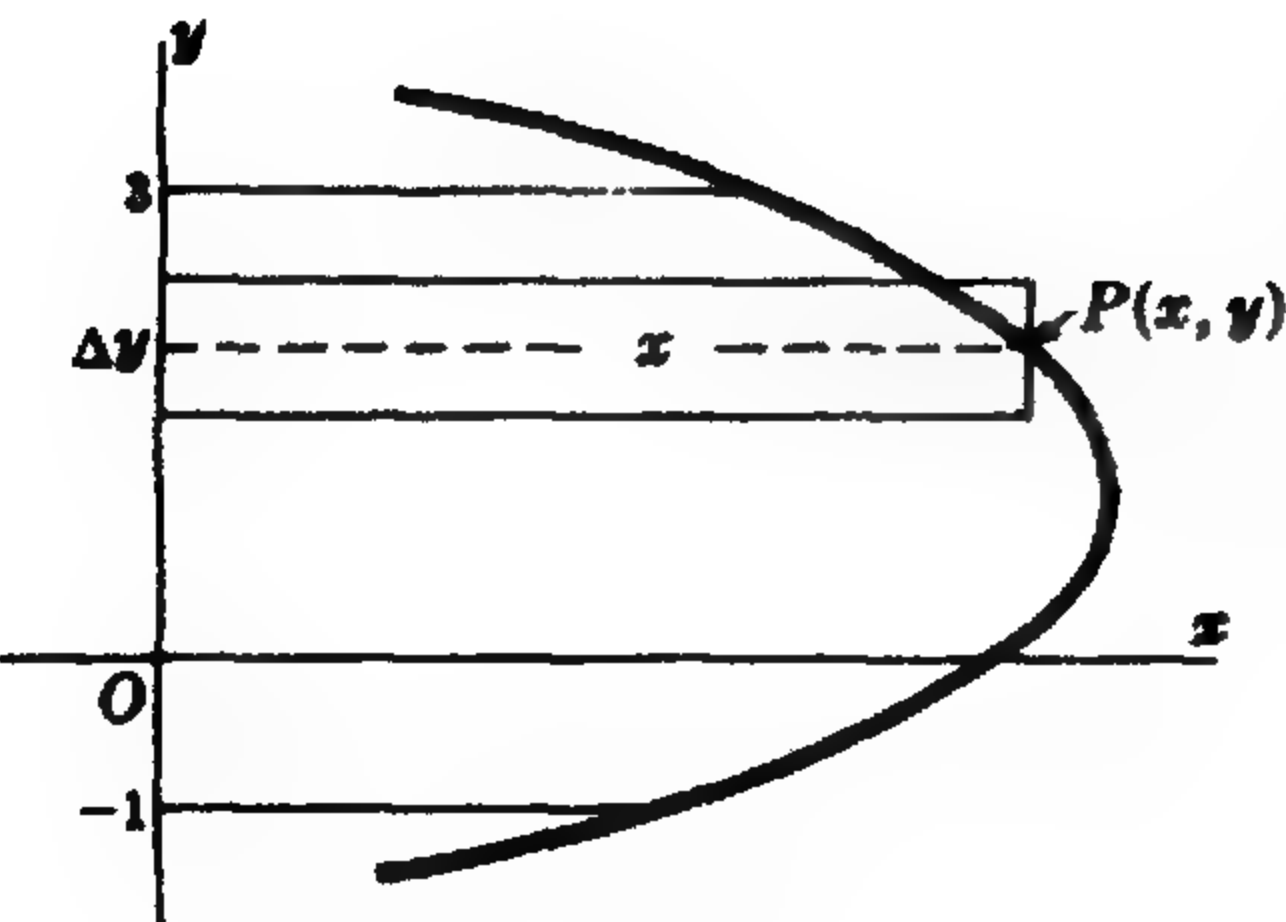
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (4x_k - x_k^2) \Delta_k x = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 32/3 \text{ sq. un.}$$

من الممكن اختصار الحسابات على أن لا يغيب أبداً عن بالنا الطريقة المشروحة أعلاه بكاملها ، فزى أنه بالإمكان صياغة التكامل المحدود ، بغض النظر عن حدى التكامل ، بمجرد تشكيل مساحة المستطيل المقرب .

٣ - أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $x = 8 + 2y - y^2$ والمحور الصادي والمستقيمان $y = -1$ و $y = 3$.

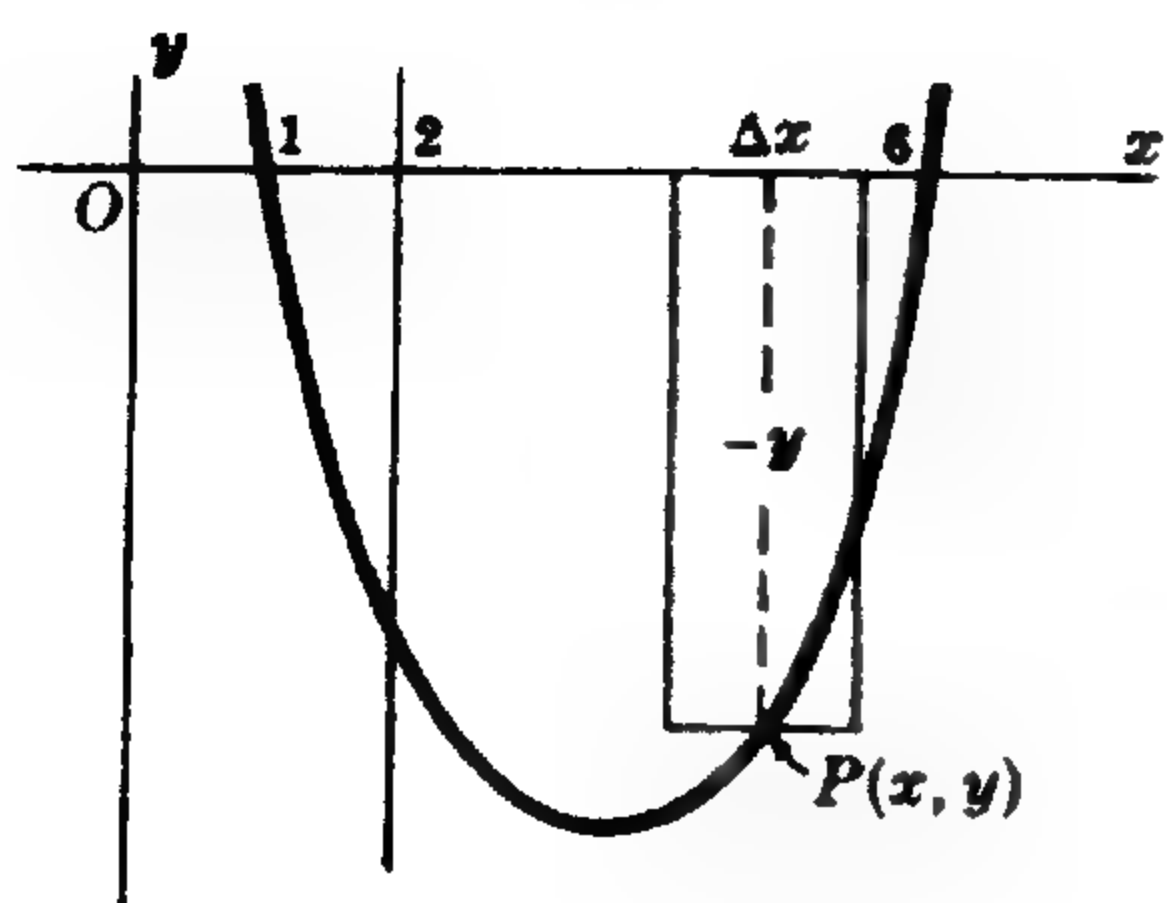
نقسم المساحة هنا إلى شرائح أفقية. فيكون عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٢ - ٣٤ هو Δy وطوله $x = 8 + 2y - y^2$ ومساحته هي $(8 + 2y - y^2) \Delta y$ والمساحة المطلوبة هي :

$$\int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2) dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^3 = \frac{92}{3} \text{ sq. un.}$$



شكل ٢ - ٣٤

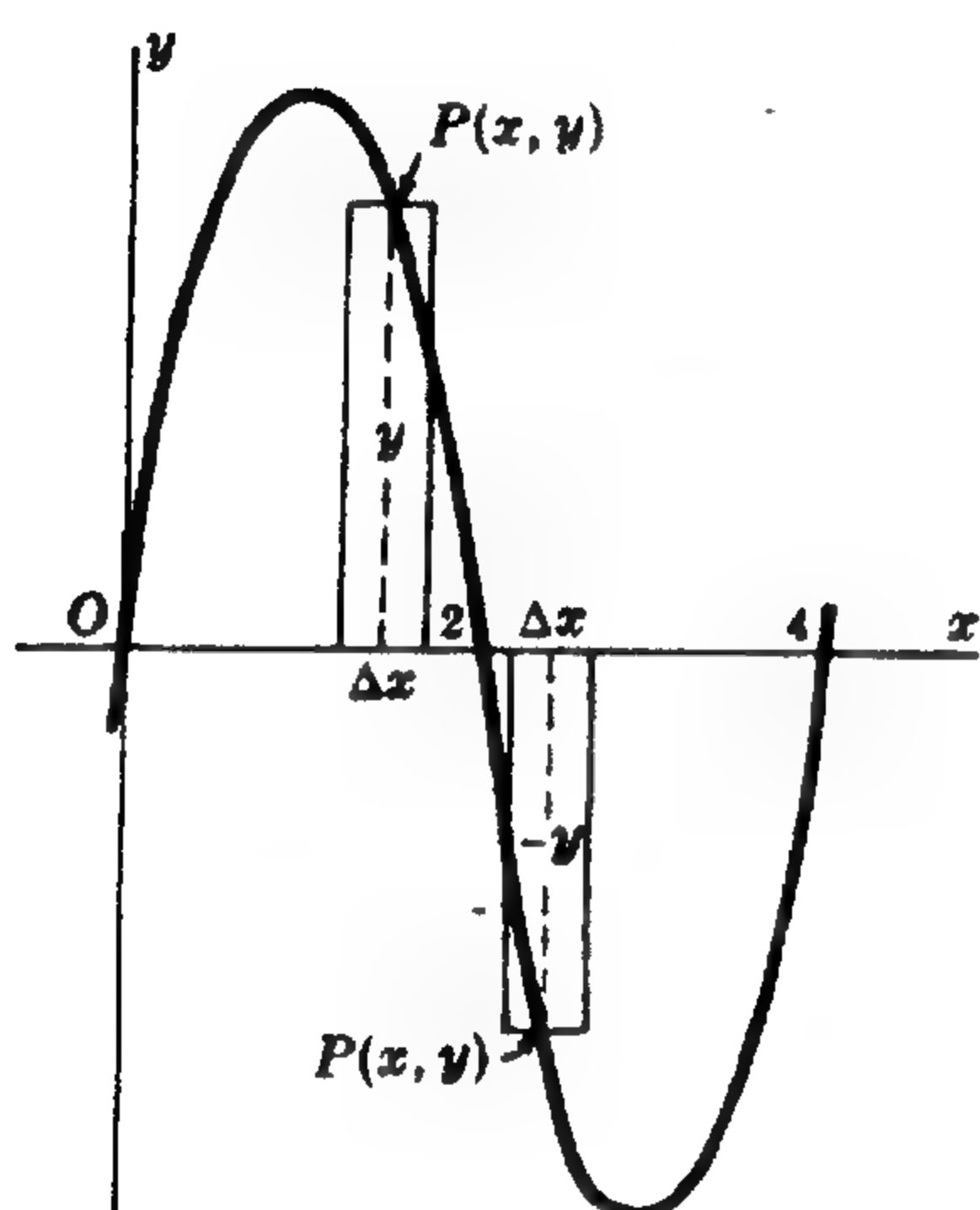
٤- أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2 - 7x + 6$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 2$ و $x = 6$.



إن عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٤ - ٥ يساوي Δx وارتفاعه $-y = -(x^2 - 7x + 6)$ ومساحته هي $-(x^2 - 7x + 6)\Delta x$ والمساحة المطلوبة إذن هي :

$$A = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_2^6 = \frac{56}{3} \text{ square units}$$

شكل ٣٤ - ٥



شكل ٣٤ - ٦

٥- أوجد المساحة بين المنحنى $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ والمحور السيني. المنحنى يقطع المحور السيني عند $x = 0, x = 2, x = 4$ كما هو مبين في الشكل ٣٤ - ٦. باستخدام الشرائع الرأسية، نرى أن مساحة المستطيل المقرب الذي تقع قاعدته في الفترة $0 < x < 2$ تساوي $(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$ ، وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع فوق المحور السيني مساوية لـ $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$. وأما مساحة المستطيل المقرب الذي تقع قاعدته في الفترة $2 < x < 4$ فتساوي $-(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$ ، وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع تحت المحور السيني مساوية لـ $\int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x) dx$. وهكذا تكون المساحة المطلوبة.

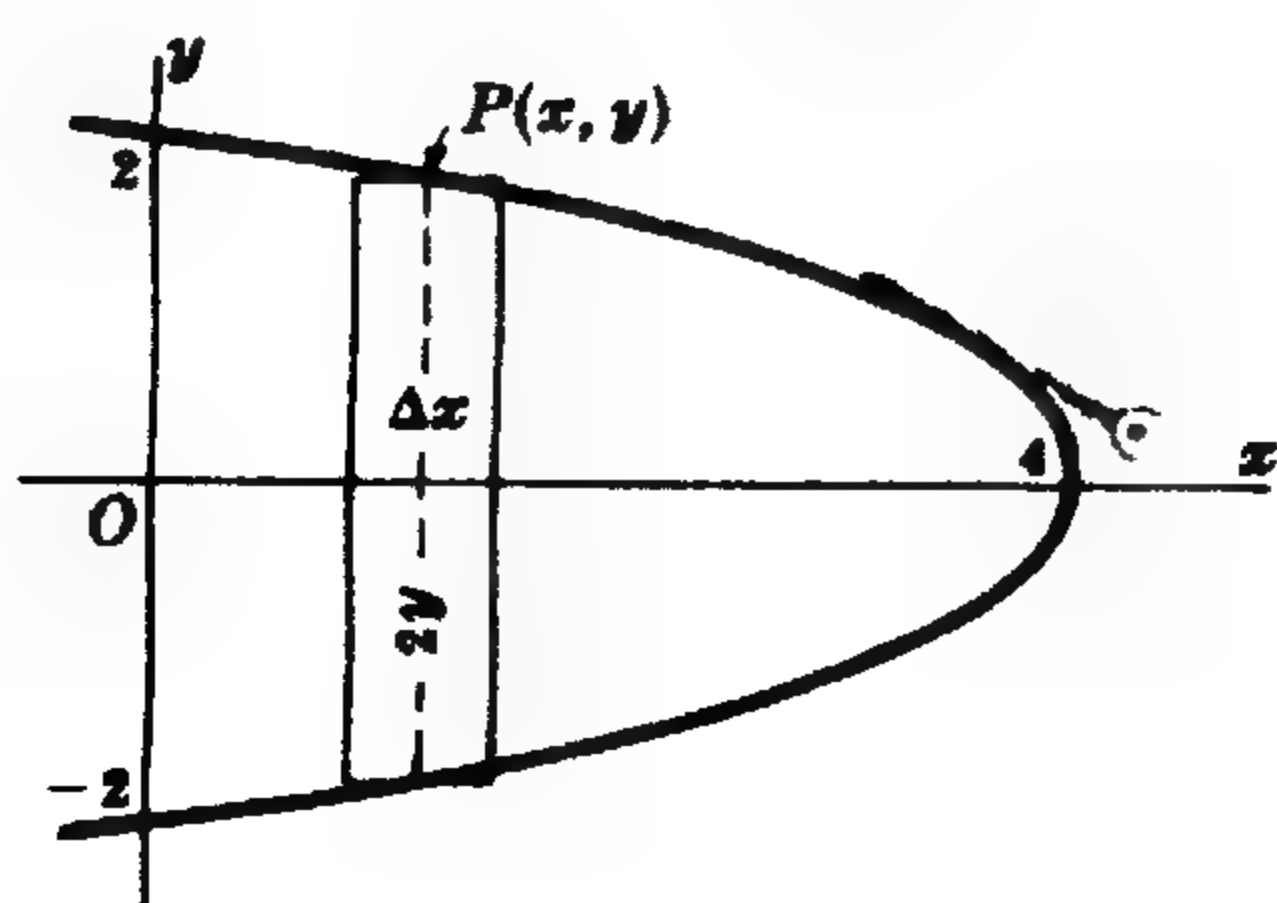
$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x) dx \\ = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 \\ = 4 + 4 = 8 \text{ square units}$$

إن حساب المساحة بتكاملين محددين هنا ضروري لأن دالة التكامل تغير إشارتها في فترة التكامل.

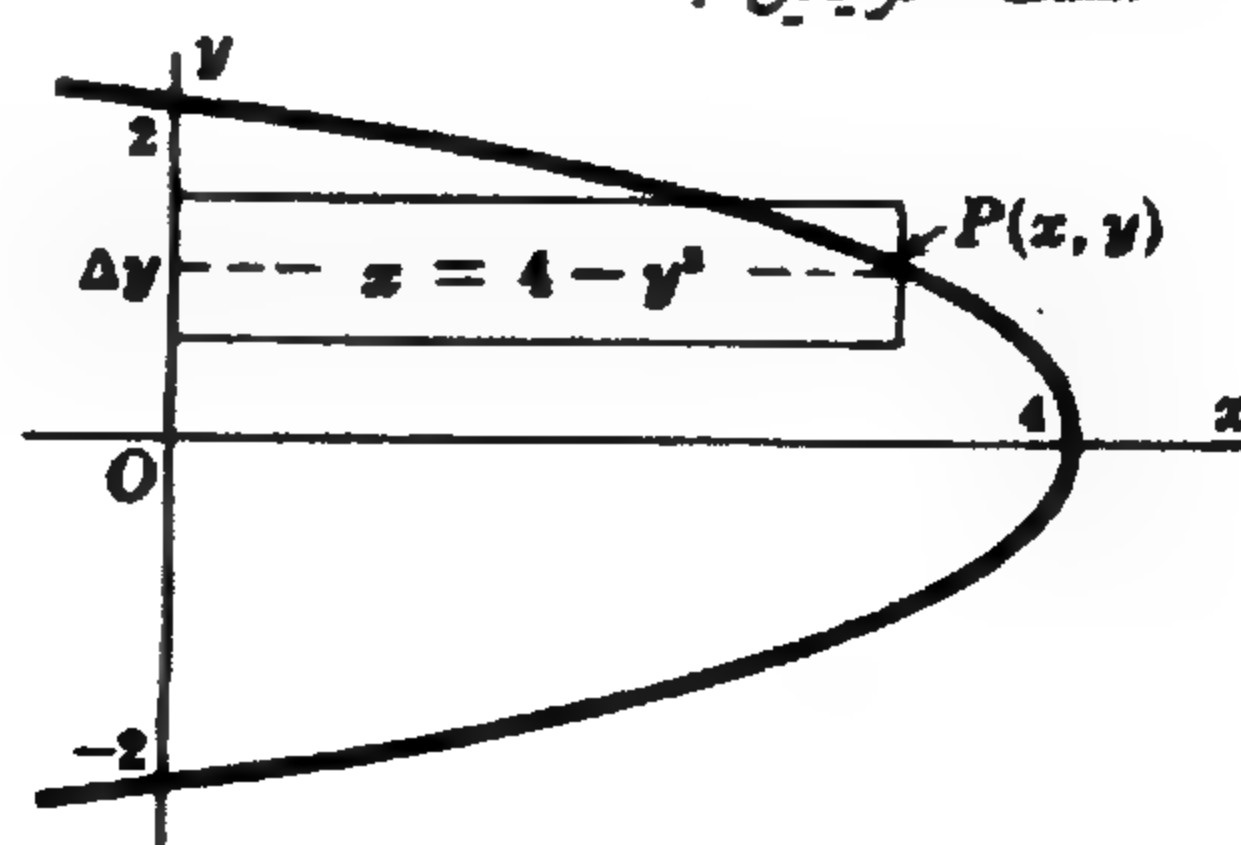
أما إذا فطنا أن نلاحظ هذا الأمر فإننا نصل إلى النتيجة الخاطئة $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = 0$.

٦- أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $x = 4 - y^2$ والمحور الصادي.

إن القطع المكافئ يقطع المحور السيني عند النقطة $(4, 0)$ والمحور الصادي عند النقطتين $(0, 2)$ و $(0, -2)$ ولحل المسألة سنسلك طريقتين :



شكل ٣٤ - ٧ (ب)



شكل ٣٤ - ٧ (١)

طريقة الشرائع الأفقية : أن عرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٣٤-٧ (أ) يساوى Δy وطوله $4 - y^2$ ومساحته $\Delta y (4 - y^2)$. وأما مدى التكامل فهما $y = -2$ و $y = 4$ ويلاحظ من ناحية أخرى ، أن المساحة الواقعة فوق المحور السيني مساوية للمساحة الواقعة تحت نفس المحور . وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة هي :

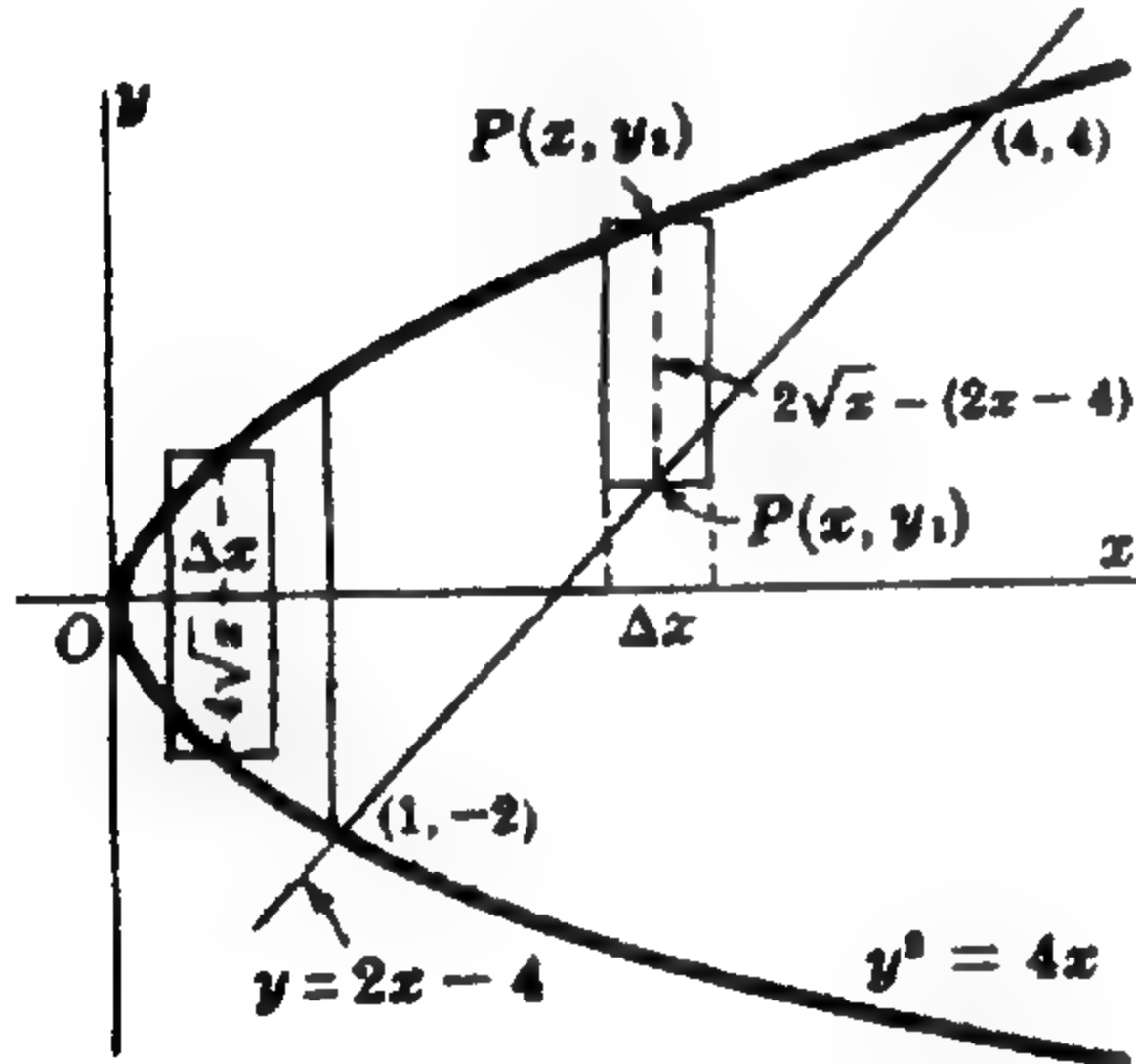
$$\int_{-2}^4 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^4 (4 - y^2) dy = 2 \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

طريقة الشرائع الرأسية : إن عرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٣٤-٧ (ب) يساوى Δx وارتفاعه $2y = 2\sqrt{4-x}$ ومساحته $2\sqrt{4-x} \Delta x$. وأما مدى التكامل فهما $x = 0$ و $x = 4$ ولذلك فإن المساحة المطلوبة هي :

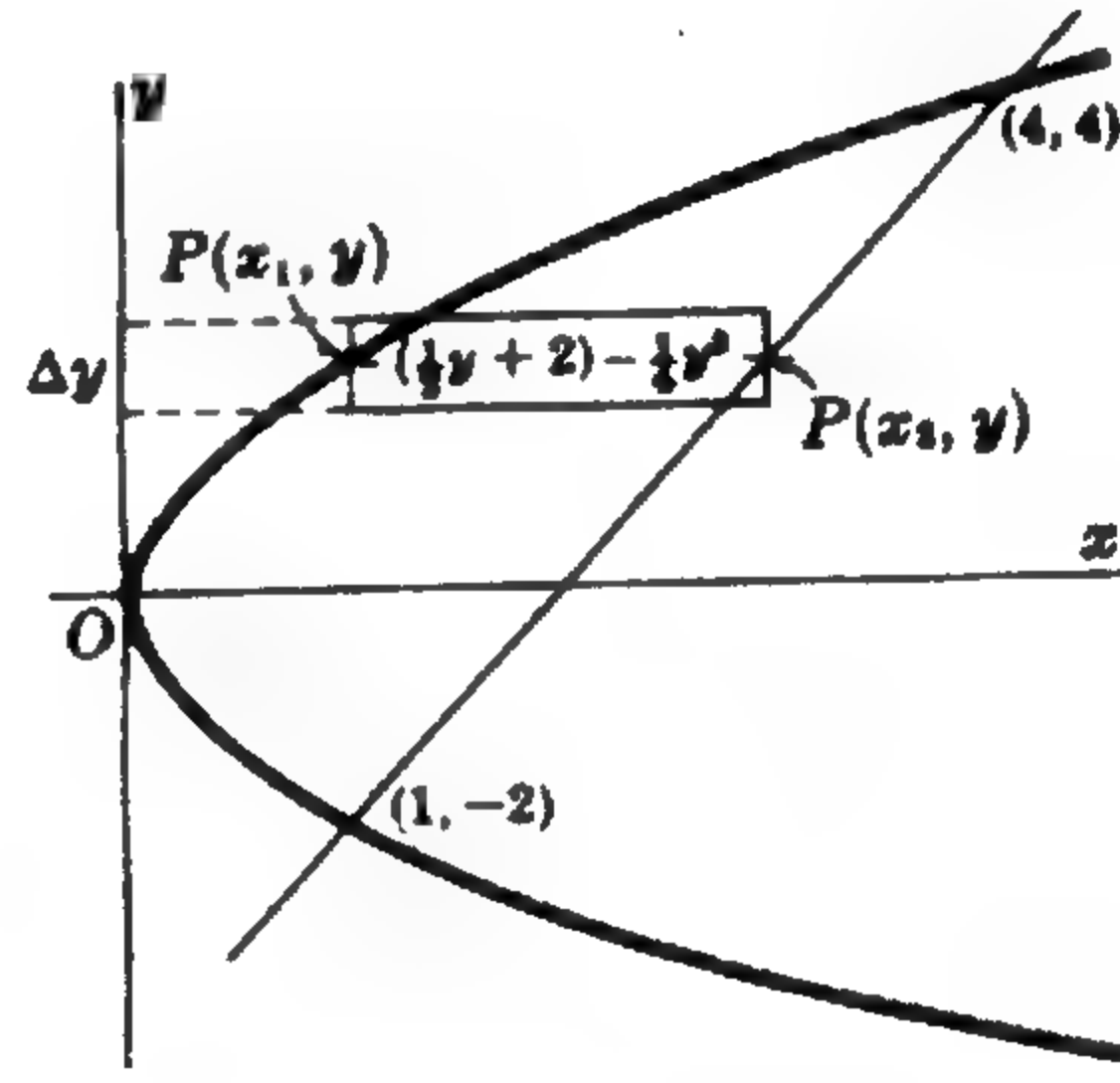
$$\int_0^4 2\sqrt{4-x} dx = -\frac{4}{3}(4-x)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

٧- أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 4x$ والمستقيم $y = 2x - 4$.

يقطع المستقيم المفروض القطع المكافئ عند النقطتين $(1, -2)$ و $(4, 4)$ ويلاحظ من الشكلين التاليين أنه عندما نستخدم الشرائع الرأسية فإن بعض هذه الشرائع ينطلق من المستقيم إلى القطع والبعض الآخر ينطلق من أحد فرعي القطع إلى الفرع الآخر ، في حين إذا استخدمنا الشرائع الأفقية فإن كل شريحة تنطلق من القطع إلى المستقيم . سنقدم فيما يلي الحل بالطريقتين لنبين أفضلية أحدهما على الآخر ولنبين أنه ينبغي قبل البدء في تكوين التكامل المحدد أن ننمّن النظر في طريقتي التجزئة إلى شرائع .



شكل ٣٤ - ٨ (ب)



شكل ٣٤ - ٨ (أ)

طريقة الشرائع الأفقية : بالنظر إلى الشكل ٣٤-٨ (أ) نجد أن عرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل يساوى Δy وطوله يساوى (قيمة x على المستقيم) - (قيمة x على القطع المكافئ) $(\frac{1}{2}y + 2) - \frac{1}{4}y^2 = 2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2$ ومساحته تساوى $\Delta y (2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2)$ والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_{-2}^4 (2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2) dy = \left[2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} \right]_{-2}^4 = 9 \text{ square units}$$

طريقة الشرائع الرأسية : بالنظر إلى الشكل ٣٤-٨ (ب) . وبتقسيم المساحة بالمستقيم $x = 1$ فيكون عرض المستطيل المقرب على يسار هذا المستقيم Δx وطوله (باستخدام التناظر) يساوى $2y = 4\sqrt{x}$ ، ومساحته $4\sqrt{x} \Delta x$ ويكون عرض المستطيل المقرب على يمين المستقيم المذكور Δx وطوله $2\sqrt{x} - (2x - 4) = 2\sqrt{x} - 2x + 4$ ومساحته $\Delta x (2\sqrt{x} - 2x + 4)$ والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_0^1 4\sqrt{x} dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - 2x + 4) dx = \left[\frac{8}{3}x^{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - x^2 + 4x \right]_1^4 = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9 \text{ sq. un.}$$

٨ - أوجد المساحة المحددة بالقطين المكافئين $y = 6x - x^2$ و

$$y = x^2 - 2x.$$

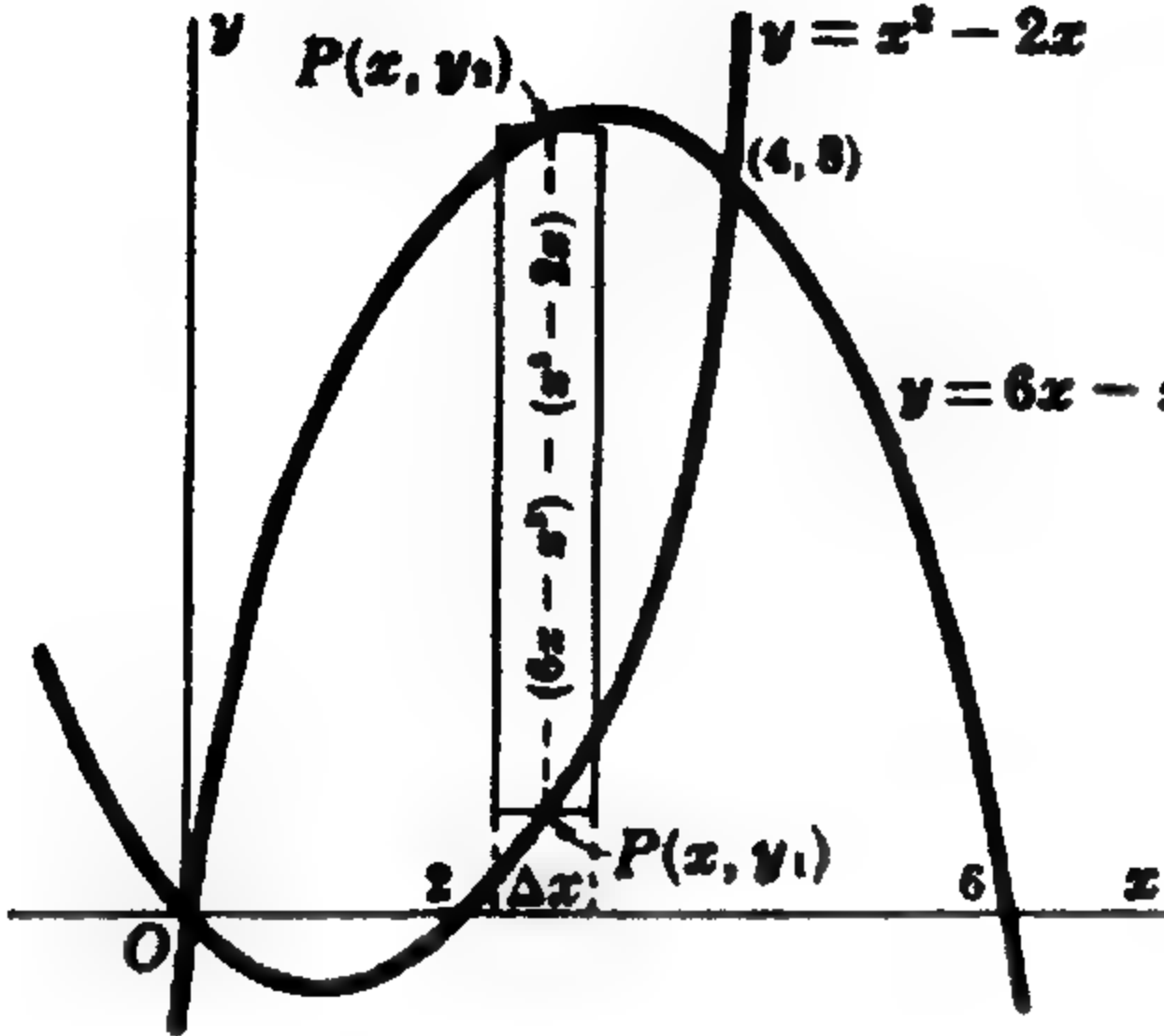
يتقاطع القطان عند النقطتين $(0, 0)$ و $(4, 8)$ ، ويلاحظ مقدما أن الشرائع الرأسية هي التي تعطينا الحل الأسهل .

إن عرض المستطيل المقرب Δx وارتفاعه يساوى (قيمة y على الحد الأعلى) - (قيمة y على الحد الأدنى) .

$$(6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$$

ومساحته تساوى $\Delta x (8x - 2x^2)$ والمساحة المطلوبة هي

$$\int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ square units}$$



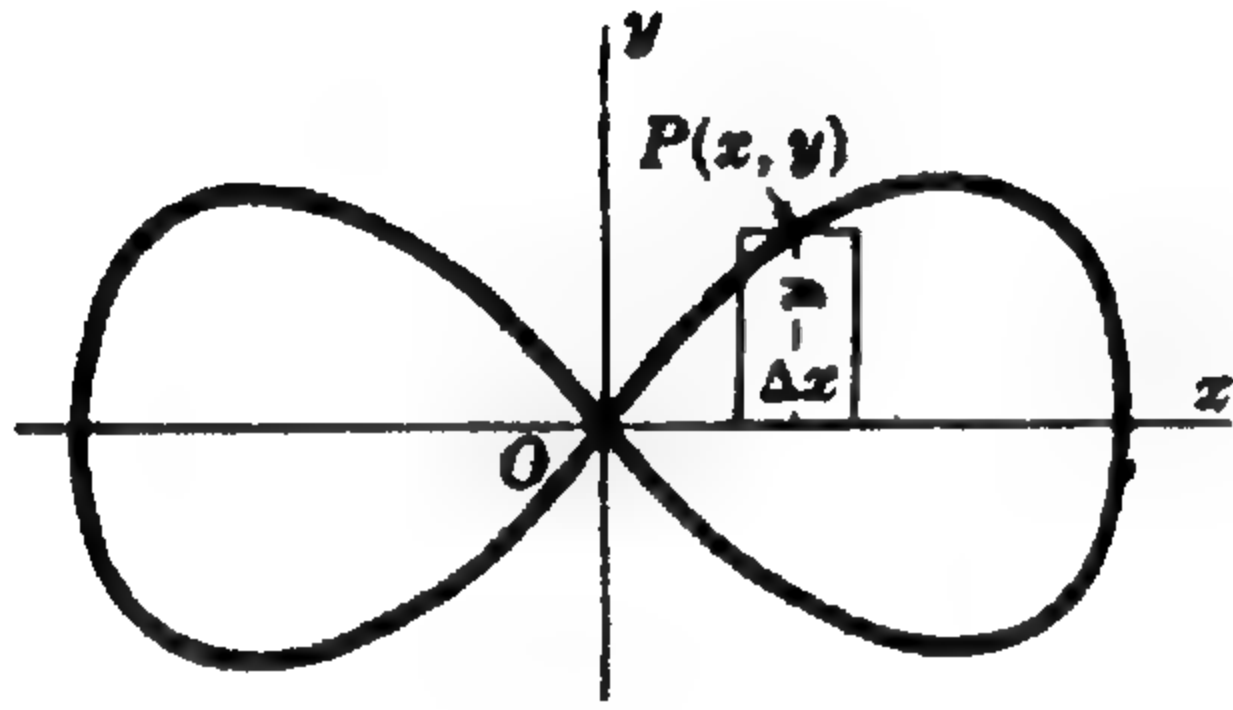
شكل ٣٤ - ٩

٩ - أوجد المساحة الواقعة داخل المنحنى $y^2 = x^2 - x^4$.

إن المنحنى متناظر بالنسبة للمحورين الإحداثيين وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة تساوى أربع مرات مساحة الجزء الواقع في الربع الأول . وعرض

المستطيل المقرب يساوى Δx وارتفاعه $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$ ومساحته $x\sqrt{1 - x^2} \Delta x$ والمساحة المطلوبة هي

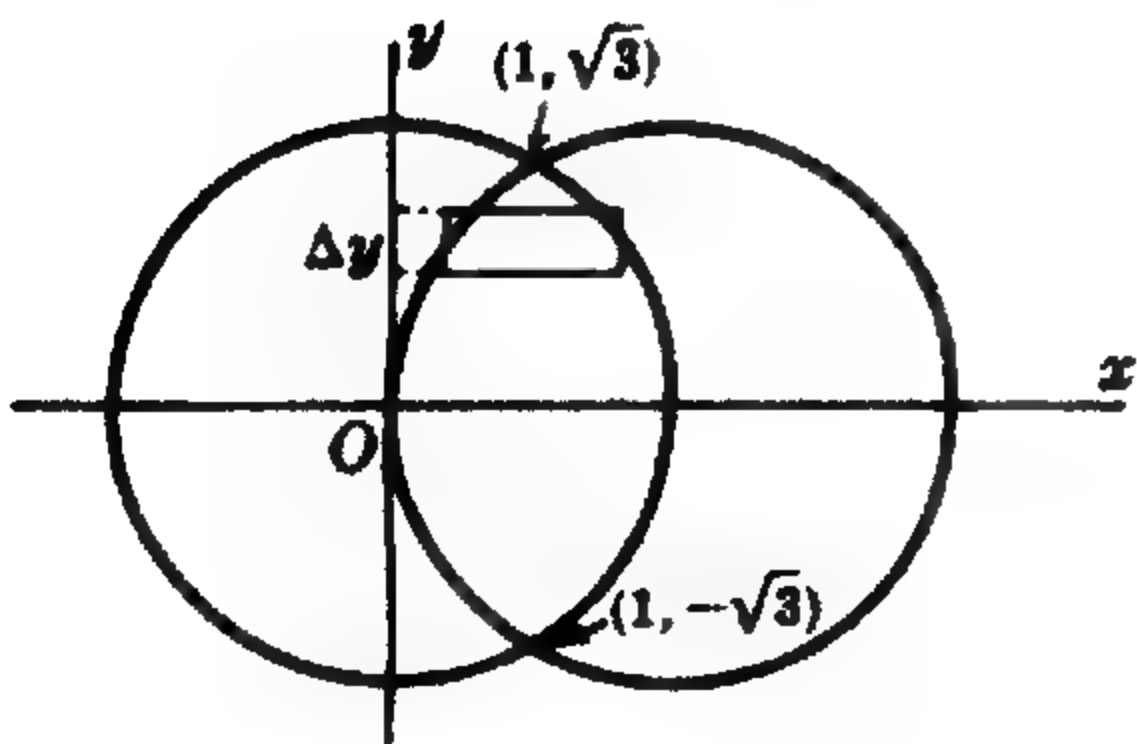
$$4 \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = \left[-\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ square units}$$



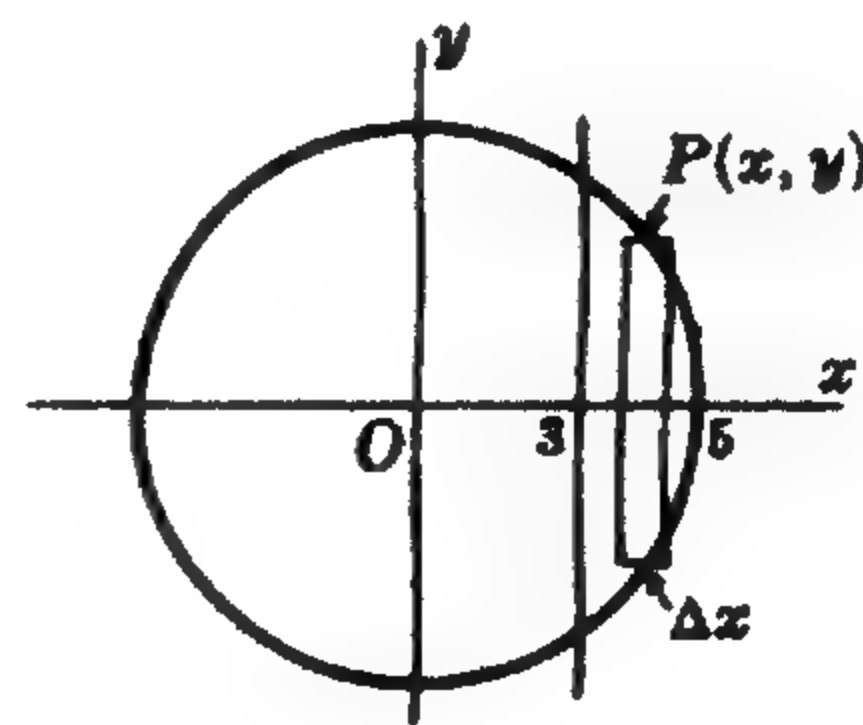
شكل ٣٤ - ١٠

١٠ - أوجد مساحة القطعة الصغرى الواقعة بين الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ والمستقيم $x = 3$. أنظر الشكل ٣٤ - ١١ .

$$A = \int_3^5 2y dx = 2 \int_3^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right]_3^5 = \left(\frac{25}{2} \pi - 12 - 25 \arcsin \frac{3}{5} \right) \text{ square units}$$



شكل ٣٤ - ١٢



شكل ٣٤ - ١١

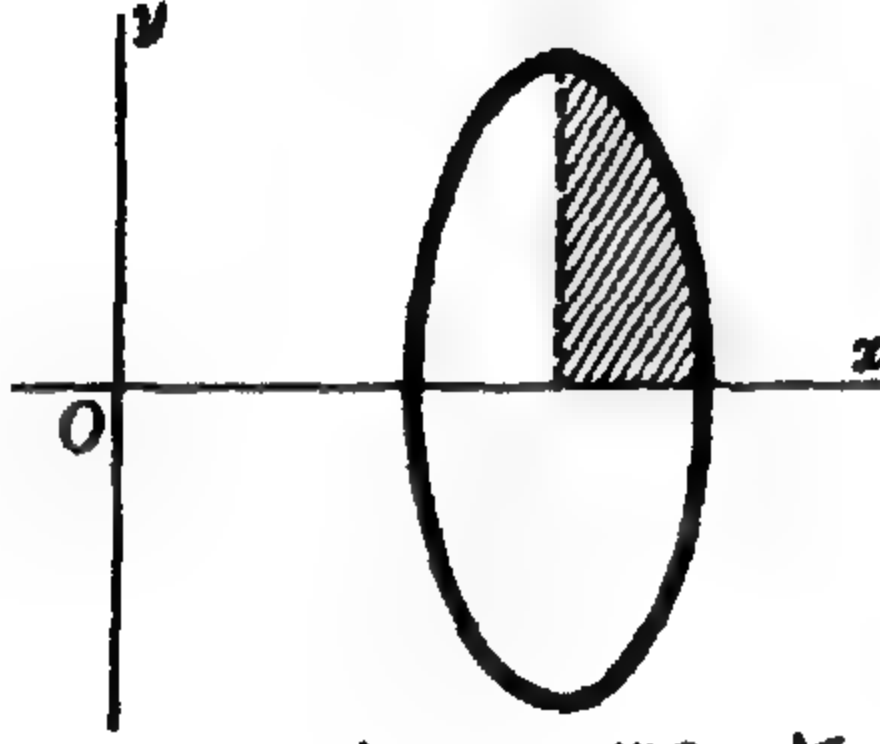
١١ - أوجد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4x$ و $x^2 + y^2 = 4$. أنظر الشكل ٣٤ - ١٢ .

تتقاطع الدائرتان عند النقطتين $(1 \pm \sqrt{3})$ ويمتد المستطيل المقرب من $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ إلى $x = \sqrt{4 - y^2}$. ولذلك فإن :

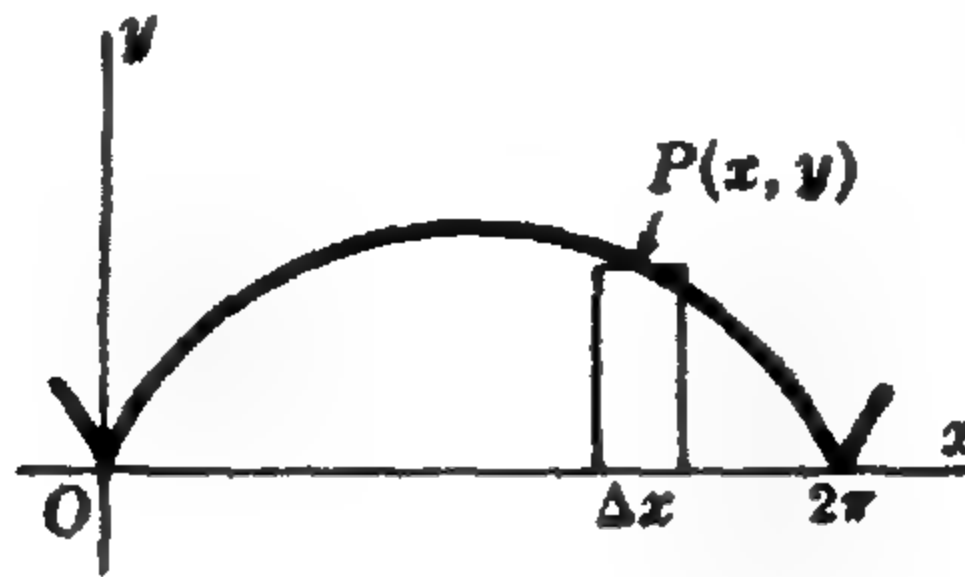
$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \{ \sqrt{4-y^2} - (2 - \sqrt{4-y^2}) \} dy = 4 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1) dy \\
 &= 4 \left[\frac{y}{2} \sqrt{4-y^2} + 2 \arcsin \frac{1}{2} y - y \right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) \text{ square units}
 \end{aligned}$$

١٢- أوجد مساحة عروة المنحنى $y^2 = x^2(4+x)$. أنظر الشكل ٣٤ - ١٢.

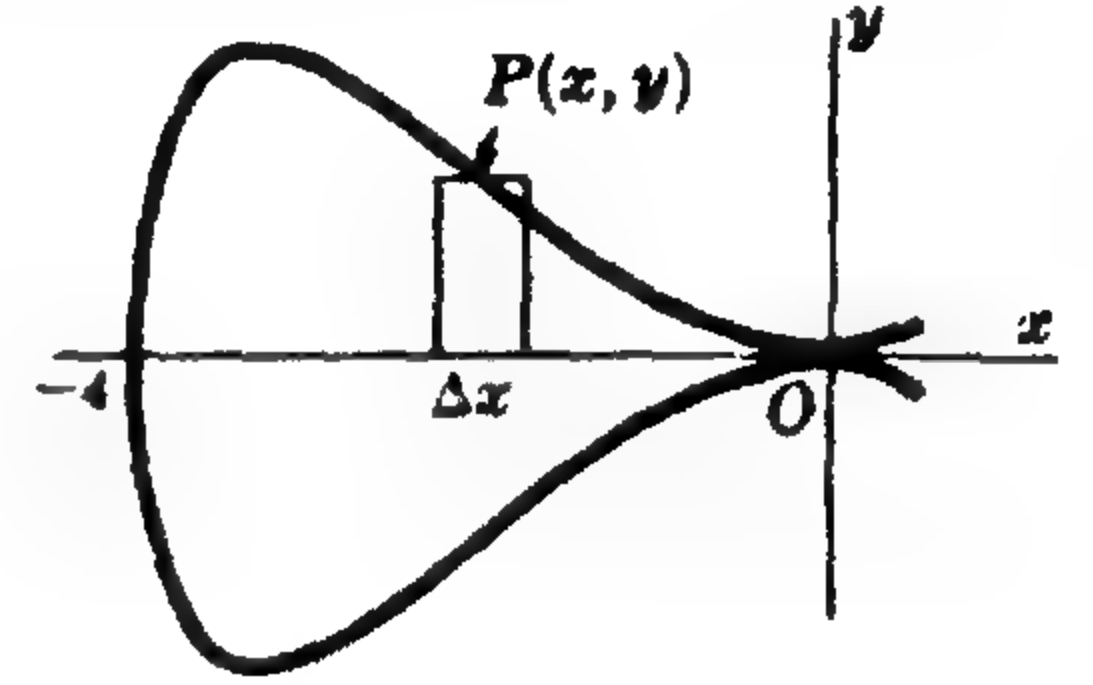
$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-4}^0 2y dx = 2 \int_{-4}^0 x^2 \sqrt{4+x} dx. \text{ Let } 4+x = z^2; \\
 A &= 4 \int_0^2 (z^2-4)^2 z^2 dz = 4 \left[\frac{z^7}{7} - \frac{8z^5}{5} + \frac{16z^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4096}{105} \text{ square units : ومنه}
 \end{aligned}$$



شكل ٣٤ - ١٥



شكل ٣٤ - ١٤



شكل ٣٤ - ١٣

١٣- أوجد المساحة الواقعة تحت عقد المنحنى التويرى (السيكلويد) $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$. أنظر الشكل ٣٤ - ١٤.

يرسم العقد عندما تتغير θ من 0 إلى 2π إذن $dx = (1 - \cos \theta) d\theta$ والمساحة هي :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi \text{ square units}
 \end{aligned}$$

١٤- أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $x = 3 + \cos \theta$, $y = 4 \sin \theta$. أنظر الشكل ٣٤ - ١٥.

ترسم المساحة المظلة في الشكل ($\frac{1}{4} \pi$ المساحة المطلوبة) عندما تتغير θ من 0 إلى $\frac{1}{2} \pi$ ولذلك فإن :

$$\begin{aligned}
 A &= -4 \int_0^{\pi/2} (4 \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta = 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= 8 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 4\pi \text{ square units}
 \end{aligned}$$

مسائل إضافية

١٥- أوجد المساحة المحددة بما يلي :

- | | |
|---|---|
| (ف) $y = \tan x$, $x=0$, $x=\frac{1}{4}\pi$ | (ا) $y = x^2$, $y=0$, $x=2$, $x=5$ |
| (ط) $y = x^2 - 4$, $y = 8 - 2x^2$ | (ب) $y = x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ |
| (ى) $y = x^3 - 4x^2$, $y = 4x^2$ | (ج) $y = 4x - x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ |
| (ك) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ | (د) $x = 1 + y^2$, $x=10$ |
| (ل) عقدة المنحنى $9ay^2 = x(3a - x)^2$ | (هـ) $x = 3y^2 - 9$, $x=0$, $y=0$, $y=1$ |
| (م) عقدة المنحنى $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x=0$, $x=2$ | (و) $x = y^2 + 4y$, $x=0$ |
| (ن) $y = e^{x/a} + e^{-x/a}$, $y=0$, $x=\pm a$ | (ز) $y = 9 - x^2$, $y = x + 3$ |
| (س) $xy = 12$, $y=0$, $x=1$, $x=e^2$ | (ح) $y = 2 - x^2$, $y = -x$ |
| (ع) $y = 1/(1+x^2)$, $y=0$, $x=\pm 1$ | |

(ص) قطاع دائري نصف قطره r وزاويته a .

(ق) قطع ناقص $x = a \cos t, y = b \sin t$.

(ر) $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$.

(ش) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.

(ت) المقد الأول من $y = e^{-ax} \sin ax$.

(ث) $y = xe^{-x^2}, y = 0$ والاحداثى الصادى الأكبر.

(خ) الفرعين $(2x - y)^2 = x^3$ و $x = 4$.

(ذ) داخل $y = 25 - x^2, 256x = 3y^2, 16y = 9x^2$.

الأجوبة :

36, (د)	22/3, (ج)	20, (ب)	39 square units (ا)
9/2, (ح)	125/6, (ز)	32/3, (و)	8, (هـ)
$8\sqrt{3}a^2/5$, (ك)	$2a^2/3$, (ى)	$512\sqrt{2}/15$, (ط)	32, (ف)
$1/2 \pi$, (س)	24, (ن)	$2a(e - 1/e)$, (م)	$(e^2 + 1/e^2 - 2)$, (ل)
6π , (ر)	πab , (ق)	$1/2 r^2 a$, (ص)	$1/2 \ln 2$, (ع)
$128/5$, (خ)	$1/2(1 - 1/\sqrt{e})$, (ث)	$(1 + 1/e^\pi)/2 a$, (ت)	$3\pi a^2/8$, (ش)
			98/3, square units (ذ)

نقصد بمتوسط الاحداثى الصادى للمنحنى $y = f(x)$ في الفترة $a \leq x \leq b$

القيمة :

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = \frac{\text{المساحة}}{\text{القاعدة}}$$

١٦- أوجد متوسط الاحداثى الصادى لـ (ا) نصف دائرة (ب) القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ من $x = -2$ إلى $x = 2$.

ج (ا) $\pi r/4$ (ب) $8/3$

١٧- (ا) أوجد متوسط الاحداثى الصادى لقطعة من الدويرى (السيكلونيد) $y = a(1 - \cos \theta), x = a(\theta - \sin \theta)$ وذلك بالنسبة لـ x .

(ب) نفس الشيء بالنسبة لـ θ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) d\theta = a \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3a}{2}, \quad (\text{ا})$$

١٨- المعادلات الآتية بالنسبة لجسم يسقط سقوطاً حراً $s = \frac{1}{2}gt^2$ و $v = gt = \sqrt{2gs}$.

(ا) بين أن القيمة المتوسطة لـ v بالنسبة لـ t في الفترة $0 \leq t \leq t_1$ تساوى نصف السرعة النهائية.

(ب) بين أن القيمة المتوسطة لـ v بالنسبة لـ s في الفترة $0 \leq s \leq s_1$ تساوى ثلثي السرعة النهائية.

الفصل الخامس والشارشون

حجوم أجسام دورانية

يتولد الجسم الدوراني عن دوران قطعة سطح مستوية حول مستقيم واقع في مستواها ونسبه محور الدوران . ويمكن إيجاد حجم الجسم الدوراني باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

طريقة القرص :

- أ - عندما يكون محور الدوران جزءا من حدود قطعة السطح .
- (١) نرسم شكلا تقريبا بين قطعة السطح وشريحة ممثلة عموديا على محور الدوران ، والمستطيل المقرب كما في الفصل السابق .
- (٢) اكتب حجم القرص (الاسطوانة) الناتج من دوران المستطيل المقرب حول محور الدوران وشكل مجموع الحجوم الناتجة عن دوران المستطيلات الـ n .
- (٣) افرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية واستخدم النظرية الأساسية .

أنظر المسألين ١ - ٢

ب - عندما لا يكون محور الدوران جزءا من حدود قطعة السطح .

- (١) كما في (١) أعلاه .
- (٢) مد أضلاع المستطيل المقرب $ABCD$ لتقطع محور الدوران في E و F كما في الشكل ٣٥ - ٣ في المسألة ٣ . وعندما يدور المستطيل المقرب حول محور الدوران تتكون حلقة يساوي حجمها الفرق بين الحجمين المولدين بدوران المستطيلين $EABF$ و $ECDF$ حول المحور . اكتب الفرق بين هذين الحجمين ثم يتبع كما في (٢) أعلاه .
- (٣) كما في (٣) أعلاه .

أنظر المسألين ٣ - ٤

طريقة القشرة :

- (١) بين برسم تقريبي قطعة السطح وشريحة ممثلة موازية لمحور الدوران والمستطيل المقرب .
- (٢) اكتب حجم القشرة الاسطوانية الناتجة من دوران المستطيل المقرب حول محور الدوران (وهو يساوي متوسط المحيط \times الارتفاع \times السمك) ثم اجمع بالنسبة المستطيلات الـ n .
- (٣) افرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية وطبق النظرية الأساسية .

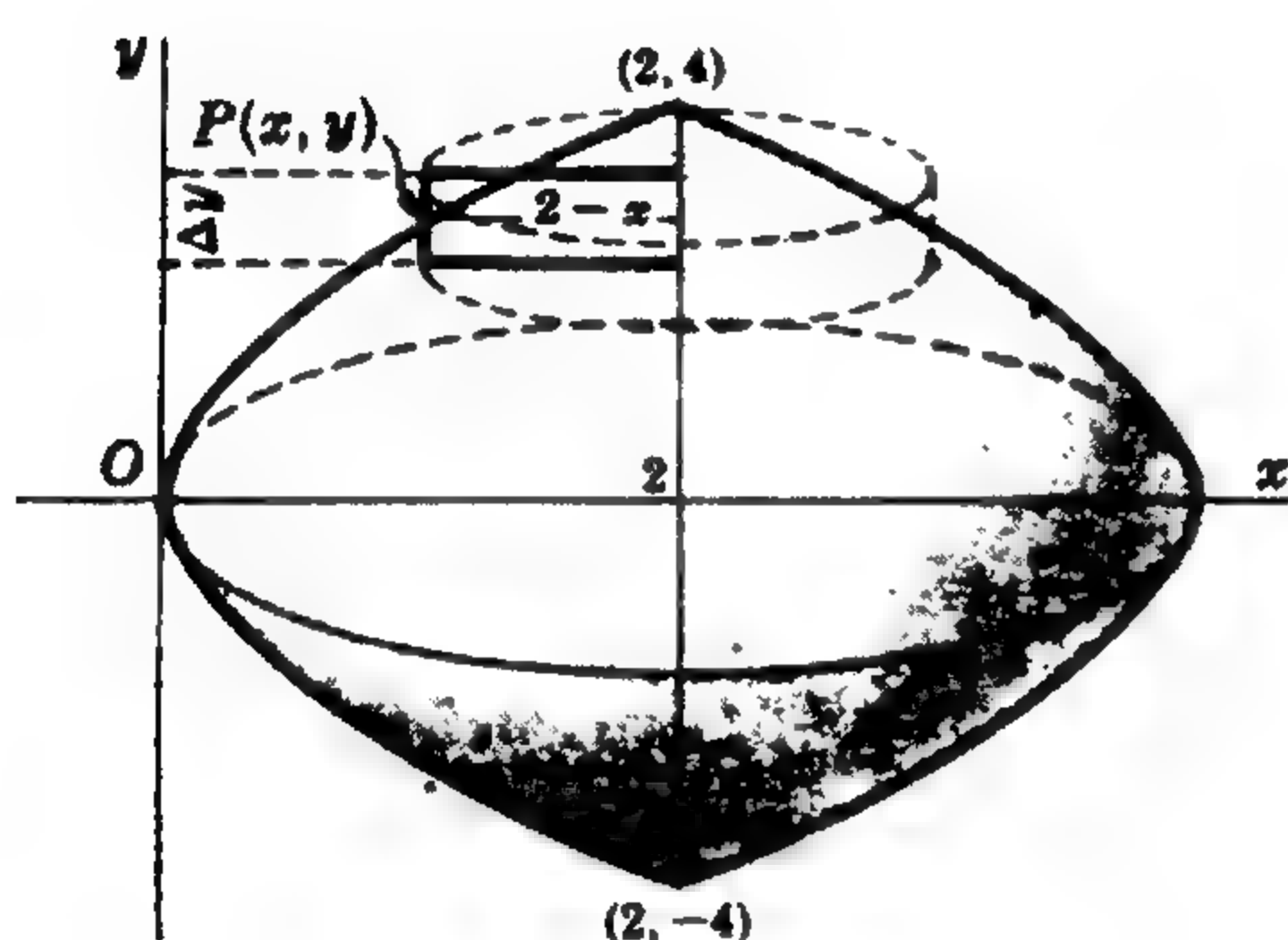
أنظر المسائل ٥ - ٨

مسائل محلولة

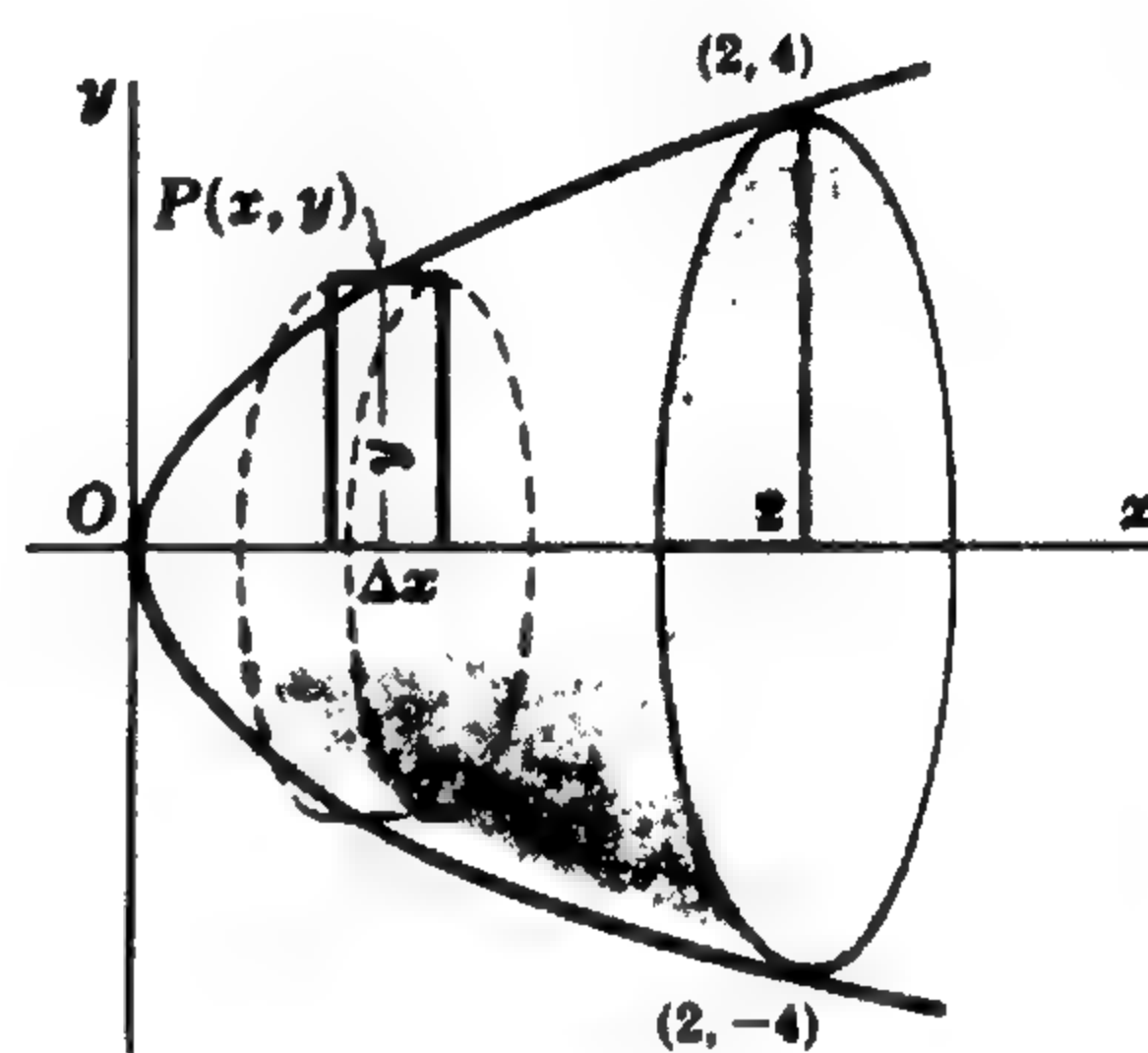
١ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح الواقعة في الربع الأول حول المحور السيني علماً بأن القطعة محددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والوتر البؤري العمودي ($x = 2$) .

بالإشارة إلى الشكل ١ - ٣٥ . نقسم المساحة إلى شرائح رأسية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين في الشكل ١ - ٣٥ حول المحور السيني ينتج قرص نصف قطره y وارتفاعه Δx وحجمه $\pi y^2 \Delta x$ ومجموع أحجام الـ n قرصاً الموافقة للمستطيلات الـ n يساوي $\sum \pi y^2 \Delta x$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi x^2 \Big|_0^2 = 16\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٢ - ٣٥



شكل ١ - ٣٥

٢ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والوتر البؤري العمودي ($x = 2$) ، حول الوتر البؤري العمودي المذكور .

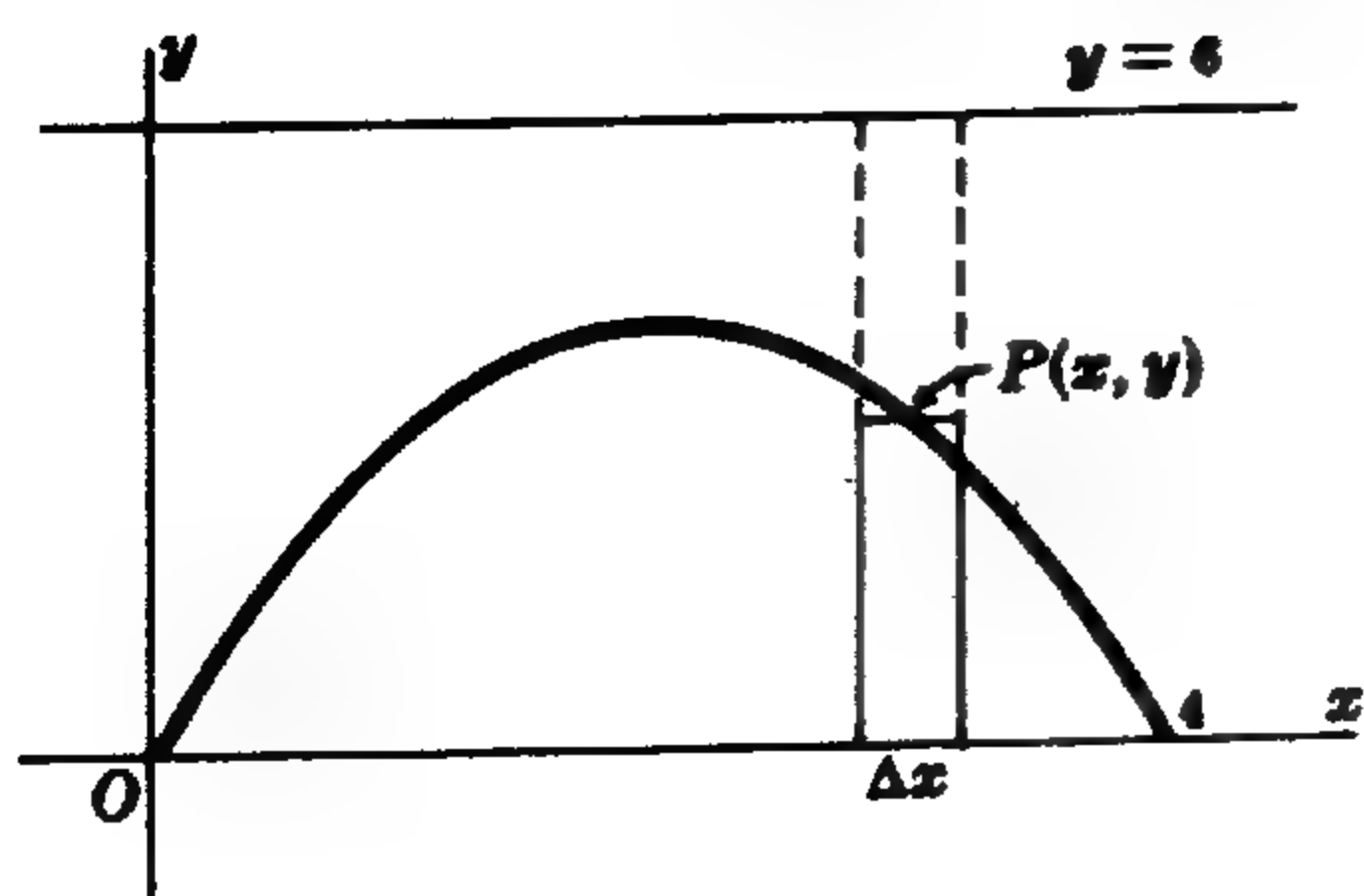
بالإشارة إلى الشكل ٢ - ٣٥ . نقسم المساحة إلى شرائح أفقية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين في الشكل ٢ - ٣٥ حول الوتر البؤري المذكور ينتج قرص نصف قطره $2 - x$ وارتفاعه Δy وحجمه $\pi (2 - x)^2 \Delta y$ والحجم المطلوب يساوي .

$$V = \int_{-4}^4 \pi (2 - x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 (2 - x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256}{15} \pi \text{ cubic units}$$

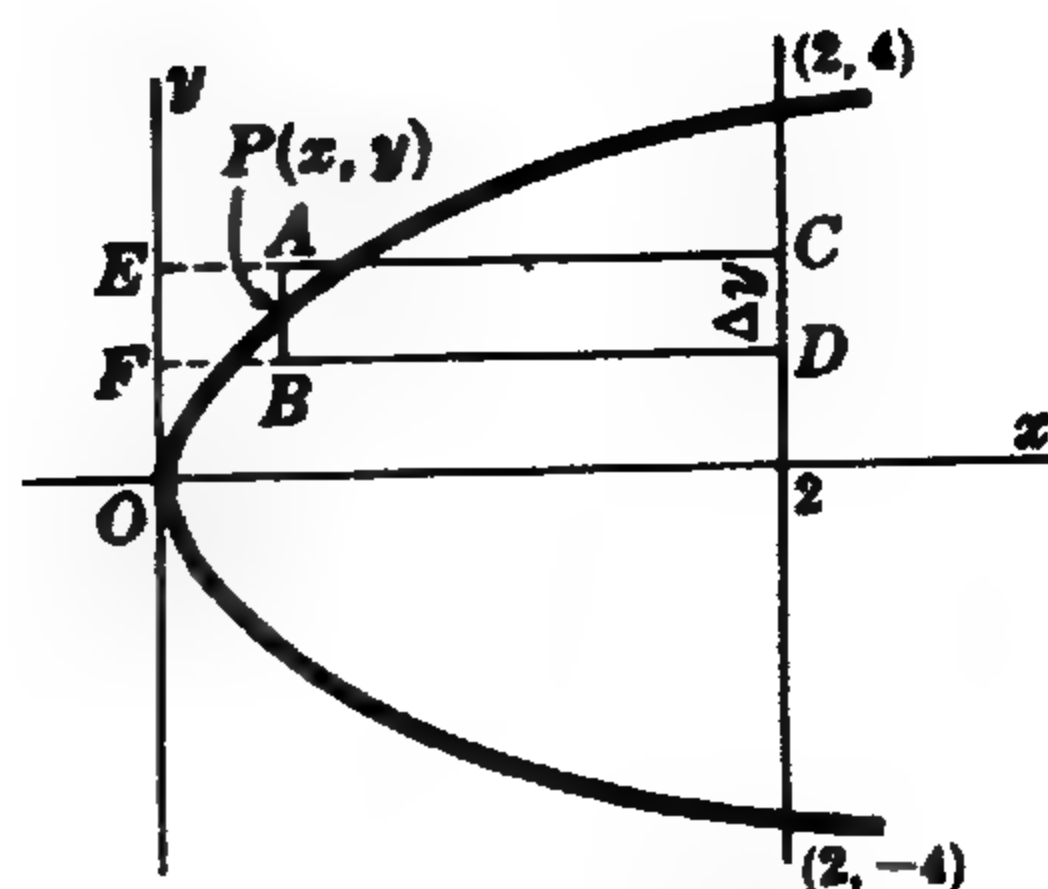
٣ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والوتر البؤري العمودي ($x = 2$) ، حول المحور الصادي .

بالإشارة إلى الشكل ٣ - ٣٥ . نقسم المساحة إلى شرائح أفقية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين في الشكل ٣ - ٣٥ حول المحور تنتج حلقة يساوي حجمها الفرق بين الحجمين الناتجين من دوران المستطيل $ECDF$ (بعدها $2, \Delta y$) ودوران المستطيل $EABF$ (بعدها $x, \Delta y$) حول المحور الصادي أي أن هذا الحجم يساوي $\pi (2)^2 \Delta y - \pi (x)^2 \Delta y$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_{-4}^4 4\pi dy - \int_{-4}^4 \pi x^2 dy = 2\pi \int_0^4 (4 - x^2) dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{64}\right) dy = \frac{128}{5} \pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٥ - ٤



شكل ٣٥ - ٣

٤ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المقطعة من القطع المكافئ $y = 4x - x^2$ بالمحور السيني حول المستقيم $y = 6$. بالإشارة إلى الشكل ٣٥ - ٤. نقسم المساحة بشرائح رأسية. إن الجسم الناتج من دوران المستطيل المقرب حول المستقيم $y = 6$ هو حلقة حجمها $\pi(6)^2 \Delta x - \pi(6 - y)^2 \Delta x$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \pi \int_0^4 \{(6)^2 - (6 - y)^2\} dx = \pi \int_0^4 (12y - y^2) dx$$

$$= \pi \int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4) dx = \frac{1408\pi}{15} \text{ cubic units}$$

٥ - بالإشارة إلى الشكل ٣٥ - ٥ لنفرض أن الحجم المطلوب ينتج بالدوران حول المحور الصادي لقطعة السطح الواقعة في الربع الأول تحت المنحنى $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$. لنقسم هذه المساحة إلى n شريحة ولنقرب كل شريحة إلى مستطيل، فعندما تدور الشريحة المثلثة حول المحور الصادي ينتج قشرة اسطوانية ارتفاعها y_k ونصف قطرها الداخلي $1 - \xi_k$ والخارجي ξ_k وحجمها :

$$\Delta_k V = \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2)y_k \quad (i)$$

واستنادا إلى نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات يكون :

$$\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2 = \left. \frac{d}{dx}(x^2) \right|_{x=\xi_k'} \cdot (\xi_k - \xi_{k-1}) = 2\xi_k' \Delta_k x \quad (ii)$$

حيث $\xi_{k-1} < \xi_k' < \xi_k$ وعلى هذا تأخذ المعادلة (i) الشكل :

$$\Delta_k V = 2\pi \xi_k' y_k \Delta_k x = 2\pi \xi_k' f(x_k) \Delta_k x$$

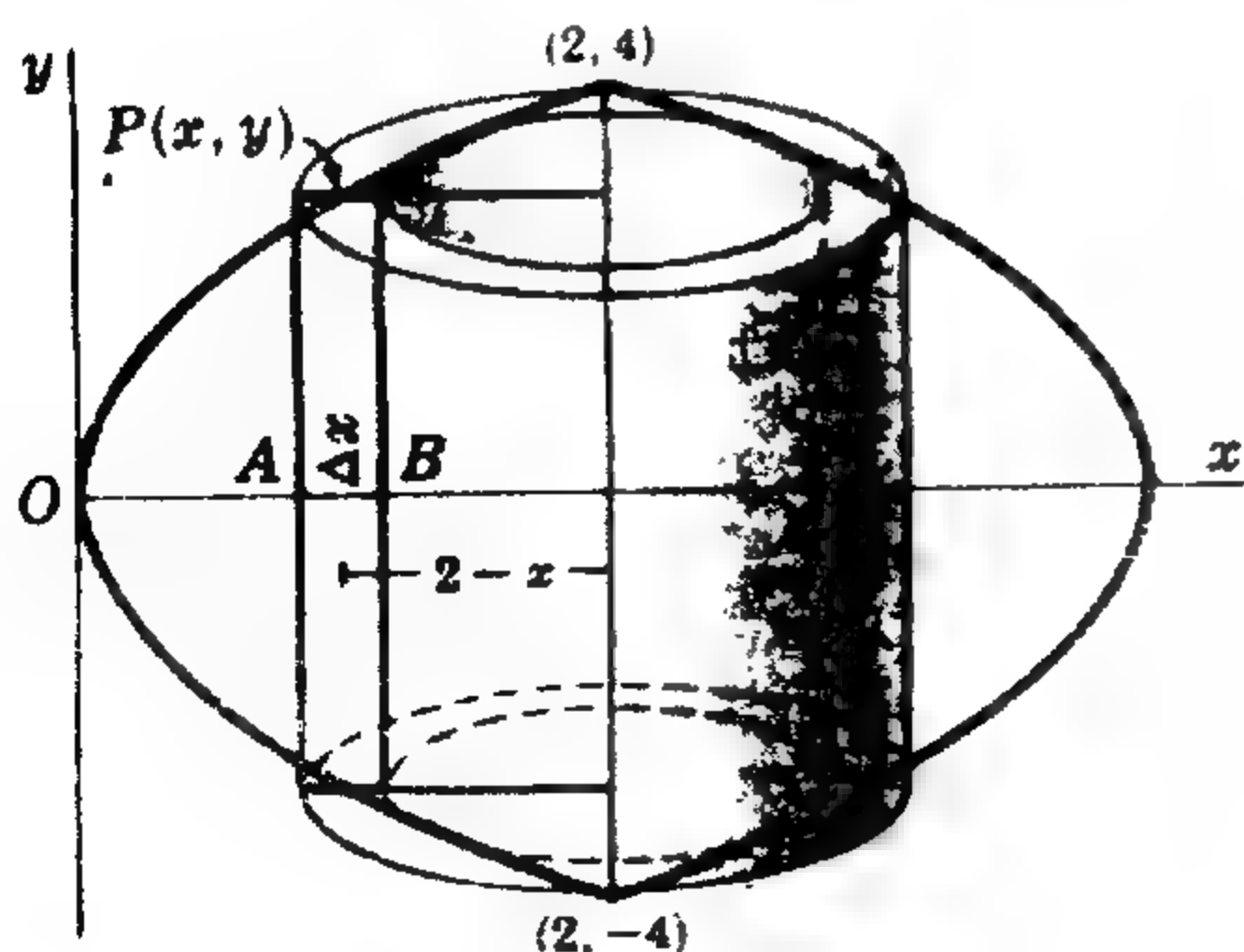
وماء استنادا إلى نظرية بليس يكون :

$$V = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k' f(x_k) \Delta_k x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

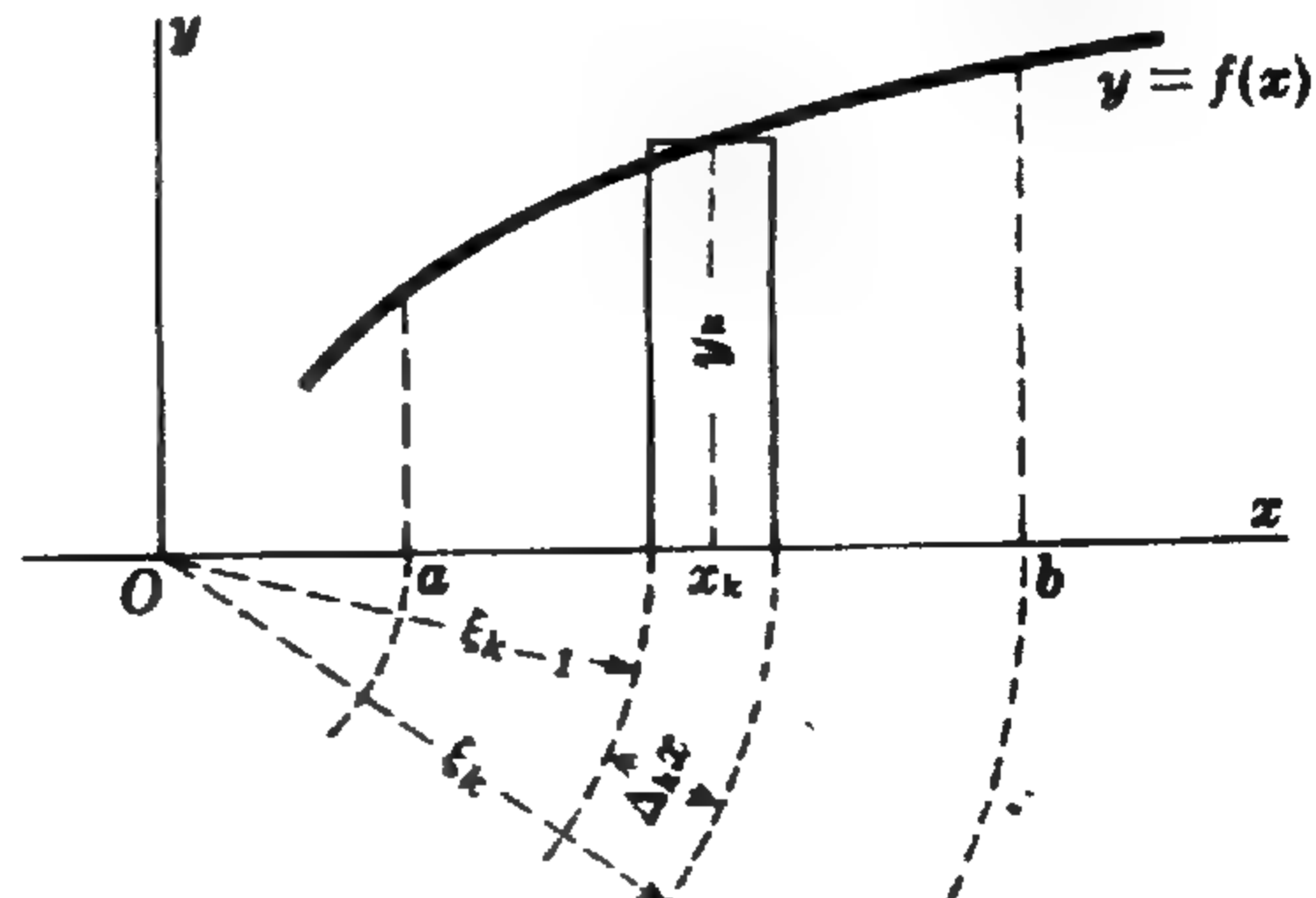
ملاحظة : لو أننا اخترنا النقط x_k في منتصفات الفترات الجزئية، المستخدمة في الفصل السابق، فإننا لا نحتاج إلى تطبيق نظرية بليس لأن x_k' المعروفة بـ (ii) تكون استنادا إلى المسألة ١٧ (ب) في الفصل ٢١، $x_k' = \frac{1}{2}(\xi_k + \xi_{k-1}) = x_k$. وهكذا يكون الحجم الناتج من دوران المستطيلات إلى n حول المحور الصادي هو

$$\sum_{k=1}^n 2\pi x_k f(x_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n g(x_k) \Delta_k x$$

من النقط (i) من الفصل ٣٣.



شكل ٣٥ - ٦



شكل ٣٥ - ٥

٦ - أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمستقيم $x = 2$ حول المستقيم $x = 2$. استخدم طريقة القشرة (أنظر المسألة ٢).

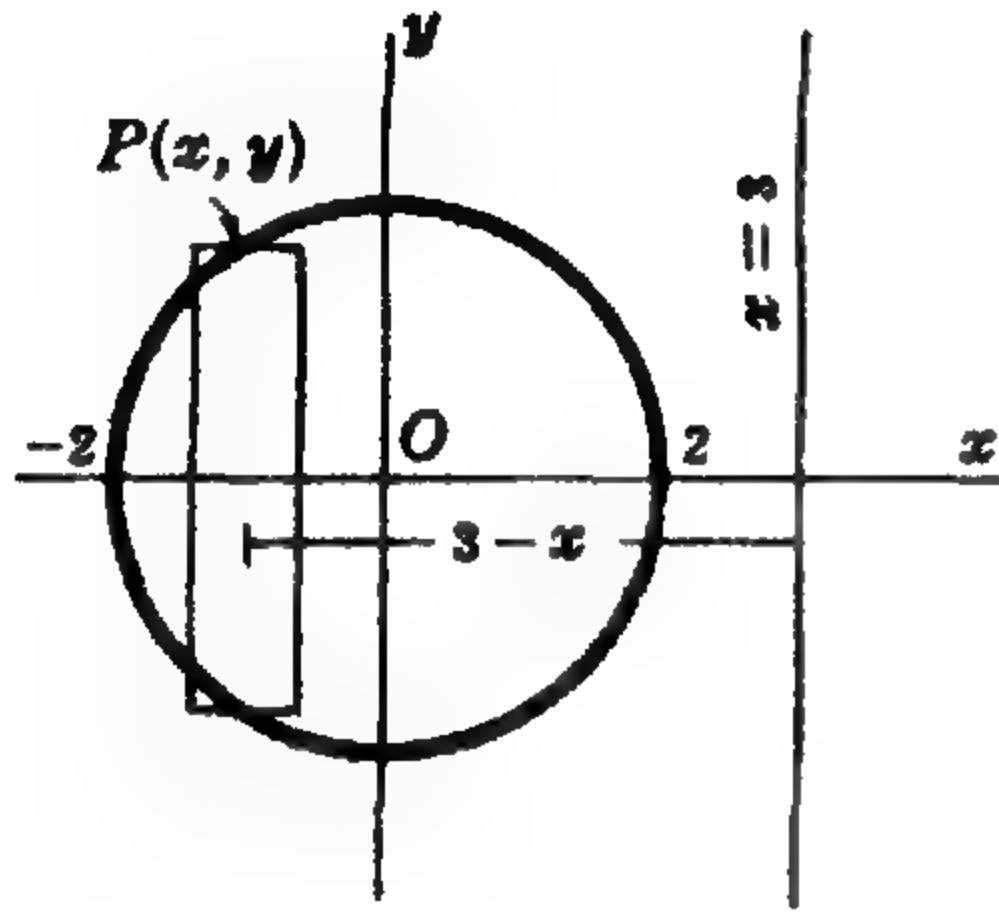
لننظر في الشكل ٦ - ٣٥ ونقسم المساحة إلى شرائح رأسية وبسهولة نختار النقطة P بحيث تكون x لهذه النقطة في منتصف القطعة AB .

إن ارتفاع المستطيل المقرب المبين بالشكل ٦ - ٣٥ يساوي $2y = 4\sqrt{2x}$ وعرضه Δx ، وبعد المتوسط عن الوتر البؤري يساوي $2 - x$. وعندما يدور المستطيل حول الوتر البؤري العمودي تنتج قشرة اسطوانية حجمها $2\pi(2-x) \cdot 4\sqrt{2x} \Delta x$ والحجم المطلوب هو :

$$V = 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 (2-x)\sqrt{x} dx = 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2}) dx = \frac{256\pi}{15} \text{ cubic units}$$

٧ - أوجد الحجم الناتج بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ حول المستقيم $x = 3$.

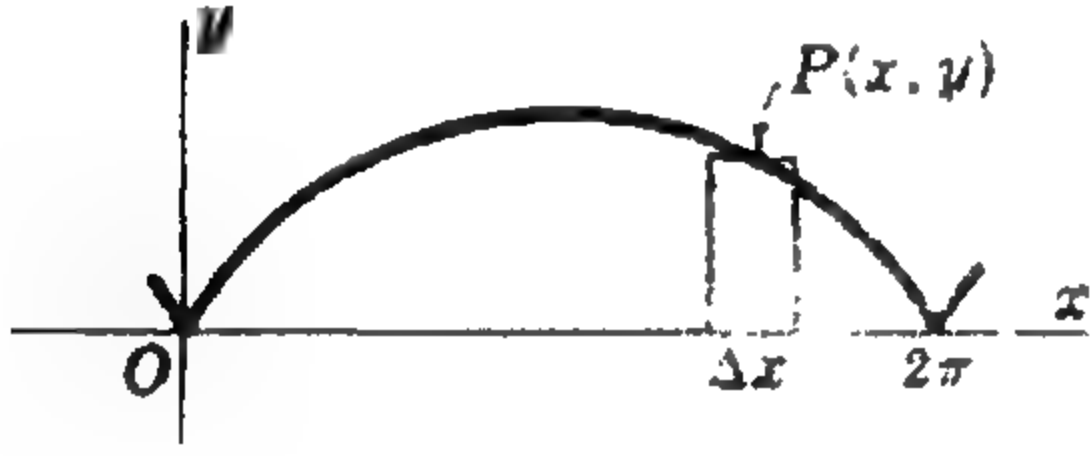
سنستخدم طريقة القشرة. نلاحظ أن ارتفاع المستطيل المقرب هو $2y$ وسمكه Δx والبعد المتوسط عن محور الدوران يساوي $3 - x$ ، والحجم المطلوب هو :



شكل ٣٥ - ٧

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-2}^2 2y(3-x) dx = 4\pi \int_{-2}^2 (3-x)\sqrt{4-x^2} dx \\ &= 12\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4\pi \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx \\ &= \left[12\pi \left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} \right) + \frac{4\pi}{3} (4-x^2)^{3/2} \right]_{-2}^2 \\ &= 24\pi^2 \text{ cubic units} \end{aligned}$$

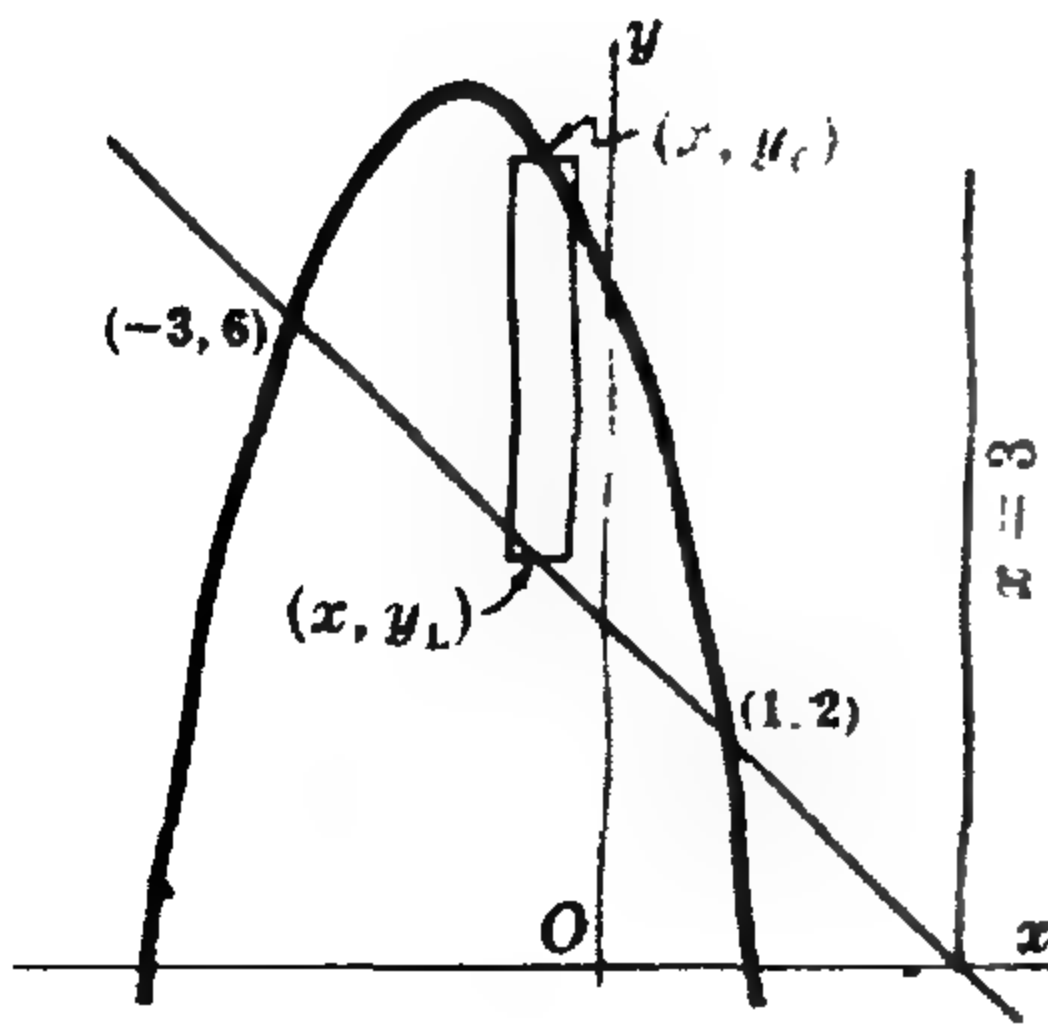
٨ - أوجد حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور الصادي لقطعة السطح الواقعة بين العقد الأول للمنحنى الدويري (السيكلويد) $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$ والمحور السيني. استخدم طريقة القشرة.



شكل ٣٥ - ٨

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} xy' d\theta = 2\pi \int_0^{2\pi} (\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (\theta - 2\theta \cos \theta + \theta \cos^2 \theta - \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{4}\theta^2 - 2(\theta \sin \theta + \cos \theta) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\theta \sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta) + \cos \theta + \sin^2 \theta + \frac{1}{3}\cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 6\pi^3 \text{ cu. un.} \end{aligned}$$

٩ - أوجد الحجم الناتج عن دوران قطعة السطح الواقعة بين $y = -x^2 - 3x + 6$ و $x + y - 3 = 0$ حول $x = 3$ (ب) $v = 0$.



شكل ٣٥ - ٩

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-3}^1 (y_C - y_L)(3-x) dx \quad (أ) \\ &= 2\pi \int_{-3}^1 (x^2 - x^2 - 9x + 9) dx = 256\pi/3 \text{ cubic units} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^1 \{(y_C)^2 - (y_L)^2\} dx \quad (ب) \\ &= \pi \int_{-3}^1 (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27) dx = 1792\pi/15 \text{ cu. un} \end{aligned}$$

مسائل إضافية

أوجد في المسائل ١٠ - ١٩ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدماً طريقة القرص (أ) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ١٠ - $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$: حول المحور x ج: 2500π
 ١١ - $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$: حول المحور x ج: $256\pi/3$
 ١٢ - $y = 4x^2, x = 0, y = 16$: حول المحور y ج: 32π
 ١٣ - $y = 4x^2, x = 0, y = 16; y = 16$: حول $y = 16$ ج: $4096\pi/15$
 ١٤ - $y^2 = x^3, y = 0, x = 2$: حول المحور x ج: 4π
 ١٥ - $y = x^3, y = 0, x = 2; x = 2$: حول $x = 2$ ج: $16\pi/5$
 ١٦ - $y^2 = x^4(1 - x^2)$: حول المحور x ج: $4\pi/35$
 ١٧ - $4x^2 + 9y^2 = 36$: حول المحور x ج: 16π
 ١٨ - $4x^2 + 9y^2 = 36$: حول المحور y ج: 24π
 ١٩ - داخل $x = 9 - y^2$ بين $x = 0$ و $x - y - 7 = 0$ حول المحور y ج: $963\pi/5$

أوجد في المسائل ٢٠ - ٢٦ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدماً طريقة القرص (ب) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ٢٠ - $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$: حول المحور y ج: 625π
 ٢١ - $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$: حول المحور y ج: $128\sqrt{3}\pi$
 ٢٢ - $y = 4x^2, x = 0, y = 16$: حول المحور x ج: $2048\pi/5$
 ٢٣ - $y = x^3, x = 0, y = 8$: حول $x = 2$ ج: $144\pi/5$
 ٢٤ - $y = x^3, y = 4x - x^2$: حول المحور x ج: $32\pi/3$
 ٢٥ - $y = x^3, y = 4x - x^2$: حول $y = 6$ ج: $64\pi/3$
 ٢٦ - $x = 9 - y^2, x - y - 7 = 0$: حول $x = 4$ ج: $153\pi/5$

أوجد في المسائل ٢٧ - ٣٢ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدماً طريقة القشرة (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ٢٧ - $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$: حول المحور y ج: $369\pi/2$ (٢٢) ، $5\pi/6$ (٣١) ، $64\pi/3$ (٣٠) ، $320\pi/7$ (٢٩) ، 375π (٢٨) ، 625π (٢٧) .
 ٢٨ - $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$: حول $x = 6$ ج: 31π ، $y = x^2 - 5x + 6, y = 0$: حول المحور y ج: 30π ، $y = x^3, y = 0, x = 2$: حول $y = 8$ ج: 32π ، داخل $x = 9 - y^2$ بين $x = 0$ و $x - y - 7 = 0$ حول $y = 3$ ج: 3π .

أوجد في المسائل ٣٣ - ٣٩ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدماً الطريقة المناسبة (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ٣٣ - $y = c - x^2, y = 0, x = 0, x = 1$: حول المحور y ج: $\pi(1 - 1/c)$
 ٣٤ - $y = \sin 2x$ حول المحور x ج: $\frac{1}{4}\pi^2$
 ٣٥ - $y = e^x \sin x$ حول المحور x ج: $\pi(e^{2\pi} - 1)/8$
 ٣٦ - $y = e^x \sin x$ حول المحور y ج: $\pi[(\pi - 1)e^\pi - 1]$
 ٣٧ - $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$: حول المحور x ج: $5\pi^2$
 ٣٨ - المنحنى القلبي $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$: حول المحور x ج: $64\pi/3$
 ٣٩ - $y = 2x^2, 2x - y + 4 = 0$: حول $x = 2$ ج: 27π
 ٤٠ - أوجد حجم المخروط الذي نصف قطره قاعدته السفلى R ونصف قطر قاعدته العليا r وارتفاعه h .

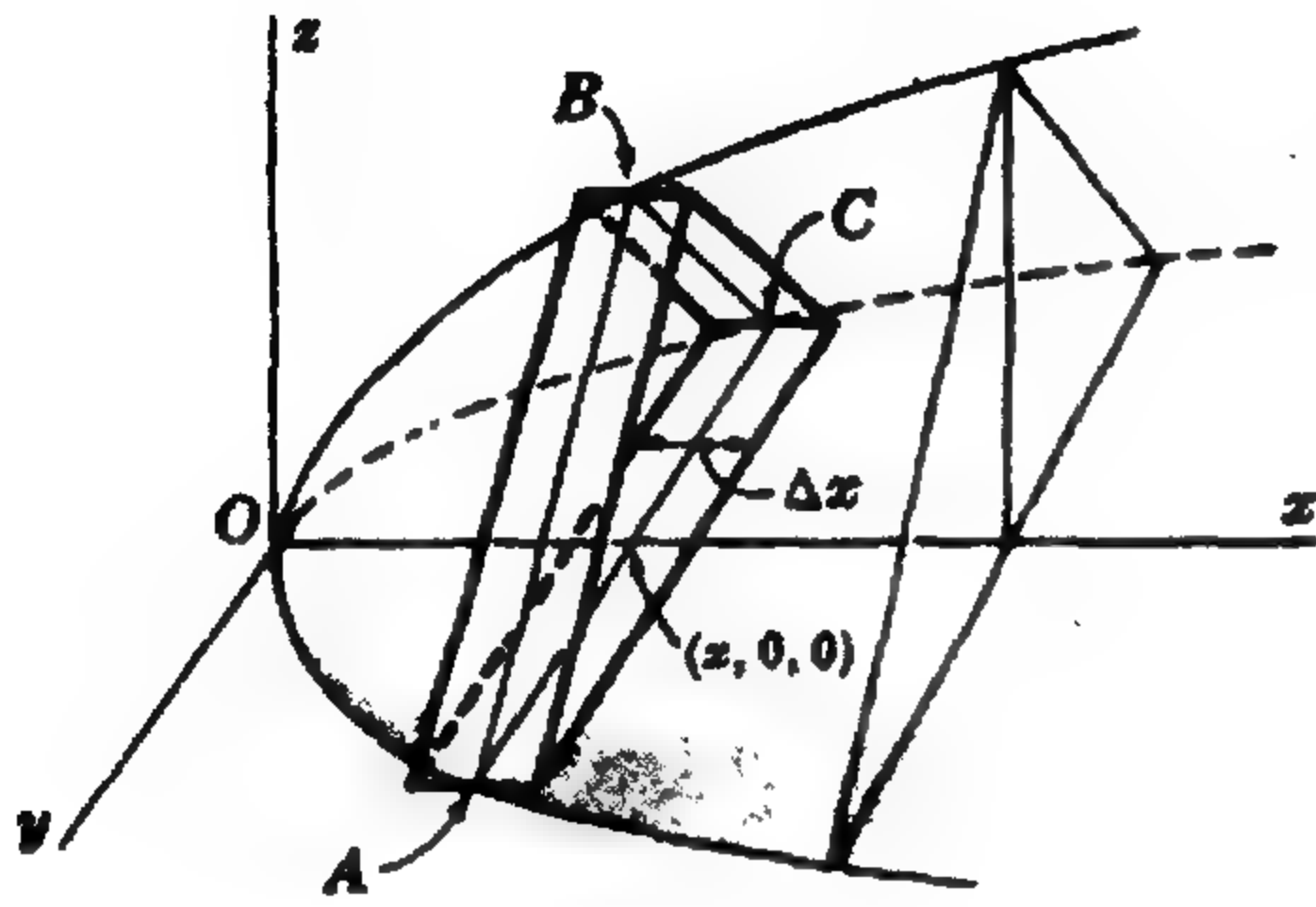
ج: $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$ cubic units

الفصل السادس والثلاثون

حجوم الأجسام ذات المقاطع المعروفة

حجم الجسم الدوراني : الناتج عن الدوران حول المحور السيني لقطعة سطح مستوية محددة بالمنحنى $y = f(x)$

والمحور السيني والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ يعطى بـ $\int_a^b \pi y^2 dx$. ويمكن تفسير دالة التكامل $\pi y^2 = \pi \{f(x)\}^2$ على أنها مساحة مقطع الجسم بمستوى عمودى على المحور السيني على بعد x من نقطة الأصل .



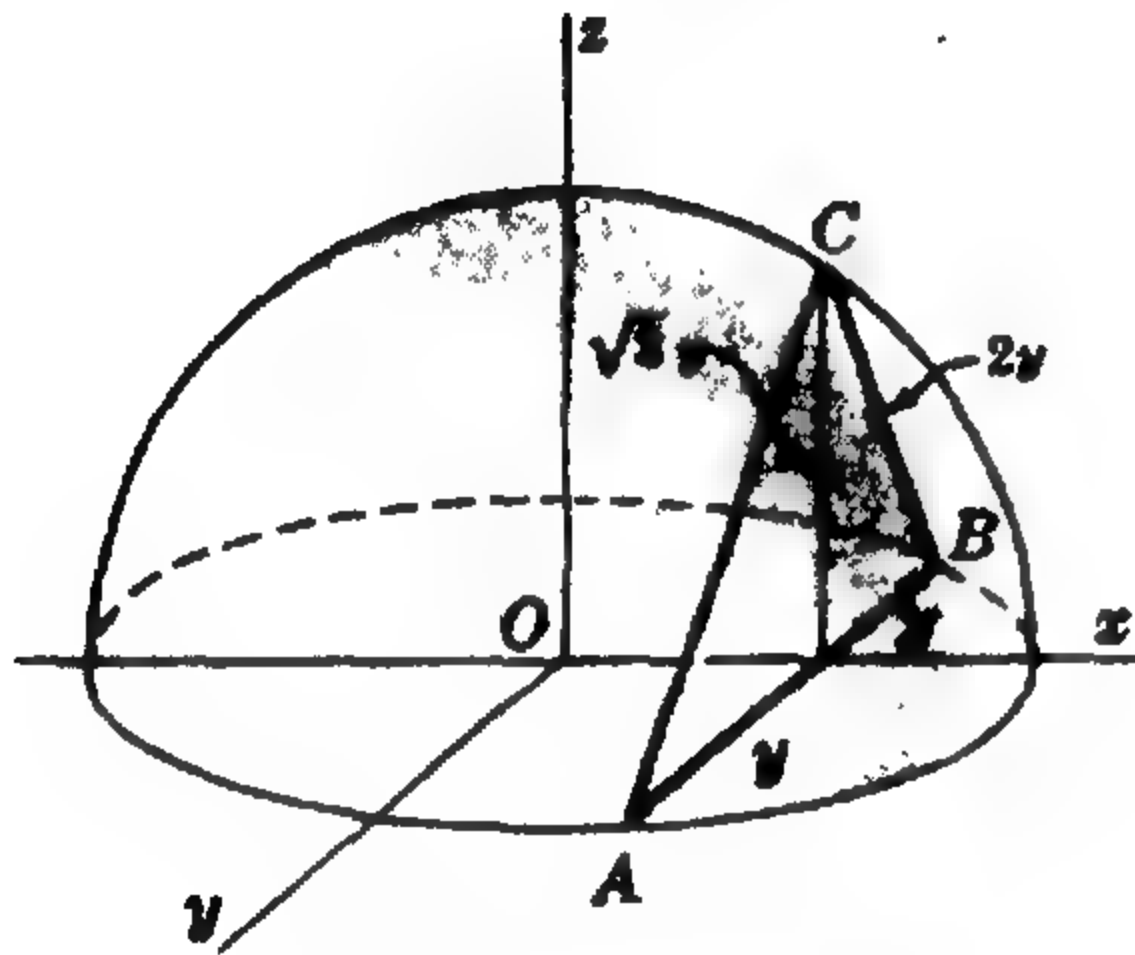
شكل ٣٦ - ١

وبالعكس إذا كان من الممكن التعبير عن مساحة المقطع ABC للجسم بمستوى عمودى على المحور السيني واقع على بعد x من نقطة الأصل على شكل دالة $A(x)$ في x فإن حجم الجسم يعطى

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

مسائل محلولة

١ - جسم قاعدته دائرية نصف قطرها 4 units . أوجد حجم هذا الجسم إذا كان مقطع الجسم بمستوى عمودى على قطر ثابت هو مثلث متساوى الأضلاع .



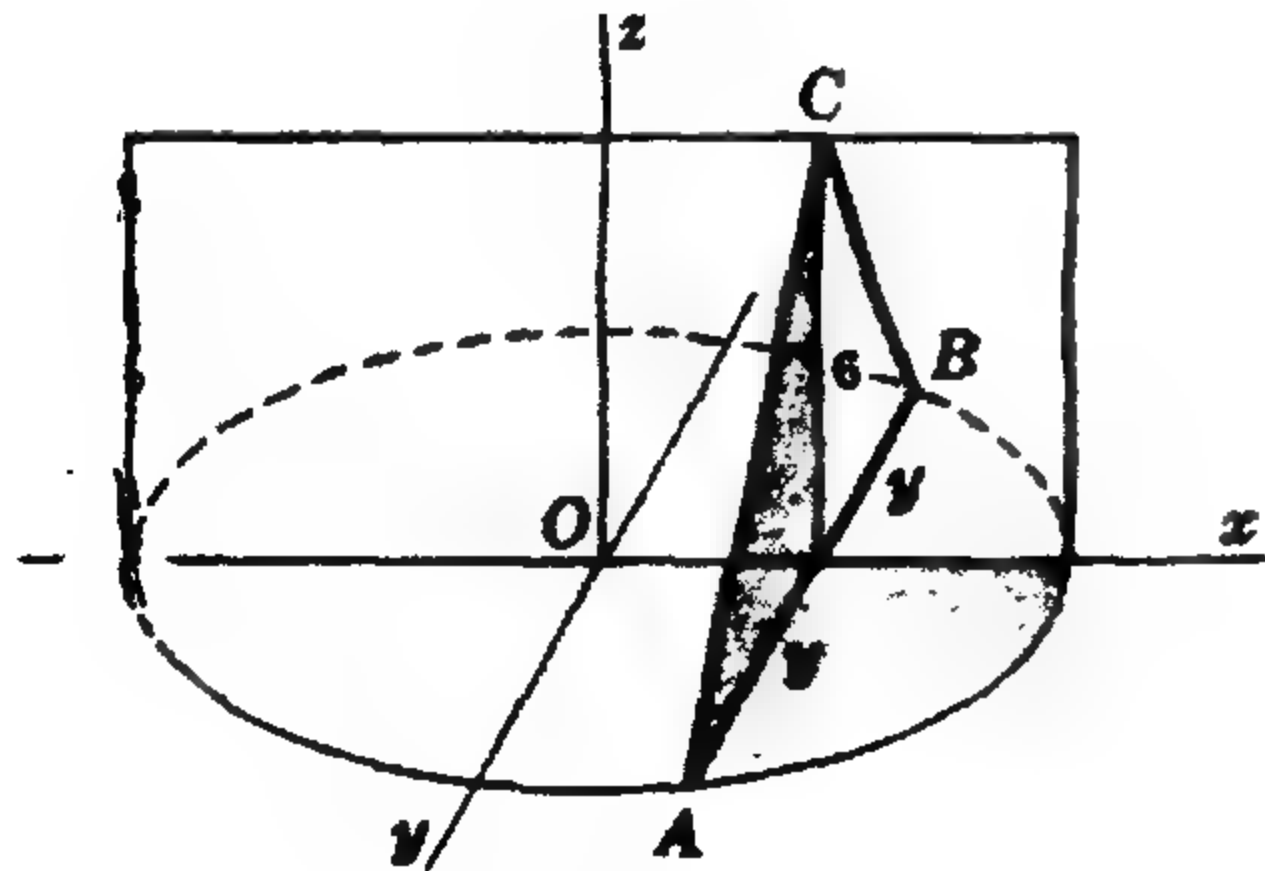
شكل ٣٦ - ٢

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ٣٦-٢ ولنفرض أن المحور السيني هو القطر الثابت . إذن معادلة الدائرة هي $x^2 + y^2 = 16$. والمقطع ABC هو مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $2y$ ومساحته $A(x) = \sqrt{3} y^2 = \sqrt{3} (16 - x^2)$. والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_{-4}^4 A(x) dx = \sqrt{3} \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx$$

$$= \sqrt{3} \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 = \frac{256}{3} \sqrt{3} \text{ cubic units}$$

٢ - قاعدة جسم على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 10 وطول محوره الأصغر 8 . أوجد حجم هذا الجسم إذا كان كل مقطع عمودى له مع المحور الأكبر هو مثلث متساوى الساقين وارتفاعه 6 .



شكل ٣٦ - ٣

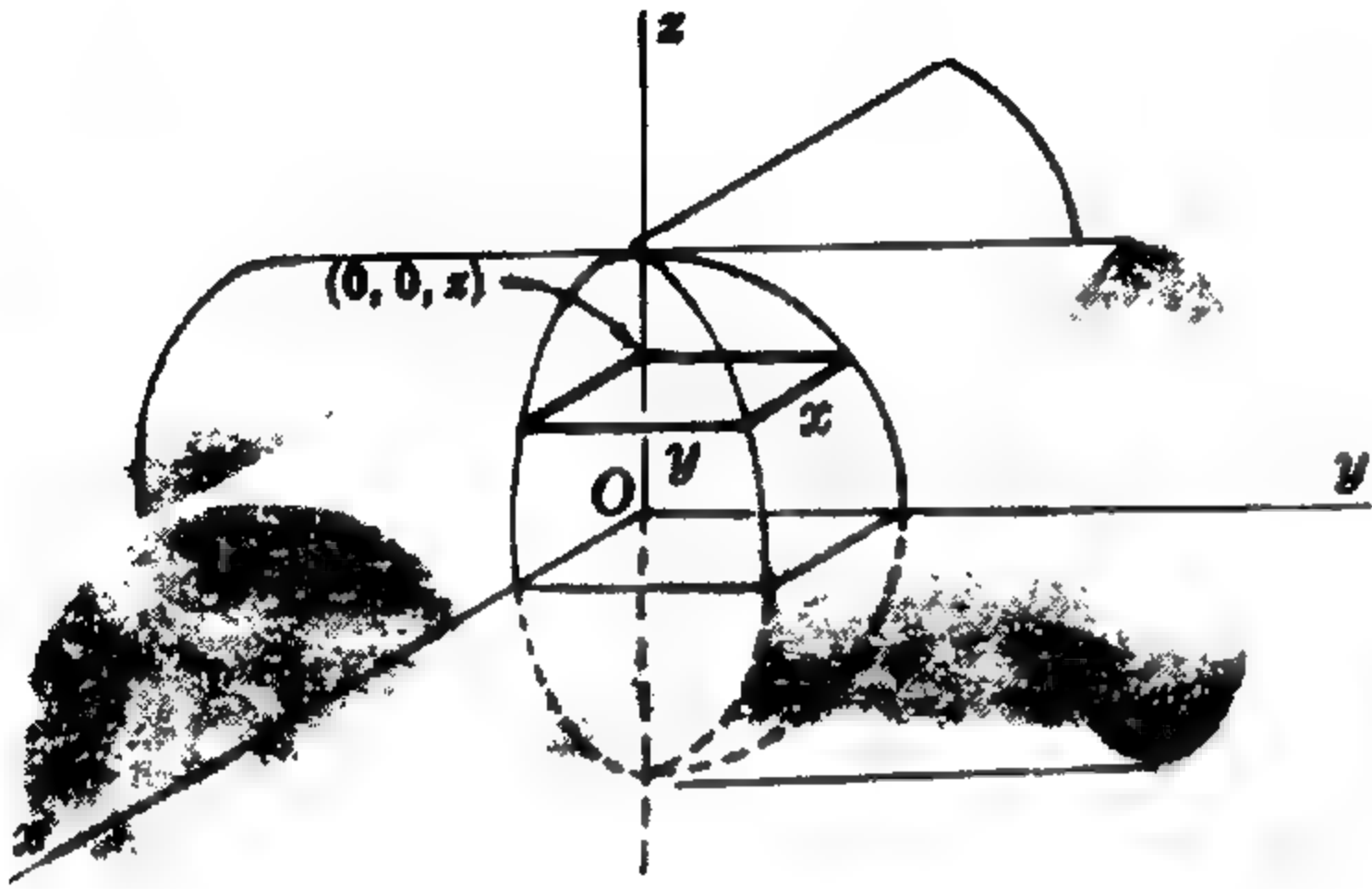
اعتبر القطع الناقص المبين في الشكل ٣٦-٣ والذي معادلته $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. إن المقطع ABC مثلث متساوى الساقين قاعدته $2y$ وارتفاعه 6 ومساحته $A(x) = 6y = 6 \cdot \frac{3}{4} \sqrt{25 - x^2}$. والحجم المطلوب هو :

$$V = \frac{24}{5} \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 60\pi \text{ cubic units}$$

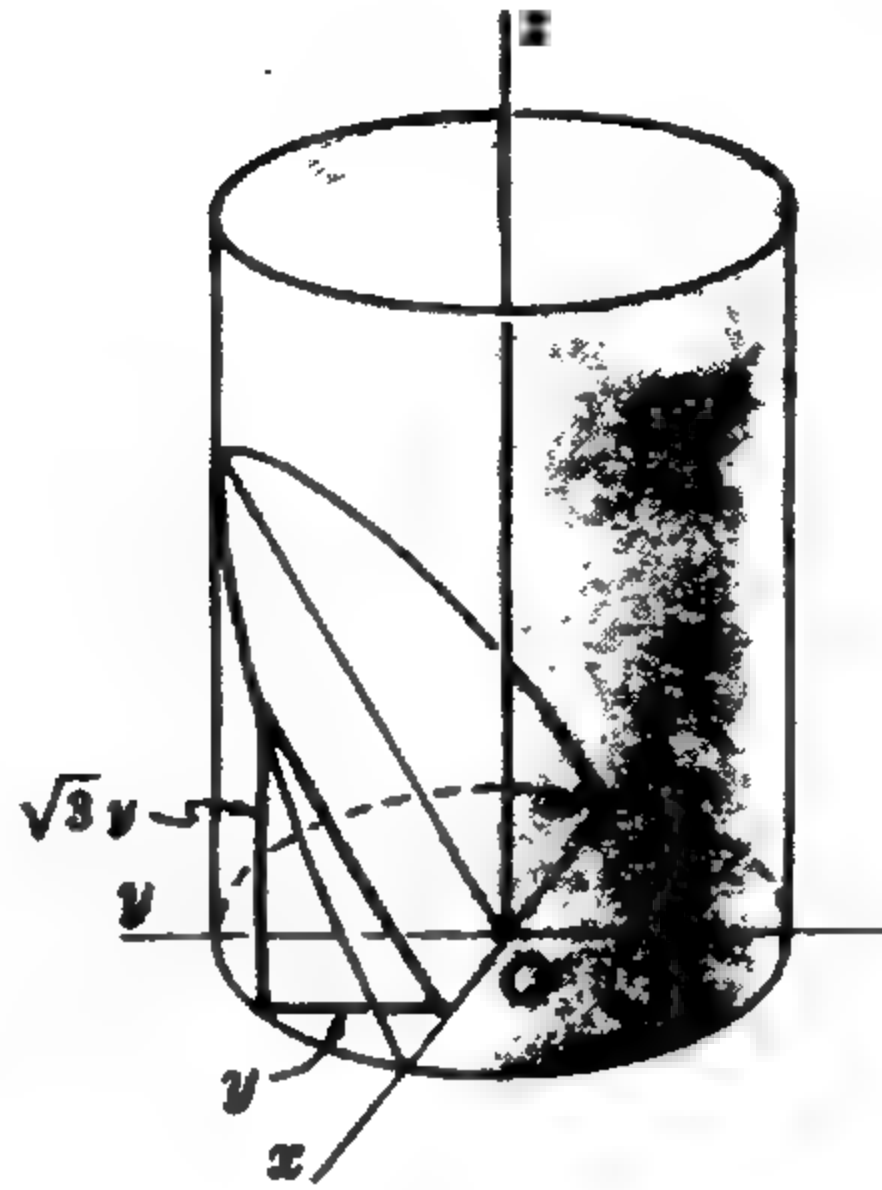
٣ - أوجد حجم القطعة المقطوعة من الجسم المكافئ الدوراني $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = z$ بالمستوى $z = 10$.

بالإشارة إلى الشكل ٣٦ - ٤ . نجد أن مقطع الجسم بمستوى موازى للمستوى xOy على بعد z من نقطة الأصل هو قطع ناقص مساحته $\pi xy = \pi(4\sqrt{z})(5\sqrt{z}) = 20\pi z$. وبالتالي فإن :

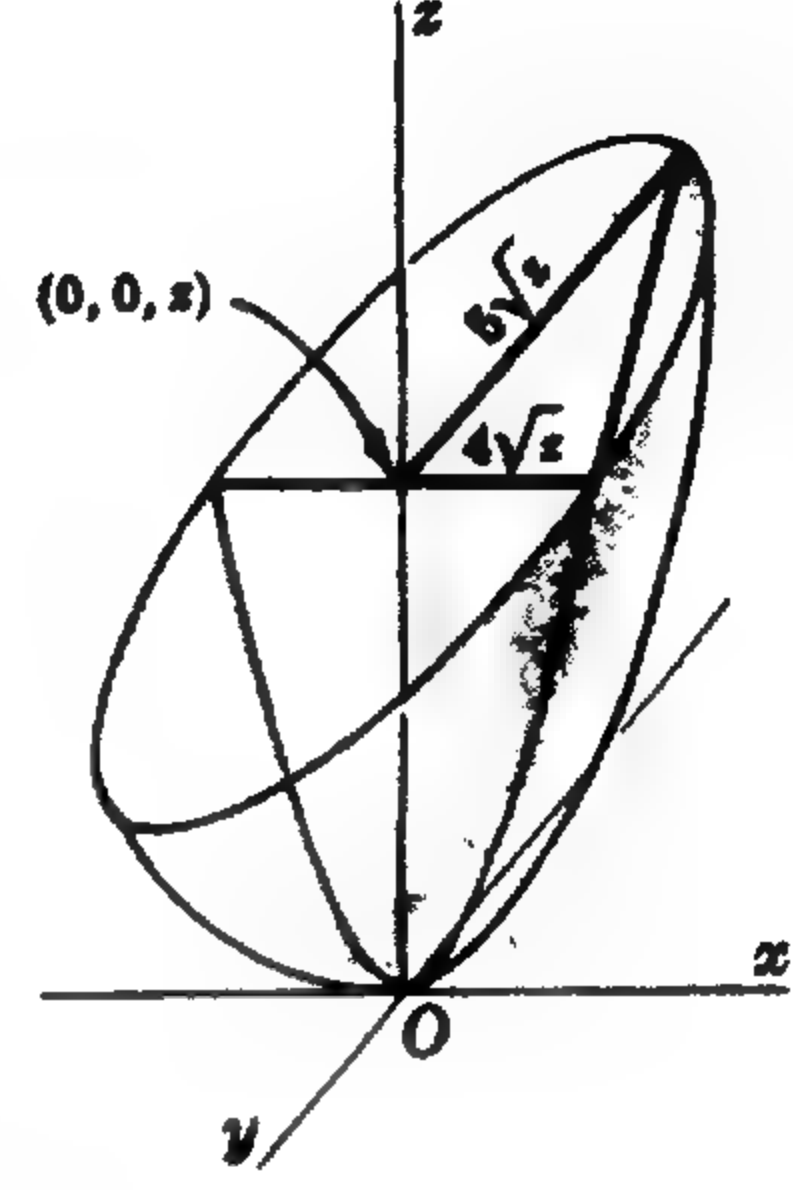
$$V = 20\pi \int_0^{10} z dz = 1000\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ - ٦



شكل ٣٦ - ٥



شكل ٣٦ - ٤

٤ - أحدث مقطعين في قطعة خشبية دائرية نصف قطرها 8 cm ، أحد المقطعين عمودى على محور القطعة والآخر يميل على الأول بزاوية 60° . فإذا تقابل المقطعان على مستقيم يمر بالمركز . فأوجد حجم قطعة الخشب المقطعة .

بالإشارة إلى الشكل ٣٦ - ٥ . نأخذ نقطة الأصل في مركز القطعة الخشبية والمحور السينى على الخط المشترك للمقطعين . ولنأخذ الجانب الموجب للمحور الصادى على وجه المقطع الأول . إن شكل المقطع المتولد بالمستوى العمودى على المحور السينى هو مثلث قائم إحدى زواياه 60° ، وطول الضلع المجاور لهذه الزاوية y وطول الضلع الآخر $y\sqrt{3}$ ، ومساحة المقطع إذن هي $\frac{1}{2}\sqrt{3}y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}(64 - x^2)$. وبالتالي فإن :

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3} \int_{-8}^8 (64 - x^2) dx = \frac{1024}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

٥ - يتقاطع محوراً اسطوانتين دائريتين نصف قطريهما متساويان r ، بزاوية قائمة . أوجد حجم المشترك بين الاسطوانتين .
أنظر إلى الشكل ٣٦ - ٦ ولنفرض أن معادلتى الاسطوانتين هما $x^2 + z^2 = r^2$ و $y^2 + z^2 = r^2$. شكل مقطع الحجم المطلوب بمستوى عمودى على المحور z هو مربع طول ضلعه $2x = 2y = 2\sqrt{r^2 - z^2}$ ومساحته $4(r^2 - z^2)$. وبالتالي فإن :

$$V = 4 \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz = \frac{16r^3}{3} \text{ cubic units}$$

٦ - أوجد حجم المخروط القائم الذى ارتفاعه h وقاعدته قطع ناقص طول محوره الأكبر $2a$ وطول محوره الأصغر $2b$.

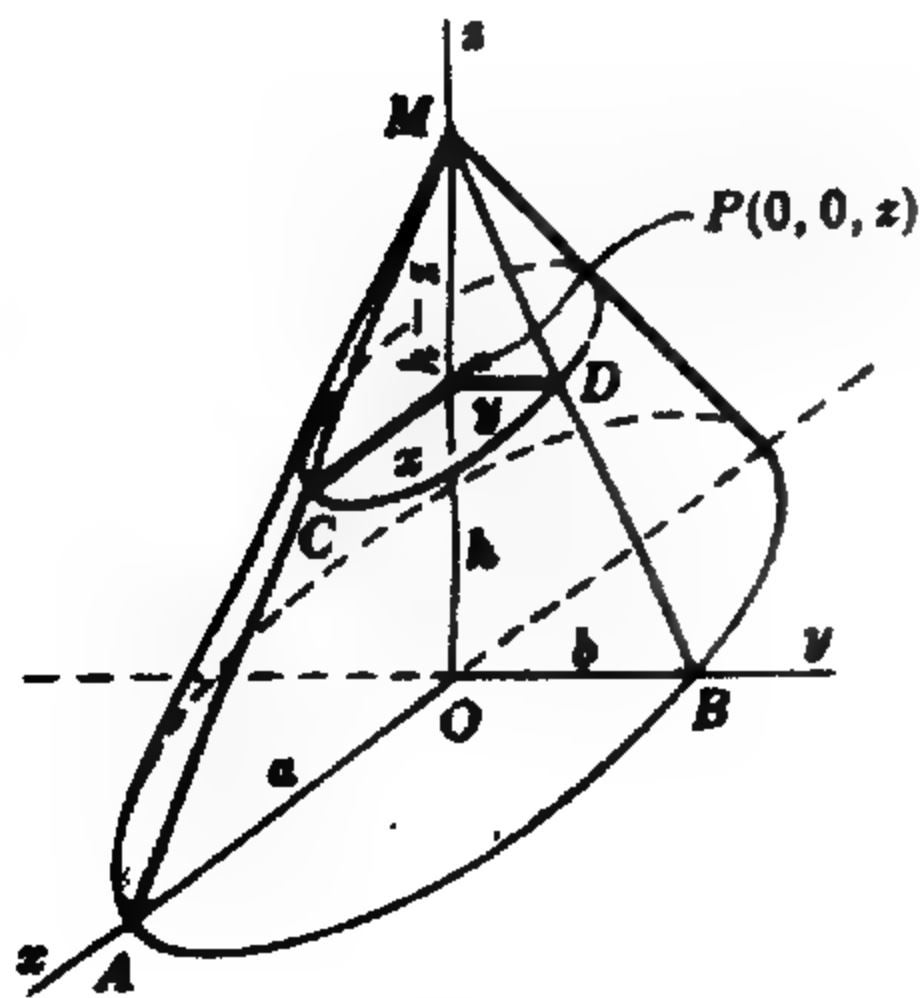
(أنظر إلى الشكل ٣٦ - ٧) . إن شكل مقطع المخروط بمستوى موازى لقاعدته هو قطع ناقص طول محوره الأكبر $2x$ وطول الأصغر $2y$.

ومن المثلثات المتشابهة في الشكل المرافق ٣٦ - ٧ نجد أن :

$$\frac{y}{b} = \frac{h-z}{h} \quad \text{أو} \quad \frac{PD}{OB} = \frac{PM}{OM} \quad \text{كذلك} \quad \frac{x}{a} = \frac{h-z}{h} \quad \text{أو} \quad \frac{PC}{OA} = \frac{PM}{OM}$$

ومساحة المقطع تساوى $\pi xy = \frac{\pi ab(h-z)^2}{h^2}$. وبالتالي فإن :

$$V = \frac{\pi ab}{h^3} \int_0^h (h-z)^2 dz = \frac{1}{3}\pi abh \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ - ٧

مسائل إضافية

٧ - جسم قاعدته دائرية الشكل نصف قطرها 4 units وحدات . أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع للجسم عمودى على قطر ثابت (المحور x في شكل المسألة ١) هو (أ) نصف دائرة (ب) مربع (ج) مثلث قائم متساوى الساقين يقع وتره في مستوى القاعدة .

ج : (أ) $128\pi/3$ ، (ب) $1024/3$ ، (ج) $256/3$ cubic units

٨ - جسم قاعدته على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 10 ومحوره الأصغر 8 . أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع للجسم عمودى على المحور الأكبر هو مثلث قائم متساوى الساقين يقع أحد ساقيه في مستوى القاعدة .

ج : $640/3$ cubic units

٩ - جسم قاعدته القطعة الواقعة بين القطع المكافئ $y^2 = 12x$ والمستقيم $x = 3$ وشكل كل مقطع للجسم عمودى على محور القطع هو مربع . أوجد حجمه .

ج : 216 cubic units

١٠ - تقع قاعدة جسم في الربع الأول بين المستقيم $4x + 5y = 20$ والمحورين الإحداثيين . أوجد حجمه إذا علمت أن شكل كل مقطع له عمودى على المحور x هو نصف دائرة .

ج : $10\pi/3$ cubic units

١١ - جسم قاعدته على شكل دائرة $x^2 + y^2 = 16x$. وشكل كل مقطع له عمودى على المحور مستطيل ارتفاعه ضعفا بعد المستوى القاطع عن نقطة الأصل . أوجد حجمه

ج : 1024π cubic units

١٢ - جسم على شكل بوق يتولد من حركة دائرة يستند طرفا أحد أقطارها الواقع في الربع الأول على القطعين المكافئين $y^2 + 8x = 64$ و $z^2 + 16x = 64$ بحيث تبقى موازية للمستوى xz . أوجد حجم الجسم .

ج : $256\pi/15$ cubic units

١٣ - رأس مخروط في النقطة $(a, 0, 0)$ وقاعدته الدائرة $y^2 + z^2 - 2by = 0, x = 0$. أوجد حجمه .

ج : $1/3 \pi ab^2$ cubic units

١٤ - أوجد حجم الجسم الواقع بين الجسم المكافئ الدوراني $y^2 + 4z^2 = x$ والمستوى $x = 4$.

ج : 4π cubic units

١٥ - برميل على شكل مجسم قطع ناقص دوراني قطعت منه قطعتان متساويتان من الطرفين . أوجد حجمه إذا علمت أن ارتفاعه 1.5 m وأن نصف قطر مقطعه الأوسط 0.75 m وأن نصف قطر نهايته 0.5 m .

ج : $11\pi/16m^3$

١٦ - مقطع جسم بمستوى عمودى على المحور x هو دائرة يستند طرفا أحد أقطارها على القطعين المكافئين $y^2 = 9x$ و $x^2 = 9y$. أوجد حجمه .

ج : $6561\pi/280$ cubic units

١٧ - مقطع جسم بمستوى عمودى على المحور x هو مربع يستند طرفا أحد قطريه على القطعين المكافئين $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$. أوجد حجمه .

ج : $144/35$ cubic units

١٨ - حفر ثقب دائري نصف قطره 1 cm في كرة نصف قطرها 3 cm بحيث ينطبق محور الثقب على أحد أقطار الكرة . أوجد حجم الجزء المتبقى من الكرة .

ج : $64\pi\sqrt{2}/3$ cm³

الفصل السابع والثلاثون

المراكز المتوسطة للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة

كتلة جسم فيزيائي : هي قياس لكمية المادة في الجسم ، بينما حجم الجسم هو قياس للفراغ الذي يشغله . إذا كانت كتلة وحدة الحجم من جسم هي نفسها في كل موضع منه فإننا نقول عن الجسم إنه متجانس أو أن كثافته ثابتة .

وأنه من المرغوب فيه جداً في الفيزياء والميكانيكا أن نعتبر كتلة معينة متمركزة في نقطة ، نسميها مركز الكتلة (مركز ثقل الجسم) . وإذا كان الجسم متجانساً فإن هذه النقطة تنطبق على مركزه الهندسي أو مركزه المتوسط . فمركز الكتلة لكرة مطاطية متجانسة مثلاً ينطبق على المركز المتوسط (المركز) للكرة باعتبارها كرة هندسية صلبة .

المركز المتوسط لصفحة مستطيلة الشكل من الورق يقع في منتصف المسافة بين وجهيها ولكن يمكن أن نعتبره على أحد الوجهين عند نقطة تقاطع القطرين . ومركز الكتلة لصفحة رقيقة يمكن اعتباره منطبقاً على مركزها المتوسط باعتبارها صفحة مستوية .

سنقصر الدراسة في هذا الفصل والفصل الذي يليه على السطوح المستوية وعلى الأجسام الدورانية . أما دراسة الأجسام الأخرى وأقواس المنحنيات (قطع أسلاك متجانسة رقيقة) والكتل غير المتجانسة فتؤجل إلى فصول أخرى .

العزم (الأول) M_L لسطح مستو بالنسبة لمستقيم ما هو حاصل ضرب مساحته في البعد الموجه لمركزه المتوسط عن المستقيم . وعزم سطح مركب بالنسبة لمستقيم هو مجموع عزوم السطوح المكونة له بالنسبة لنفس المستقيم .

ويمكن الحصول على سطح مستو بالنسبة للمحاور الاحداثية كما يلي :

١ - نرين برسم تقريبي المساحة وشريطاً مثلاً ونبين المستطيل المقرب .

٢ - نشكل حاصل ضرب مساحة المستطيل في بعد مركزه المتوسط عن المحور ونشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ - بفرض أن عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية نطبق النظرية الأساسية ، وإذا كان المركز المتوسط لسطح مستو (x و y) وكانت مساحته A وعزماء بالنسبة للمحورين x و y هما M_x و M_y فإن :

$$A\bar{y} = M_x \quad , \quad A\bar{x} = M_y$$

انظر المسائل ١ - ٨

العزم (الأول) لجسم صلب حجمه V ينتج عن دوران سطح مستو حول محور إحداثي ، بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور ، فإنه يمكن حسابه كما يلي :

١ - بين برسم تقريبي السطح وشريطاً مثلاً والمستطيل المقرب .

٢ - شكل حاصل ضرب الحجم ، القرص أو القشرة ، الناتج عن دوران المستطيل حول محور الدوران في بعد المركز المتوسط للمستطيل عن المستوى ثم شكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣- بفرض أن عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية نطبق النظرية الأساسية . عندما يدور الجسم حول المحور x فإن مركزه المتوسط (x و y) يقع على المحور . وإذا كان M_{yz} عزم الجسم بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور فإن :

$$V\bar{x} = M_{yz}, \quad \bar{y} = 0$$

وبشكل مماثل عندما يدور الجسم حول المحور y فإن مركزه المتوسط (x و y) يقع على المحور . وإذا كان M_{xz} عزم الجسم بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور y فإن :

$$V\bar{y} = M_{xz}, \quad \bar{x} = 0$$

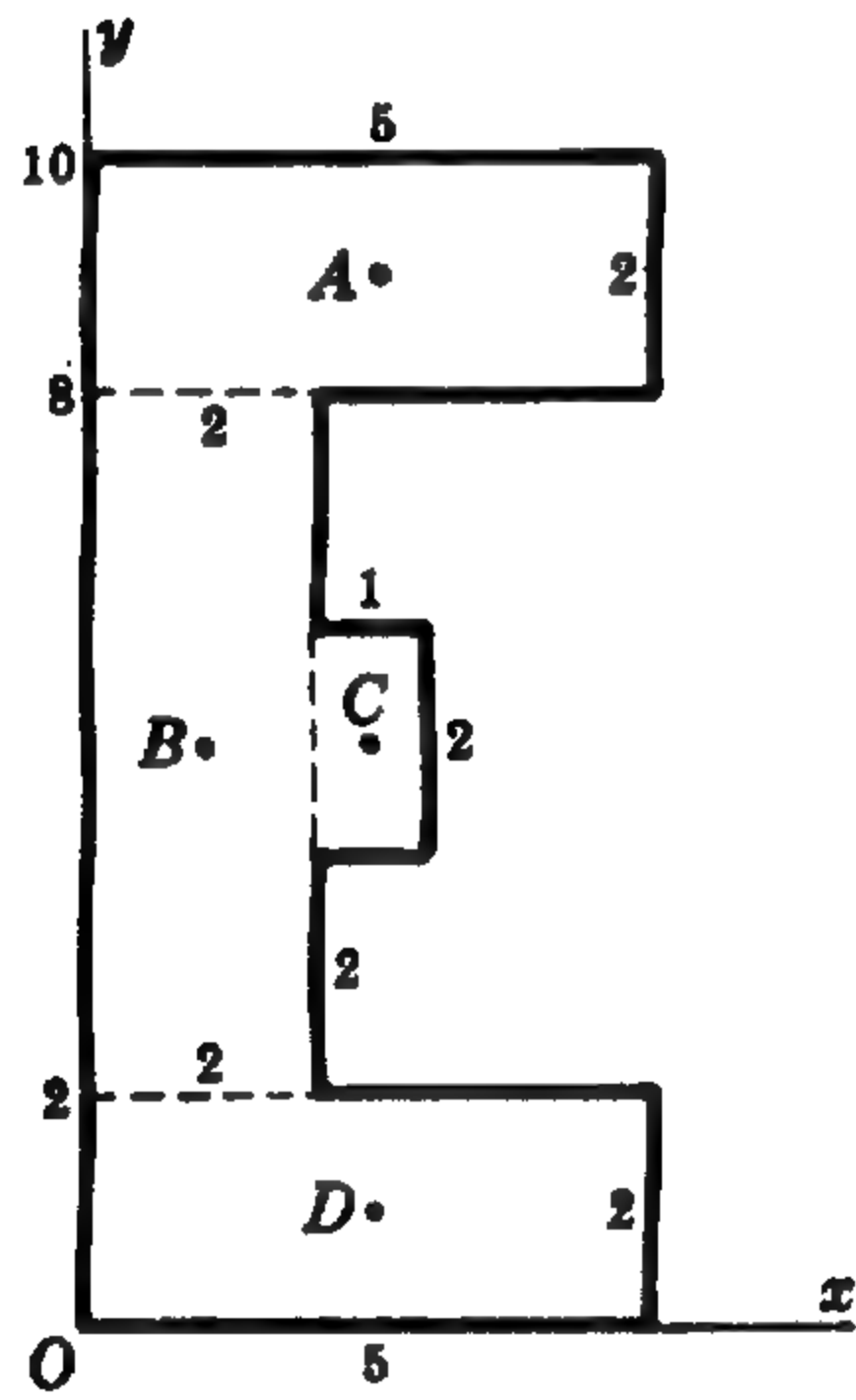
انظر المسائل ٩ - ١٢

نظرية بابوس الاول : إذا دار سطح مستو حول محور فى مستواه وغير قاطع له فإن حجم الجسم الناتج يساوى حاصل ضرب مساحة السطح فى طول المسار الذى يرسمه مركزه المتوسط .

انظر المسائل ١٣ - ١٥

مسائل محلولة

١ - المساحة المستوية المبينة أوجد (١) العزم بالنسبة للمحورين الاحداثيين (ب) احداثى المركز المتوسط (\bar{x}, \bar{y})



شكل ٣٧ - ١

(١) إن مساحة المستطيل العلوى $5 \times 2 = 10$ units . ومركزه المتوسط هو $A(2, 5, 9)$.

وبالمثل فإن مساحات المستطيلات الأخرى ومراكزها المتوسطة هي : 12 units ، $B(1, 5)$ ، 2 units ، $C(2, 5, 5)$ و 10 units ، $D(2.5, 1)$.

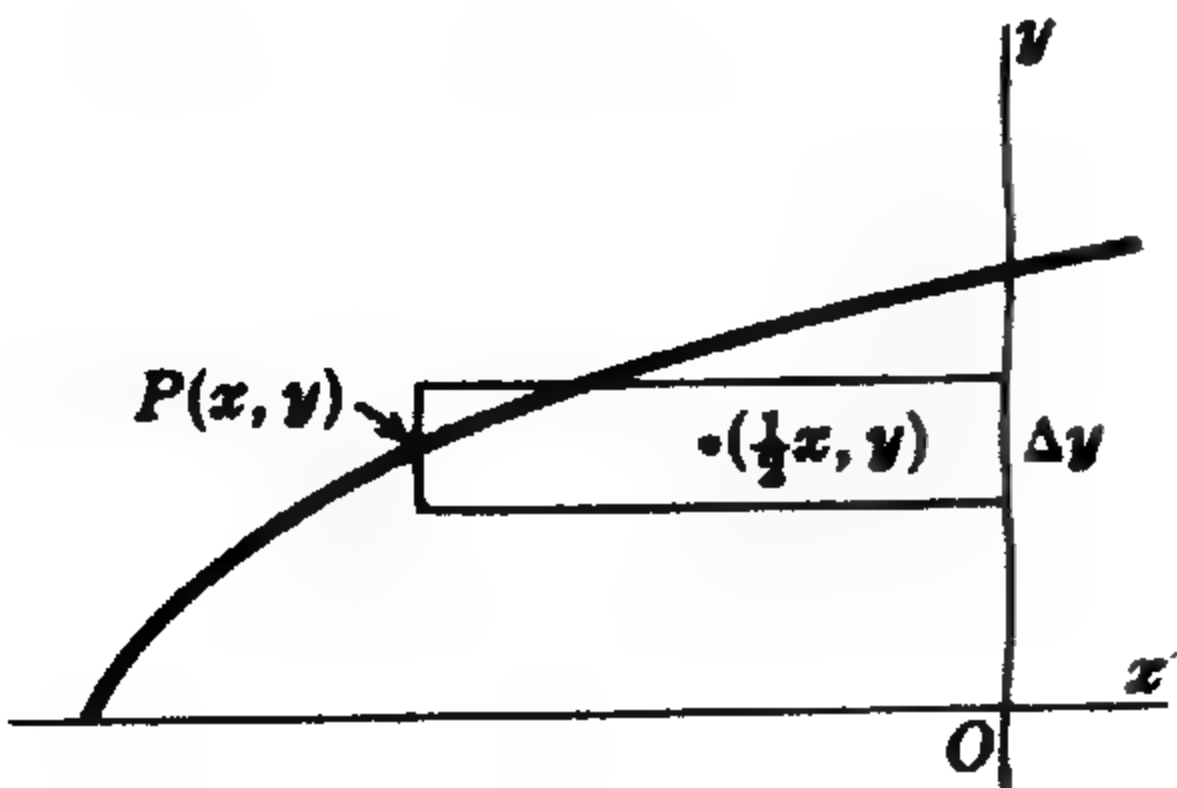
إذن عزوم المستطيلات بالنسبة للمحور x هي $10(9)$ ، $12(5)$ ، $2(5)$ ، $10(1)$ وبالتالى فإن عزم المساحة المستوية المبينة بالشكل بالنسبة للمحور y هو :

$$M_x = 10(9) + 12(5) + 2(5) + 10(1) = 170$$

وبالمثل نجد أن عزم المساحة المبينة بالشكل بالنسبة للمحور x هو :

$$M_y = 10(2.5) + 12(1) + 2(2.5) + 10(2.5) = 67$$

(ب) إن مساحة القطعة الموضحة بالشكل هي $A = 10 + 12 + 2 + 10 = 34$ وحيث أن $A\bar{x} = M_y$ فإن $34\bar{x} = 67$ وبالتالى $\bar{x} = 67/34$ وبما أن $A\bar{y} = M_x$ فإن $34\bar{y} = 170$ وبالتالى $\bar{y} = 5$ والنقطة ($67/34, 5$) هي المركز المتوسط .



شكل ٣٧ - ٢

٢- أوجد العزمين حول المحورين الاحداثيين لسطح مستو محدد بالمنحنى $x = y^2 - 9$ وواقع فى الربع الثانى .

باستخدام المستطيل المقرب المبين بالشكل . والذى مساحته $x \cdot \Delta y$ ومركزه المتوسط $(1/2 x, y)$ وعزومه بالنسبة للمحور x هو $y(-x \Delta y)$ إذن

$$M_x = - \int_0^3 y \cdot x \, dy = - \int_0^3 y(y^2 - 9) \, dy = \frac{81}{4}$$

وبالمثل فإن عزم المستطيل المقرب بالنسبة لمحور y هو $(\frac{1}{2}x(-x, \Delta y))$ إذن :

$$M_y = -\frac{1}{2} \int_0^3 x^2 dy = -\frac{1}{2} \int_0^3 (y^2 - 9)^2 dy = -\frac{324}{5}$$

٣- عين المركز المتوسط لسطح مستوي في الربع الأول ومحدد بالقطع المكافئ.

$$y = 4 - x^2$$

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو $(x, \frac{1}{2}y)$ وإن :

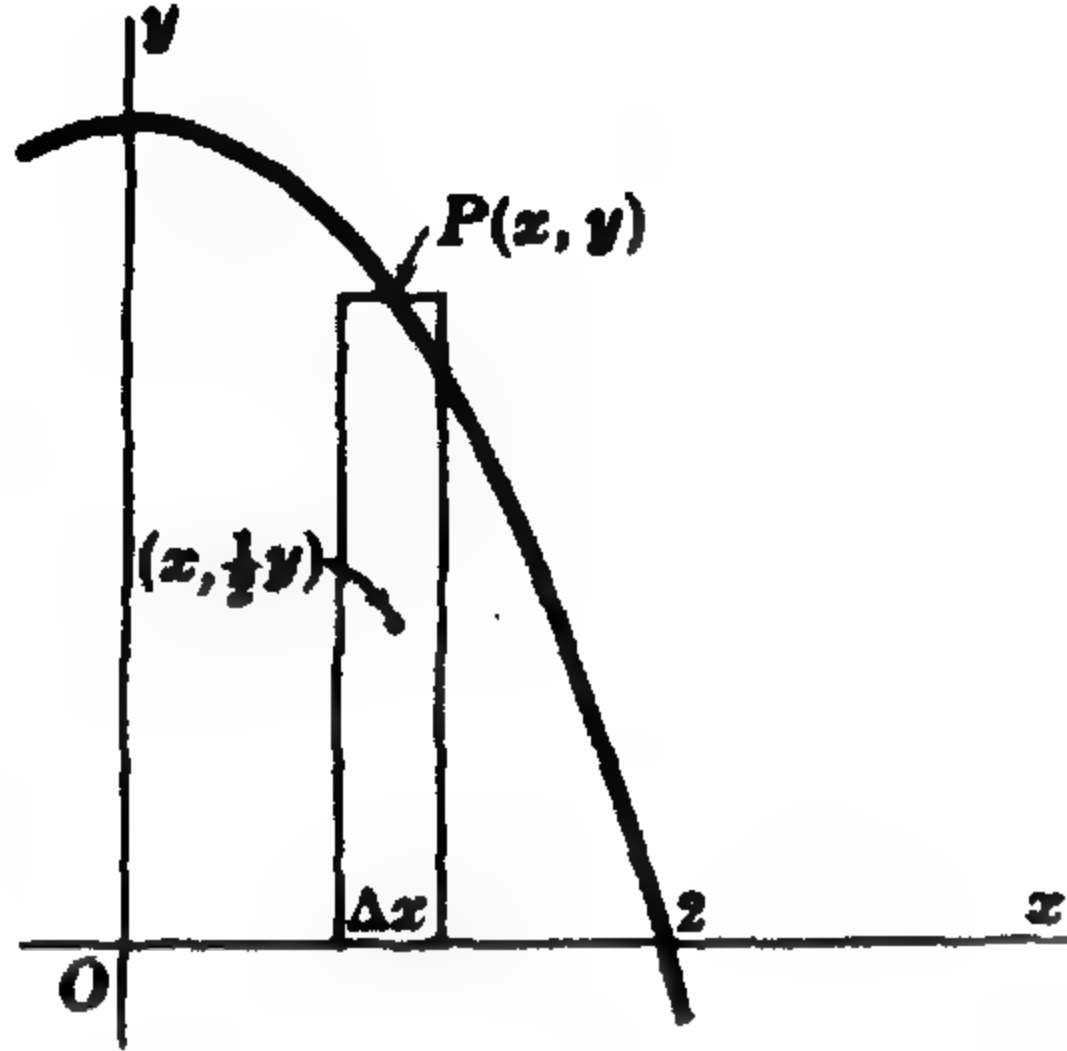
$$A = \int_0^2 y dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = 16/3$$

$$M_x = \int_0^2 \frac{1}{2}y \cdot y dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = 128/15$$

$$M_y = \int_0^2 x \cdot y dx = \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 4$$

إذن $\bar{x} = M_y/A = 3/4$, $\bar{y} = M_x/A = 8/5$, واحدات المركز المتوسط هـ.

$$(3/4, 8/5)$$



شكل ٣٧ - ٣

٤- عين المركز المتوسط لسطح في الربع الأول ومحدد بالقطع المكافئ $y = x^2$

والمستقيم $y = x$.

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو $[x, \frac{1}{2}(x + x^2)]$ وإن :

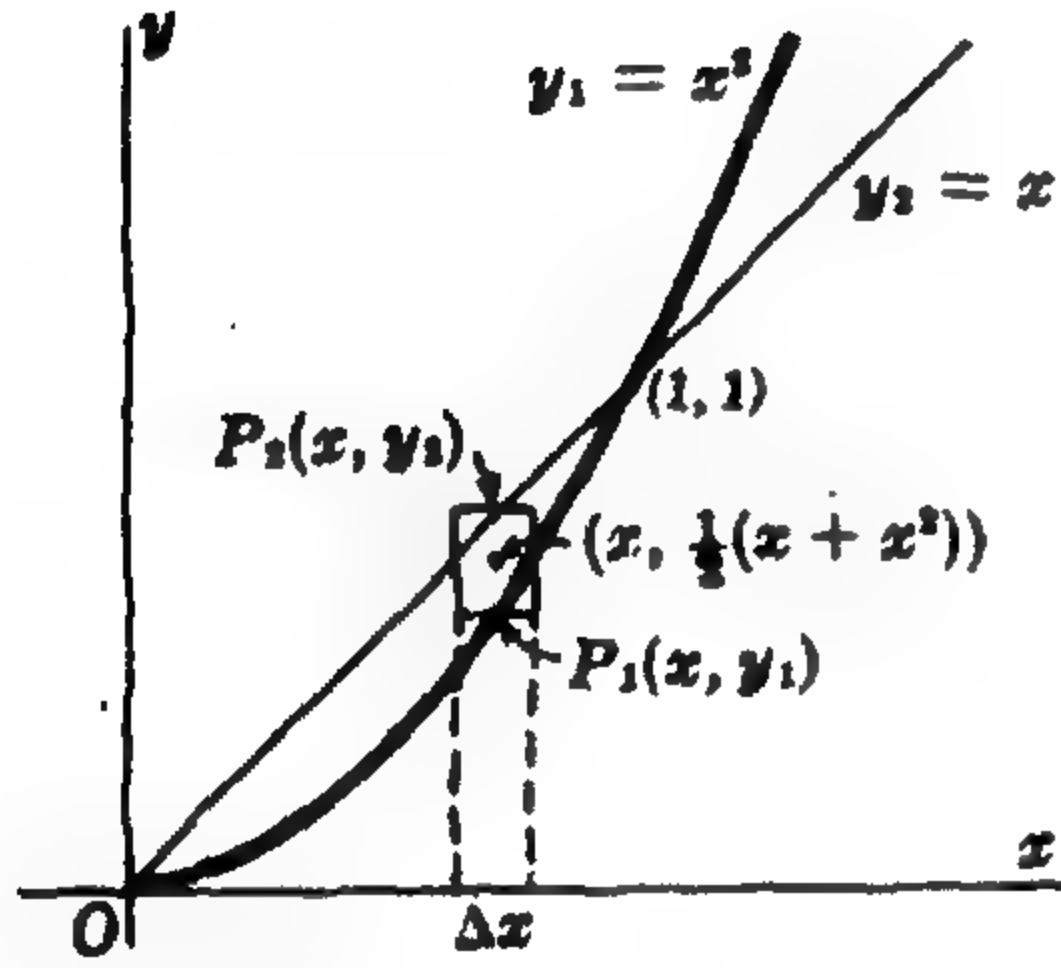
$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = 1/6$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}(x + x^2)(x - x^2) dx = 1/15$$

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2) dx = 1/12$$

إذن $\bar{x} = M_y/A = 1/2$, $\bar{y} = M_x/A = 2/5$, واحدات المركز المتوسط

$$(1/2, 2/5)$$



شكل ٣٧ - ٤

٥- عين المركز المتوسط لسطح المحدب بالقطعين المكافئين $x^2 = -8y$ و $x = y^2$

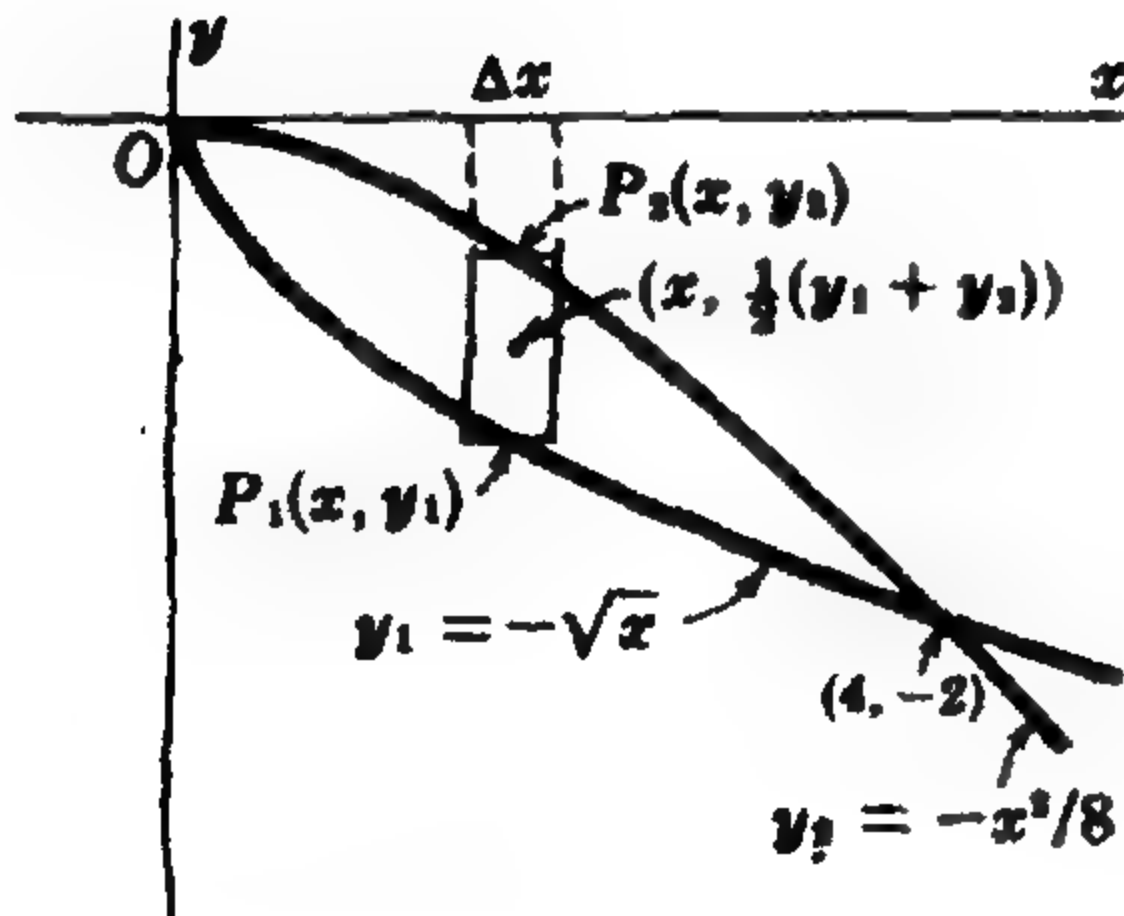
إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو $[x, \frac{1}{2}(-x^2/8 - \sqrt{x})]$

وإن :

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \int_0^4 \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{8} - \sqrt{x}\right) \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = -\frac{12}{5}$$

$$M_y = \int_0^4 x \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{24}{5}$$



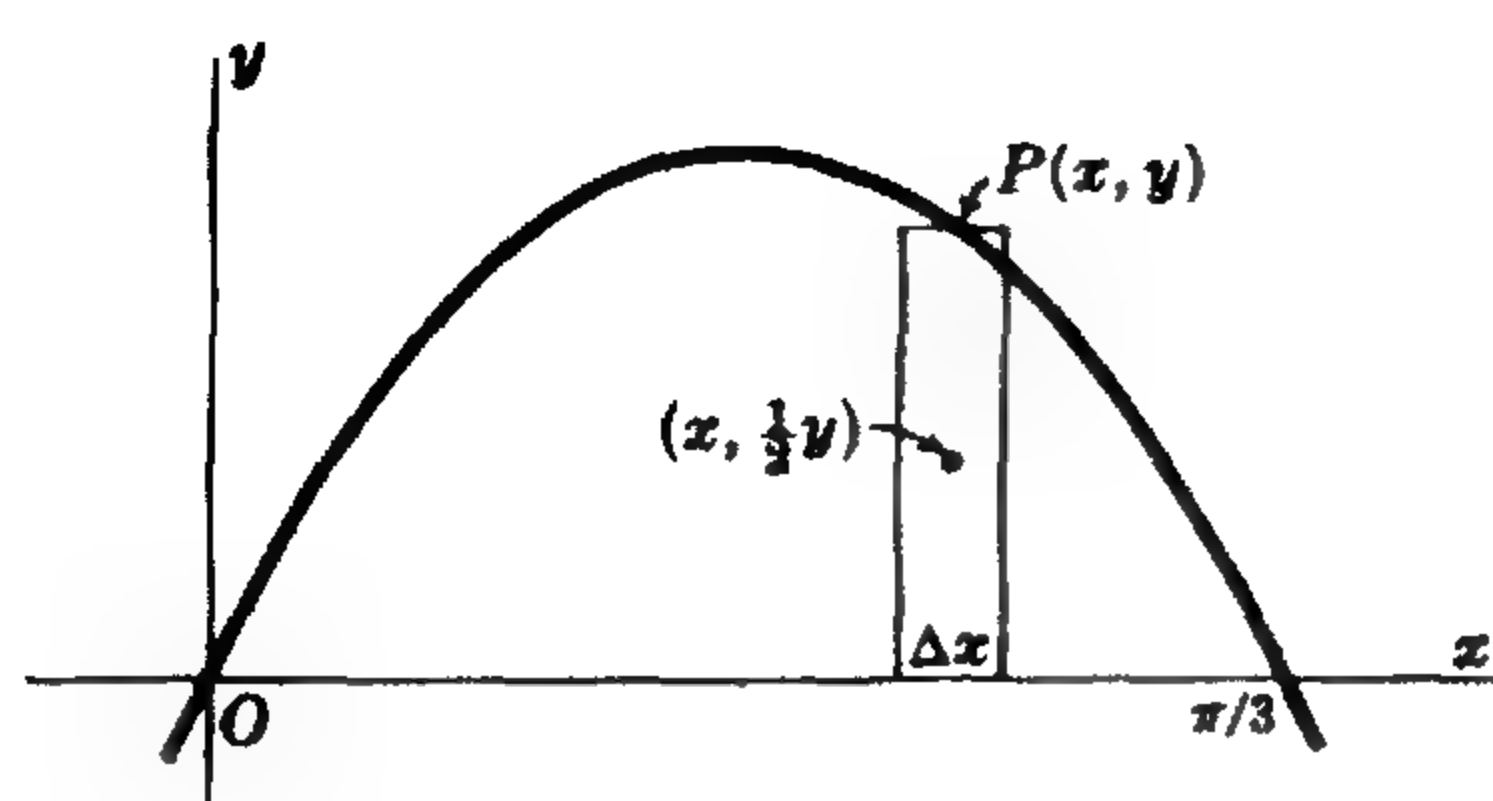
شكل ٣٧ - ٥

والمركز المتوسط هو $(\bar{x}, \bar{y}) = (9/5, -9/10)$.

٦- عين المركز المتوسط لسطح الواقع تحت المنحنى $y = 2 \sin 3x$ من $x = 0$ إلى $x = \pi/3$. أنظر الشكل ٣٧-٦

واستخدم المستطيل المقرب الموضح في الشكل والذي مركزه المتوسط هو $(x, \frac{1}{2}y)$.

$$A = \int_0^{\pi/3} y dx = \int_0^{\pi/3} 2 \sin 3x dx = -\frac{2}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{4}{3}$$



شكل ٢٧ - ٦

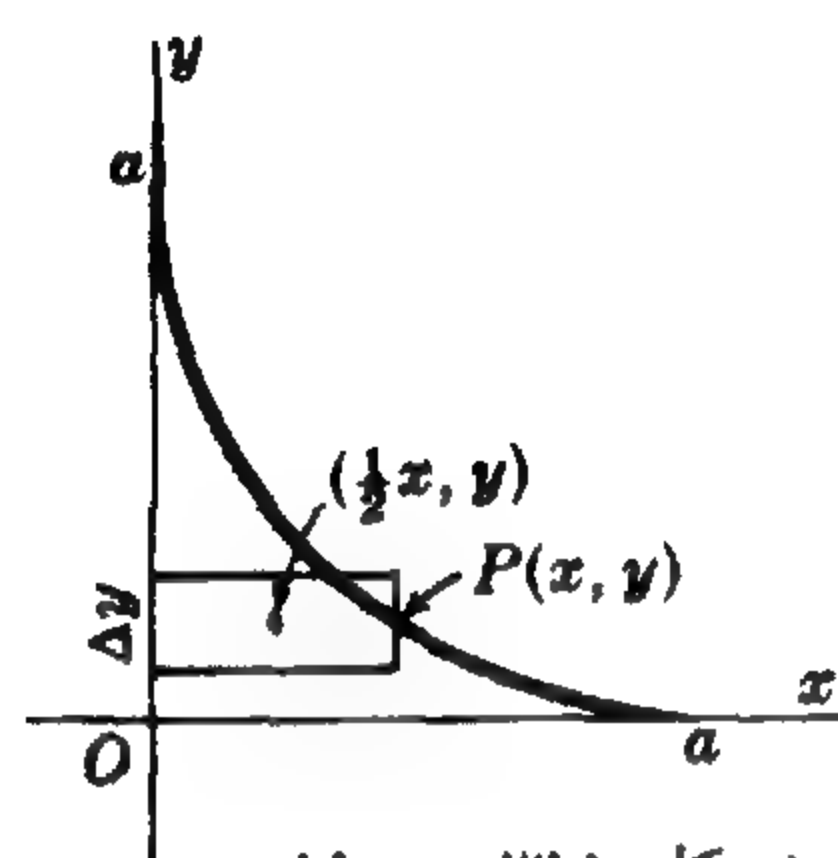
$$M_x = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} y \cdot y dx = 2 \int_0^{\pi/3} \sin^2 3x dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/3} x \cdot y dx = 2 \int_0^{\pi/3} x \sin 3x dx = \frac{2}{9} \left[\sin 3x - 3x \cos 3x \right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{9} \pi$$

والمركز المتوسط هو النقطة $(M_y/A, M_x/A) = (\pi/6, \pi/4)$.

٧ - عين المركز المتوسط الواقع في الربع الأول ومحدد بالمنحنى اللولبي $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$. أنظر الشكل ٢٧ - ١.

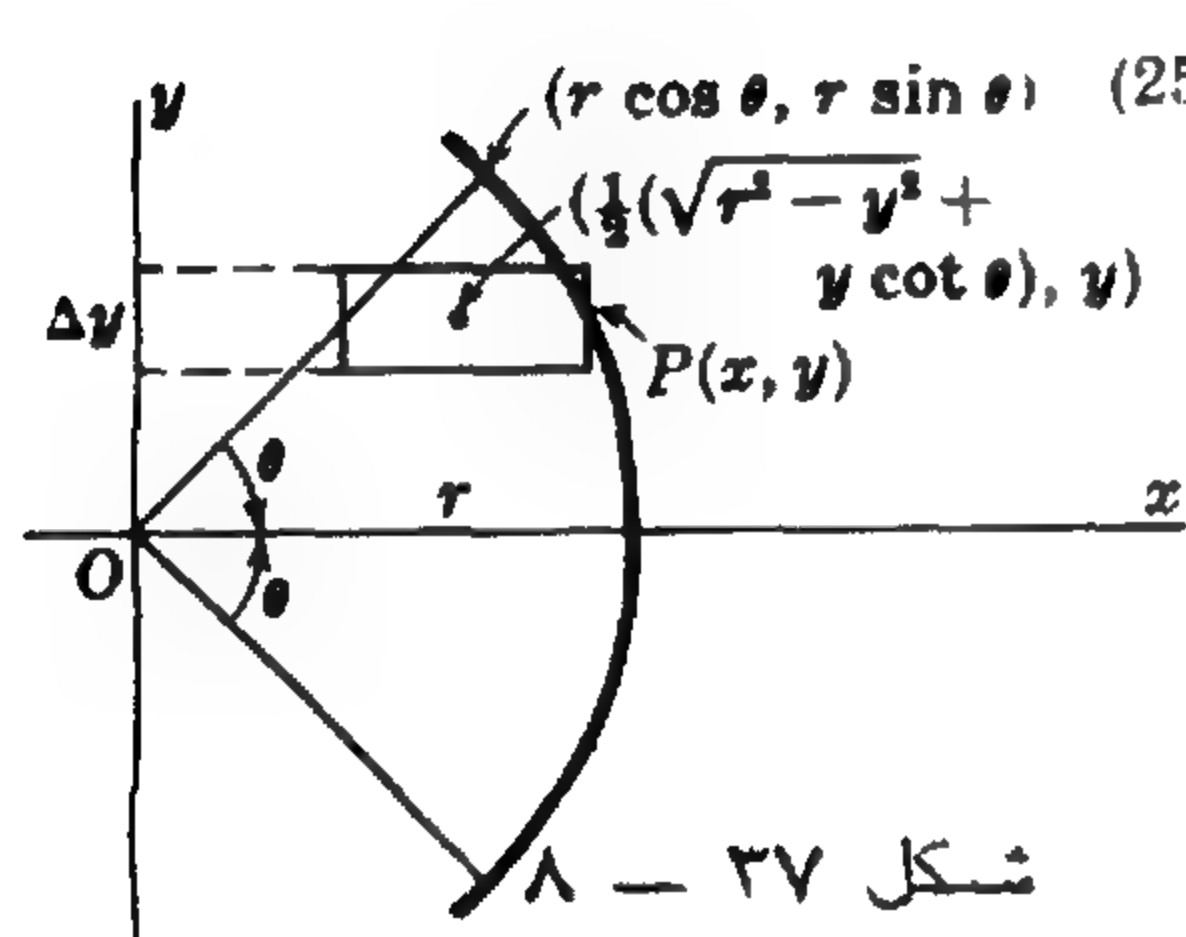


شكل ٢٧ - ٧

من التماثل نجد أن $\bar{x} = \bar{y}$ وأن

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} x dy = \int_0^{\pi/2} a \cos^3 \theta \cdot 3a \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{3}{8} a^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8} \sin 4\theta + \frac{1}{6} \sin^3 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{32} \pi a^2$$

$$M_x = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} y \cdot x dy = 3a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin^3 \theta d\theta = 3a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta = -3a^3 \left[\frac{\cos^5 \theta}{5} - \frac{2 \cos^7 \theta}{7} + \frac{\cos^9 \theta}{9} \right]_0^{\pi/2} = \frac{24a^3}{315}$$



شكل ٢٧ - ٨

اذن $\bar{y} = M_x/A = 256a/315\pi$ ، والمركز المتوسط هو النقطة $(256a/315\pi, 256a/315\pi)$.

٨ - بين أن المركز المتوسط لقطاع دائري نصف قطره r وزاويته 2θ يبعد

$$\frac{2r \sin \theta}{3\theta}$$

عن مركز الدائرة .

لأخذ القطاع الدائري بحيث يقع مركزه المتوسط على المحور x . ومن التماثل نجد أن الاسقاط السيني للمركز المتوسط المطلوب هو نفسه المركز المتوسط للقطاع الدائري الذي يقع فوق المحور x والمحدد بالدائرة والمستقيم $y = x \tan \theta$.

$$A = \int_0^{r \sin \theta} (\sqrt{r^2 - y^2} - y \cot \theta) dy = \left[\frac{1}{2} y \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{y}{r} - \frac{1}{2} y^2 \cot \theta \right]_0^{r \sin \theta} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$M_y = \int_0^{r \sin \theta} \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 - y^2} + y \cot \theta) (\sqrt{r^2 - y^2} - y \cot \theta) dy = \frac{1}{2} \int_0^{r \sin \theta} (r^2 - y^2 - y^2 \cot^2 \theta) dy = \frac{1}{2} \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{3} y^3 \cot^2 \theta \right]_0^{r \sin \theta} = \frac{1}{3} r^3 \sin \theta, \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{2r \sin \theta}{3\theta}$$

٩- عين المركز المتوسط $(\bar{x}, 0)$ للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٣ حول المحور x . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٣ وطريقة القرص :

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = 256\pi/15,$$

$$\bar{x} = M_{yz}/V = 5/8 \quad \text{و} \quad M_{yz} = \pi \int_0^2 x \cdot y^2 dx = \pi \int_0^2 x(4 - x^2)^2 dx = 32\pi/3,$$

١٠- عين المركز المتوسط $(0, \bar{y})$ للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٣ حول المحور y . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٣ وطريقة القشرة :

$$V = 2\pi \int_0^2 xy dx = 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 8\pi,$$

$$\bar{y} = M_{xz}/V = 4/3 \quad \text{و} \quad M_{xz} = 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2}y \cdot xy dx = \pi \int_0^2 x(4 - x^2)^2 dx = 32\pi/3,$$

١١- عين المركز المتوسط $(\bar{x}, 0)$ للجسم الناتج عن دوران قطعة سطح المسألة ٤ حول المحور x . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٤ وطريقة القرص .

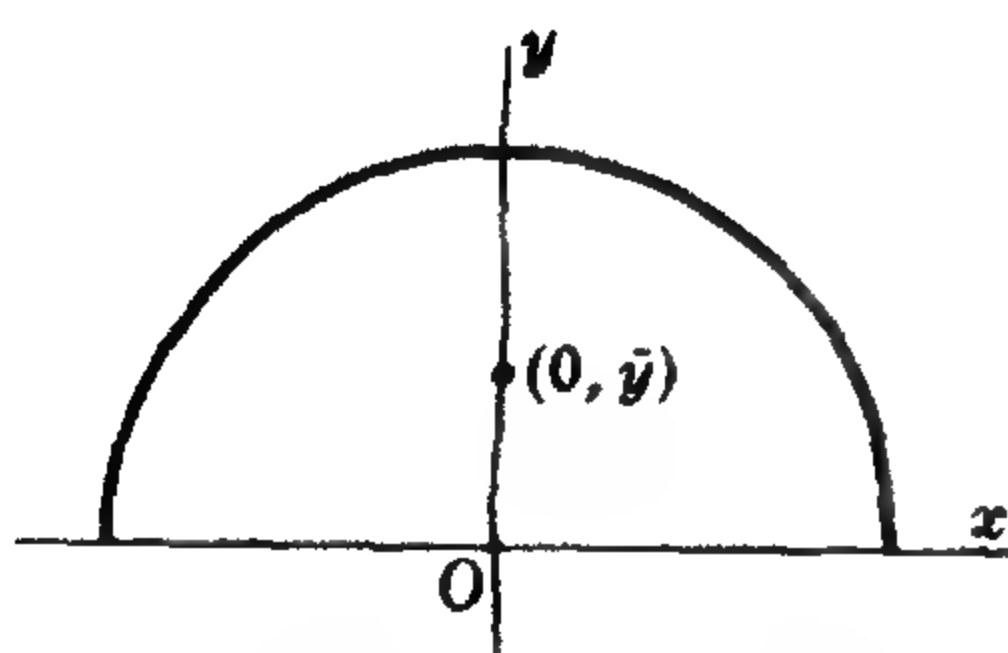
$$\bar{x} = M_{yz}/V = 5/8. \quad \text{و} \quad V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = 2\pi/15, \quad M_{yz} = \pi \int_0^1 x(x^2 - x^4) dx = \pi/12,$$

١٢- عين المركز المتوسط $(0, \bar{y})$ للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٤ حول المحور y . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٤ وطريقة القشرة .

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3) dx = \pi/6,$$

$$\bar{y} = M_{xz}/V = 1/2 \quad \text{و} \quad M_{xz} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(x + x^3) \cdot x(x - x^3) dx = \pi/12,$$

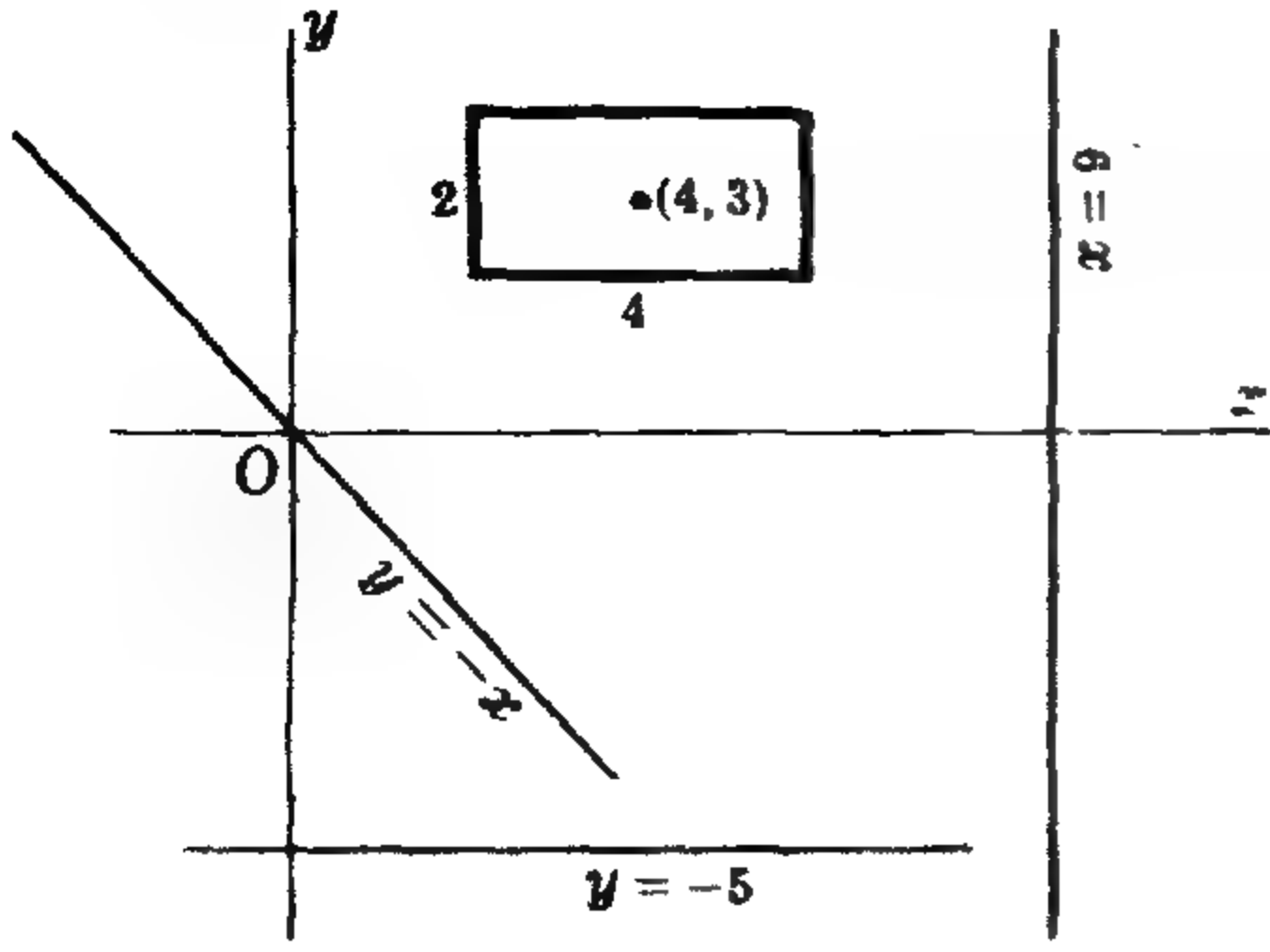
١٣- عين المركز المتوسط لسطح على شكل نصف دائرة قطرها r . لتأخذ نصف الدائرة كما في الشكل فيكون $x = 0$.



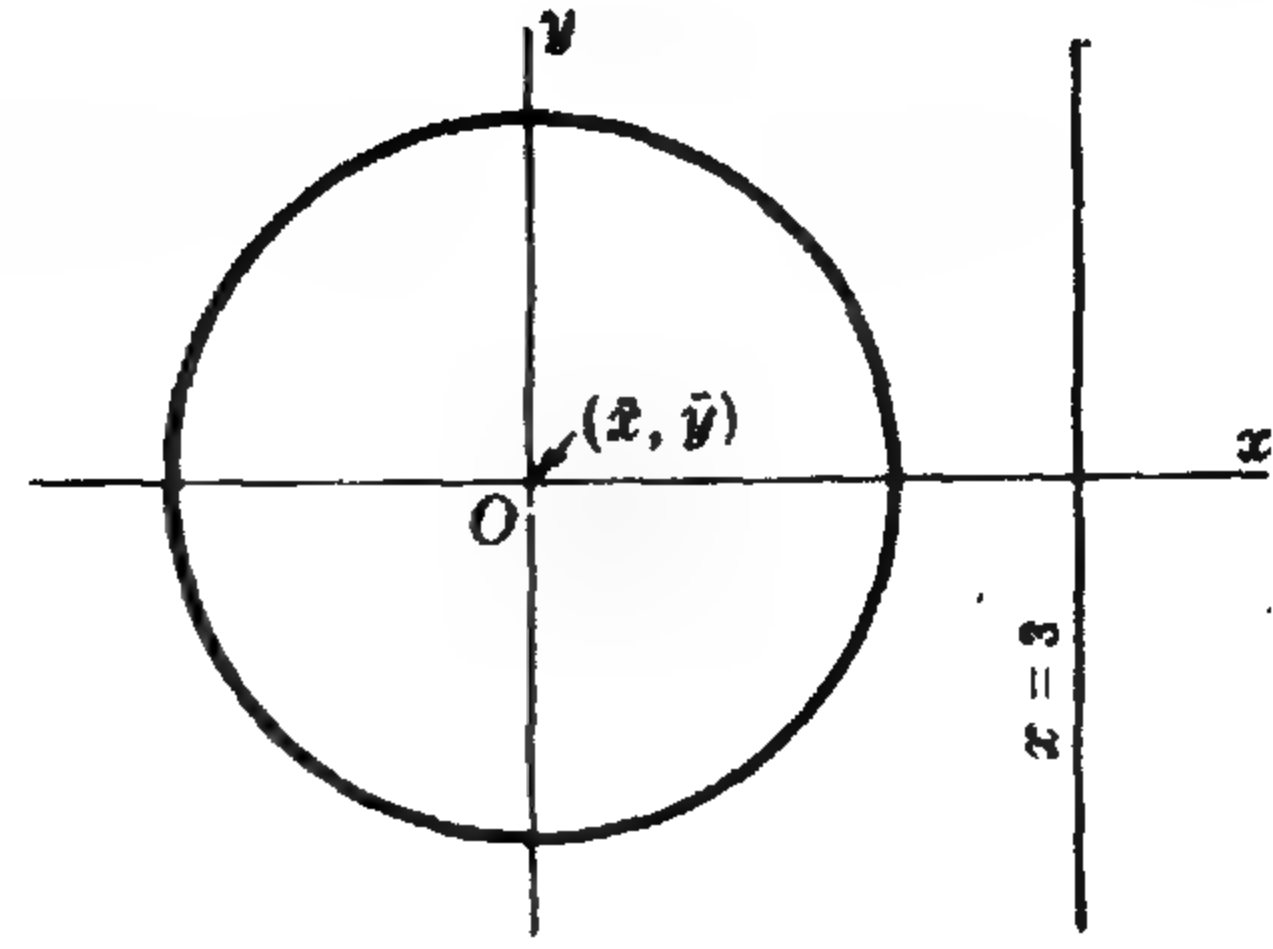
شكل ٣٧ - ٩

إن مساحة نصف الدائرة $\frac{1}{2}\pi r^2$ والجسم الناتج عن دورانه حول المحور x هو كرة حجمها $\frac{4}{3}\pi r^3$. أثناء هذا الدوران يرسم المركز المتوسط $(0, \bar{y})$ لنصف الدائرة دائرة نصف قطرها \bar{y} . وعلى هذا يكون استناداً إلى نظرية بابوس $\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi \bar{y} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ومنه $\bar{y} = 4r/3\pi$ والمركز المتوسط هو النقطة $(0, 4r/3\pi)$.

١٤- عين حجم الجسم الناتج عن دوران الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ حول المستقيم $x = 3$. أنظر الشكل ٣٧ - ١٠. يرسم المركز المتوسط لسطح الدائري أثناء الدوران دائرة نصف قطرها 3. وعلى هذا فإن $V = 4\pi(6\pi)$ أي أن الحجم المطلوب يساوي $24\pi^2$ cubic units.



شكل ٣٧ - ١١



شكل ٣٧ - ١٠

١٥- أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المستطيل الموضح في الشكل ٣٧ - ١١ حول (١) المستقيم $x = 9$ ، (٢) المستقيم $y = -5$ ، (٣) المستقيم $y = -x$.

(١) يرسم المركز المتوسط (4,3) دائرة نصف قطرها 5 ولذلك فإن $V = 8(10\pi) = 80\pi$ cu. un.

(٢) يرسم المركز المتوسط دائرة نصف قطرها 8 ولذلك فإن $V = 8(16\pi) = 128\pi$ cubic units.

(٣) يرسم المركز المتوسط دائرة نصف قطرها $(4+3)/\sqrt{2}$ ولذلك فإن $V = 56\sqrt{2}\pi$ cubic units.

مسائل اضافية

عين في المسائل من ١٦ - ٢٦ المركز المتوسط للسطح المفروض :

- | | |
|------------------------|--|
| (0, 27/5) : ج | ١٦ - $y = x^2, y = 9$ |
| (2, 8/5) : ج | ١٧ - $y = 4x - x^2, y = 0$ |
| (3/2, 12/5) : ج | ١٨ - $y = 4x - x^2, y = x$ |
| (6/5, 0) : ج | ١٩ - $3y^2 = 4(3-x), x = 0$ |
| (3, 3/5) : ج | ٢٠ - $x^2 = 8y, y = 0, x = 4$ |
| (12/5, 192/35) : ج | ٢١ - $y = x^2, 4y = x^3$ |
| (3/4, 2/5) : ج | ٢٢ - $x^2 - 8y + 4 = 0, x^2 = 4y$ ، الربع الأول . |
| (4a/3\pi, 4a/3\pi) : ج | ٢٣ - الجزء الواقع في الربع الأول من $x^2 + y^2 = a^2$. |
| (16/3\pi, 4/\pi) : ج | ٢٤ - الجزء الواقع في الربع الأول من $9x^2 + 16y^2 = 144$. |
| (32/15\pi, 0) : ج | ٢٥ - المقدة اليمنى $y^2 = x^4(1-x^2)$. |
| (\pi, 5/6) : ج | ٢٦ - المقدة الأول من $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$. |
| | ٢٧ - بين أن بعد المركز المتوسط لثلث عن قاعدته يساوى ١/٣ الارتفاع . |

عين في المسائل من ٢٨ إلى ٣٨ المركز المتوسط للجسم الناتج عن دوران السطح المفروض حول المستقيم المفروض .

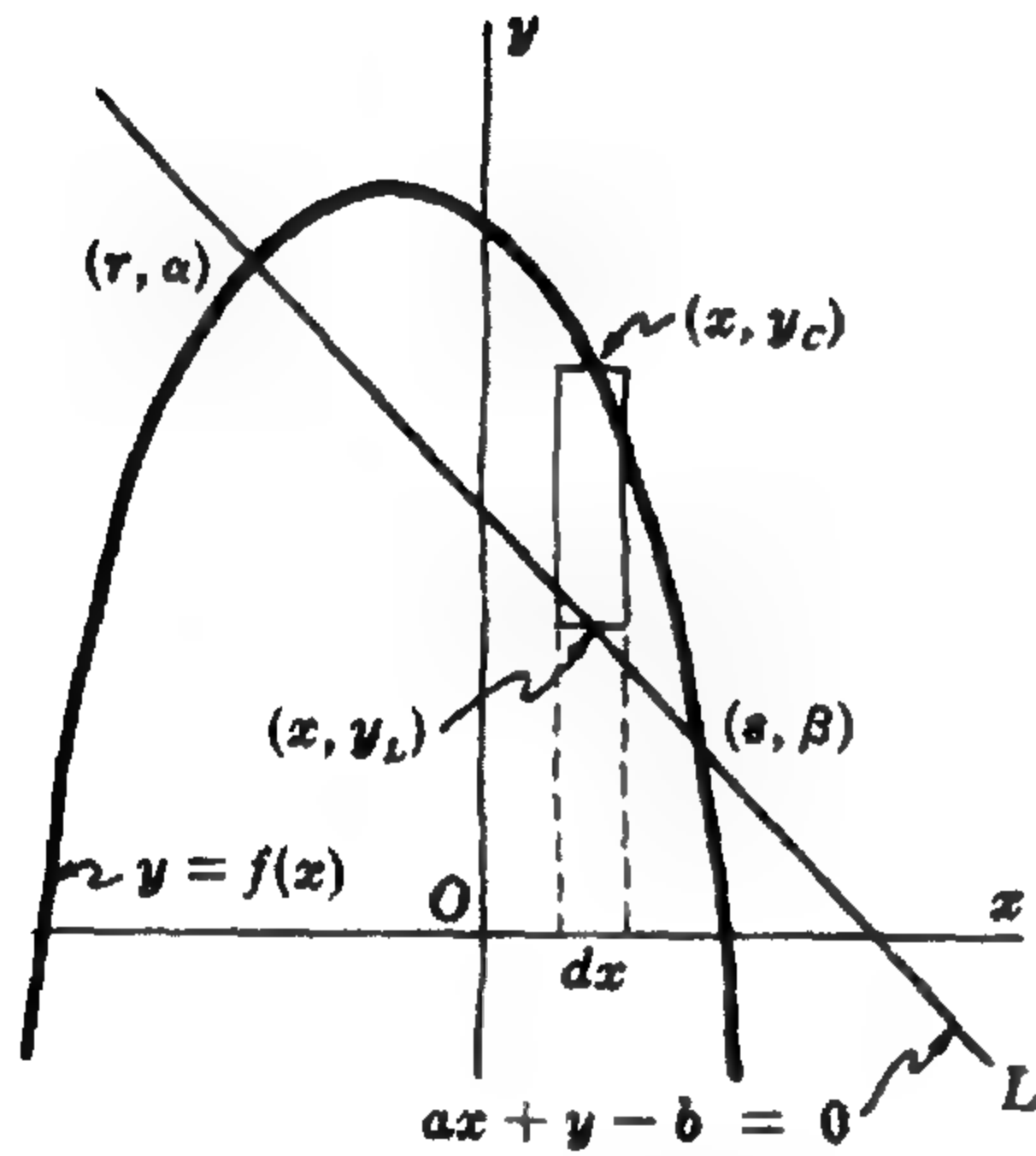
- | | |
|-----------------------|---|
| $\bar{y} = 6$: ج | ٢٨ - $y = x^2, y = 9, x = 0$ حول المحور y . |
| $\bar{x} = 5/4$: ج | ٢٩ - $y = x^2, y = 9, x = 0$ حول المحور x . |
| $\bar{x} = 27/16$: ج | ٣٠ - $y = 4x - x^2, y = x$ حول المحور x . |

- ٣١ - $y = 4x - x^2, y = x$; حول المحور y . ج : $\bar{y} = 27/10$
- ٣٢ - $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$; حول المحور x . ج : $\bar{x} = 27/4$
- ٣٣ - $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$; حول المحور y . ج : $\bar{y} = 3\sqrt{3}/2$
- ٣٤ - $(x-2)y^2 = 4, y = 0, x = 3, x = 5$; حول المحور x . ج : $\bar{y} = (2 + 2 \ln 3)/(\ln 3)$
- ٣٥ - $x^2 y = 16(4-y), x = 0, y = 0, x = 4$; حول المحور y . ج : $\bar{y} = 1/(\ln 2)$
- ٣٦ - السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ $y^2 = 12x$ والوتر البؤري العمودي حول المحور x . ج : $\bar{x} = 2$
- ٣٧ - سطح المسألة ٣٦ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 5/2$
- ٣٨ - سطح المسألة ٣٦ حول دليل القطع المكافئ. ج : $\bar{y} = 75/32$
- ٣٩ - برهن نظرية بابوس في هذا الفصل.
- ٤٠ - استخدم نظرية بابوس لإيجاد :

(أ) حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه a ونصف قطر قاعدته b .

(ب) الحلقة الناتجة عن دوران القطع الناقص $4(x-6)^2 + 9(y-5)^2 = 36$ حول المحور x .

ج : (أ) $\frac{1}{3} \pi ab^2$ c.u. (ب) $60\pi^2$ c.u.



٤١ - السطح A المحدد بـ $y = -x^2 - 3x + 6$ و $x + y - 3 = 0$.

عين (أ) المركز المتوسط (ب) الحجم الناتج عن دوران A حول المستقيم المحدد له.

ج : (أ) $(-1, 28/5)$, (ب) $2\pi \left(\frac{\bar{x} + \bar{y} - 3}{\sqrt{2}} \right) \cdot A = \frac{256\sqrt{2}}{15} \pi$ cu. un.

٤٢ - بين أنه إذا كان V الحجم الناتج عن دوران قطعة السطح A

(المبينة في الشكل ٢١-٣٧) حول المستقيم L ، فإن

$$V = 2\pi \left(\frac{a\bar{x} + \bar{y} - b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \cdot A = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} (aM_y + M_x - bA)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} \int_a^b (y_c - y_L)^2 dx$$

شكل ٢٧ - ١٢

٤٣ - استخدم الصيغة الموجودة في المسألة ٤٢ لحساب الحجم الناتج عن دوران السطح المفروض حول المستقيم المفروض :

(أ) $y = -x^2 - 3x + 6, x + y - 3 = 0$

(ب) $y = 2x^2, 2x - y + 4 = 0$

ج : (أ) انظر المسألة ٤١ (ب) $162\sqrt{5} \pi/25$ cu. un.

الفصل الثامن والثلاثون

عزم القصور الذاتي للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة

يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي I_L لسطح مستو A بالنسبة لمستقيم L واقع في مستواه كما يلي :

- ١ - نرين برسم تقريبي السطح وشريطاً ممثلاً موازياً للمستقيم والمستطيل المقرب .
- ٢ - نشكل حاصل ضرب مساحة المستطيل في مربع بعد مركزه المتوسط عن المستقيم ثم نشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ - نجمل عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية ونطبق النظرية الأساسية .

أنظر المسائل ١ - ٤

لايجاد عزم القصور الذاتي I_L لجسم حجمه V يتولد عن دوران سطح مستوي حول مستقيم L واقع في نفس المستوى بالنسبة لذلك المستقيم (محور الجسم) نتبع ما يلي :

- ١ - نرين برسم تقريبي شريحة ممثلة موازية للمحور وكذلك المستطيل المقرب .
- ٢ - نشكل حاصل ضرب الحجم الناتج عن دوران المستطيل حول المحور (القشرة) في مربع بعد الوتر المتوسط للمستطيل عن المحور ثم نشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .
- ٣ - نجمل عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية ونطبق النظرية الأساسية :

أنظر المسائل ٥ - ٨

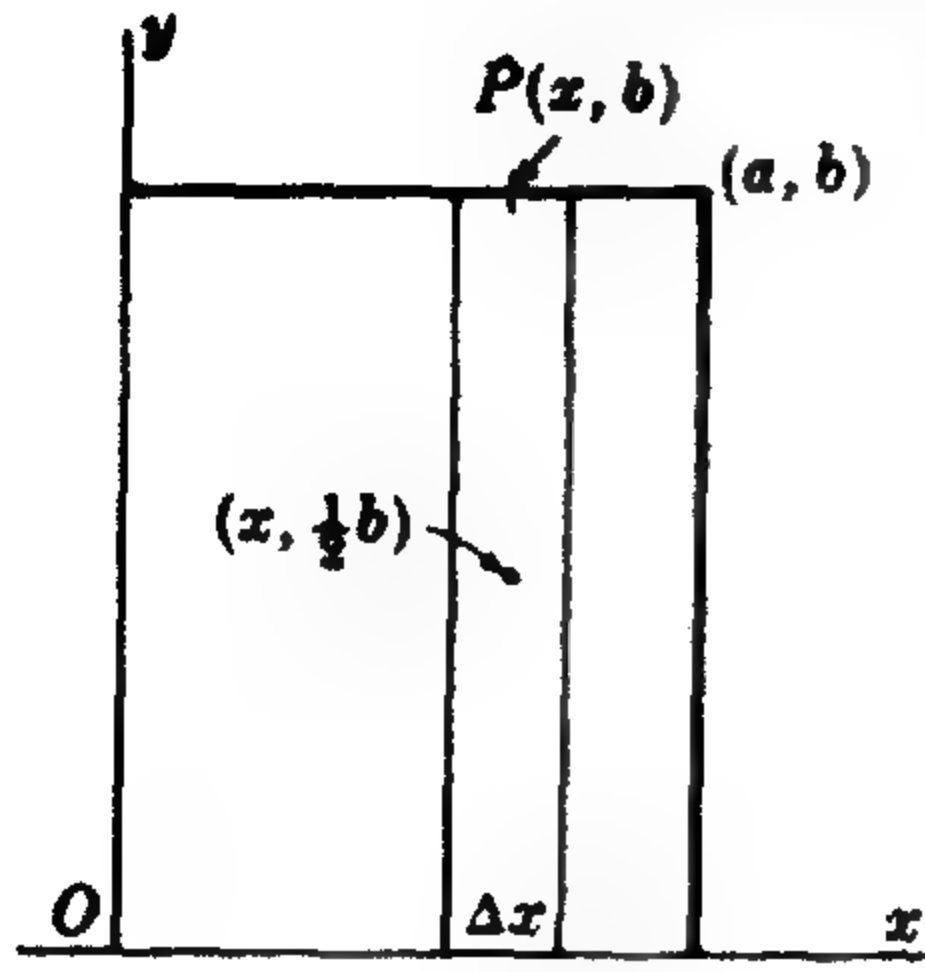
نصف قطر الدوران : نسمى العدد الموجب R المعروف بالعلاقة $I_L = AR^2$ في حالة السطوح المستوية أو بالعلاقة $I_L = VR^2$ في حالة الحجوم الدورانية ، بنصف قطر الدوران للسطح أو للحجم بالنسبة لـ L .

نظرية المحور الموازي : إن عزم القصور الذاتي لسطح أو لقوس منحن أو لحجم بالنسبة إلى محور يساوي عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور مواز للأول ومار بالمرکز المتوسط مضافاً لذلك حاصل ضرب المساحة أو طول القوس أو الحجم في مربع البعدين المحورين المتوازيين .

أنظر المسألتين ٩ - ١٠

مسائل محلولة

- ١ - أوجد عزم القصور الذاتي لسطح مستطيل الشكل A بعاء a و b ذلك بالنسبة لأحد أضلاعه .



شكل ١-٣٨

لنأخذ المستطيل كما في الشكل ولنفرض أن الضلع الذي نريد أن نحسب عزم القصور الذاتي بالنسبة له ينطبق على المحور y .

إن مساحة المستطيل المقرب تساوي $b \cdot \Delta x$ والمركز المتوسط لها $(x, 1/2 b)$ وبالتالي فإن عنصر عزم القصور الذاتي له هو $x^2 b \Delta x$ إذن :

$$I_y = \int_0^a x^2 b dx = b \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3} Aa^2$$

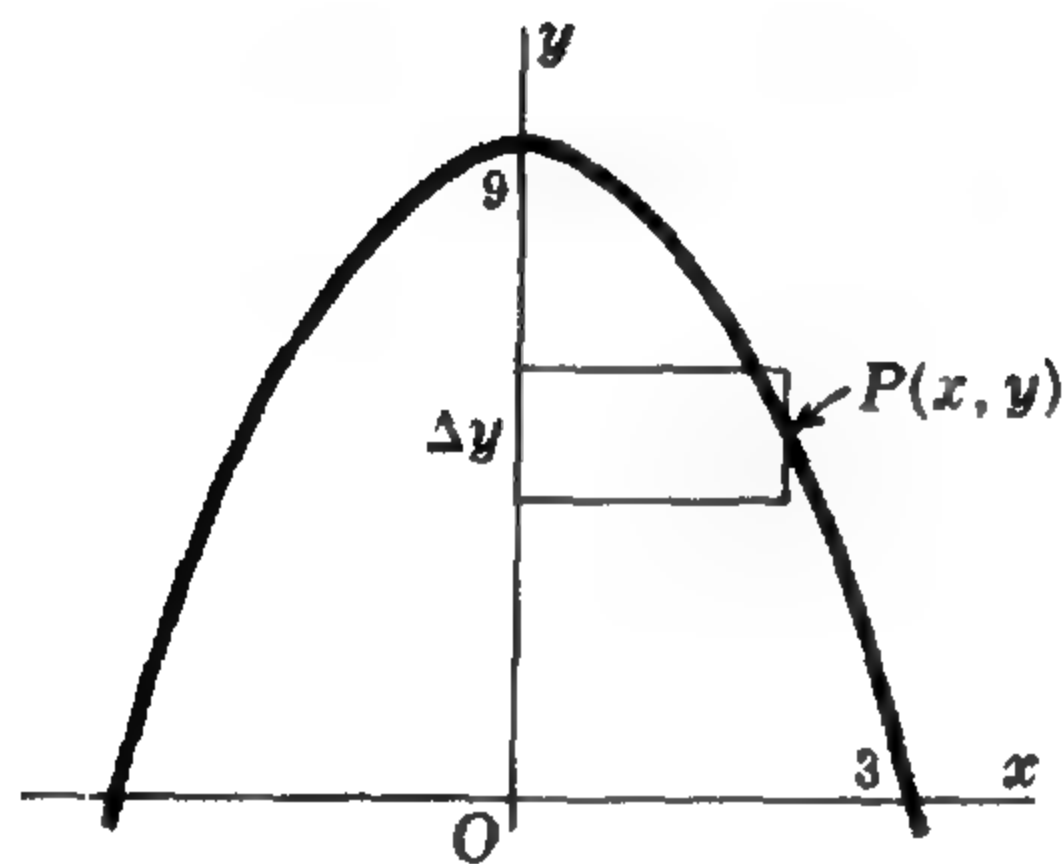
إذن فعزم القصور الذاتي لسطح مستطيل الشكل حول أحد أضلاعه يساوي $1/3$ حاصل ضرب مساحته في طول الضلع الآخر.

٢- أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور y لسطح المستوى الواقع بين القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ والمحور x .

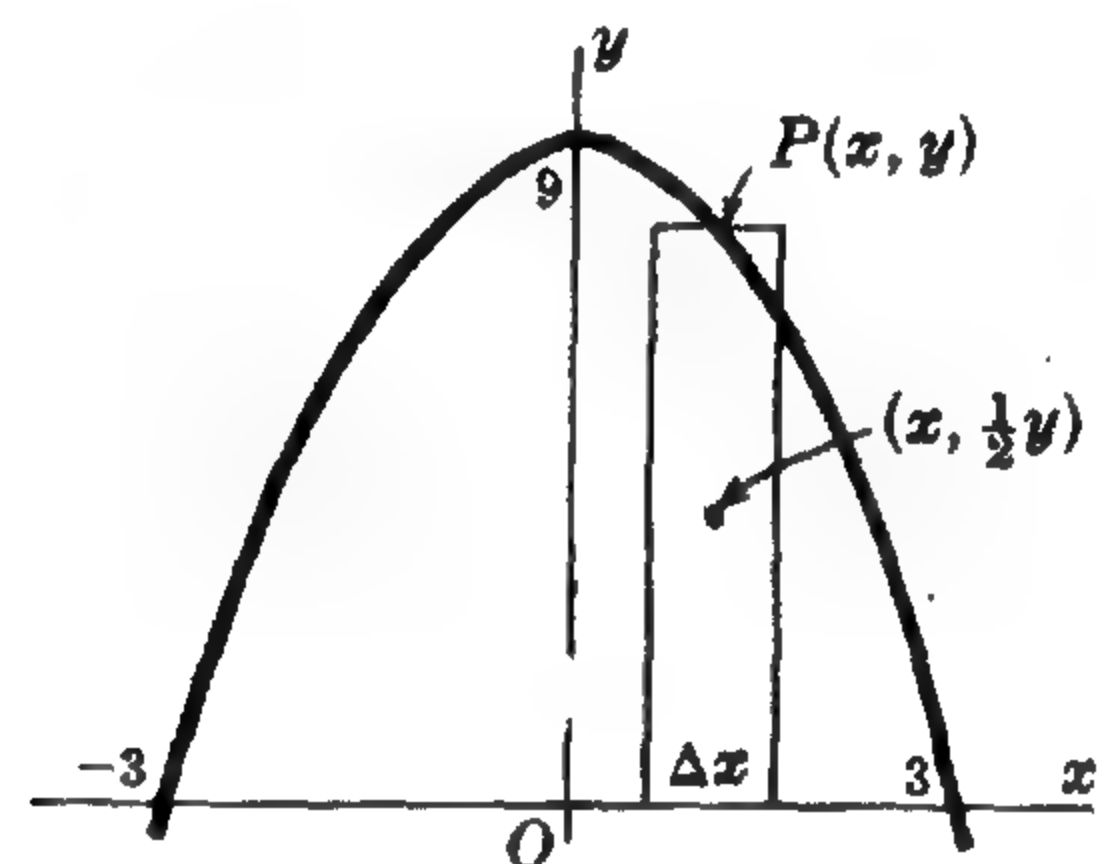
الحل الأول : إن مساحة المستطيل المقرب في الشكل ٢-٣٨ تساوي $A = y \cdot \Delta x$ ومركزه المتوسط

$(x, 1/2 y)$ إذن :

$$I_y = \int_{-3}^3 x^2 y dx = 2 \int_0^3 (9x^2 - x^4) dx = \frac{324}{5}$$



شكل ٣-٣٨



شكل ٢-٣٨

الحل الثاني : إن مساحة المستطيل المقرب في الشكل ٣-٣٨ تساوي $x \cdot \Delta y$ وبعد هذا المستطيل العمودي عن المحور y يساوي x . ولذلك فإن عنصر عزم القصور الذاتي استناداً إلى المسألة ١ يساوي $(x \Delta y) x^2 / 3$. وبذلك نجد اعتماداً على التناظر أن :

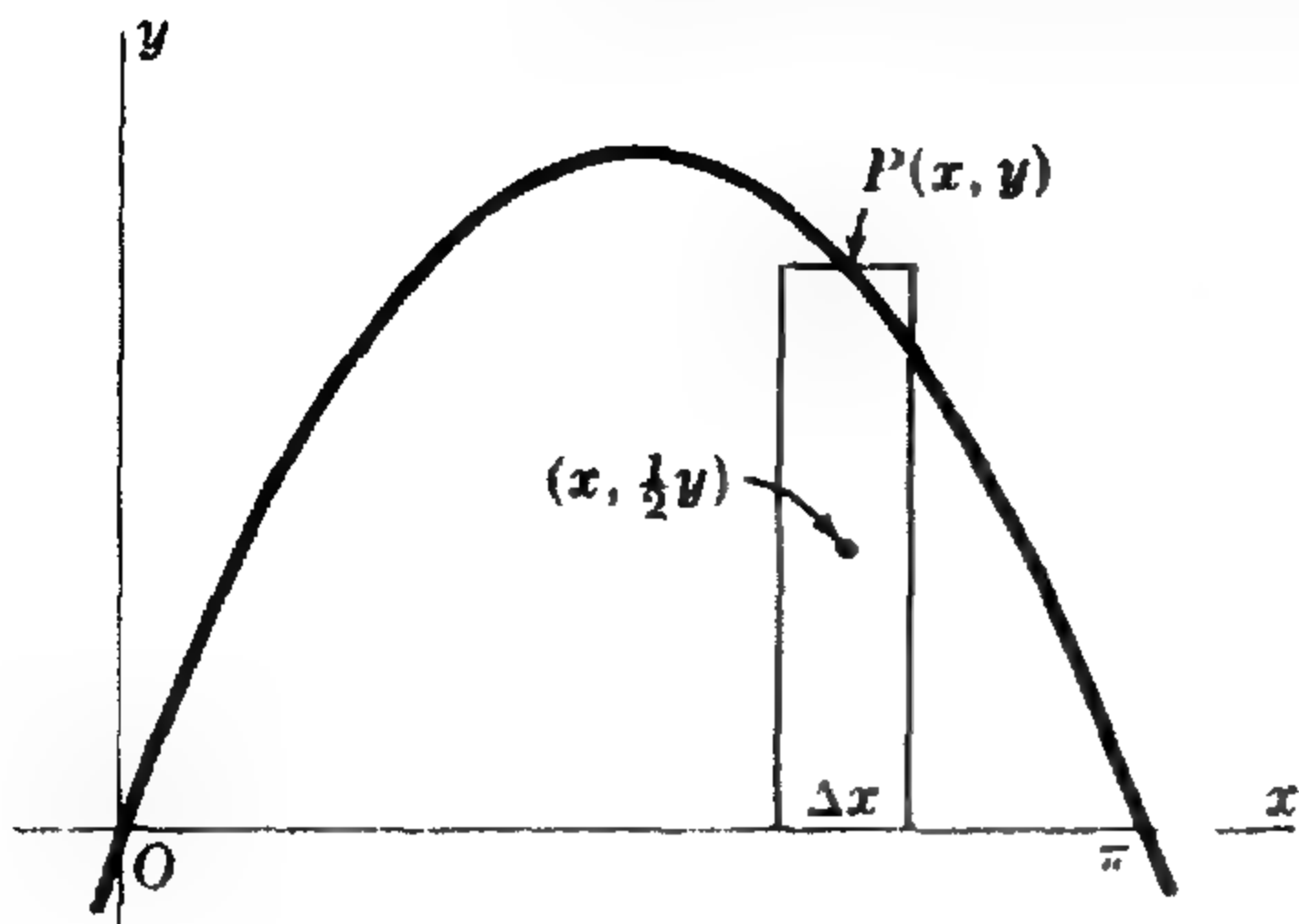
$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{3} \int_0^9 x^3 dy = \frac{2}{3} \int_0^9 (9 - y)^{3/2} dy = \frac{324}{5}$$

وبما أن $I_y = 324/5 = AR^2$ فإن $A = 2 \int_0^9 x dy = 2 \int_0^9 \sqrt{9 - y} dy = 36$ ، $R = 3/\sqrt{5}$ هو نصف قطر الدوران

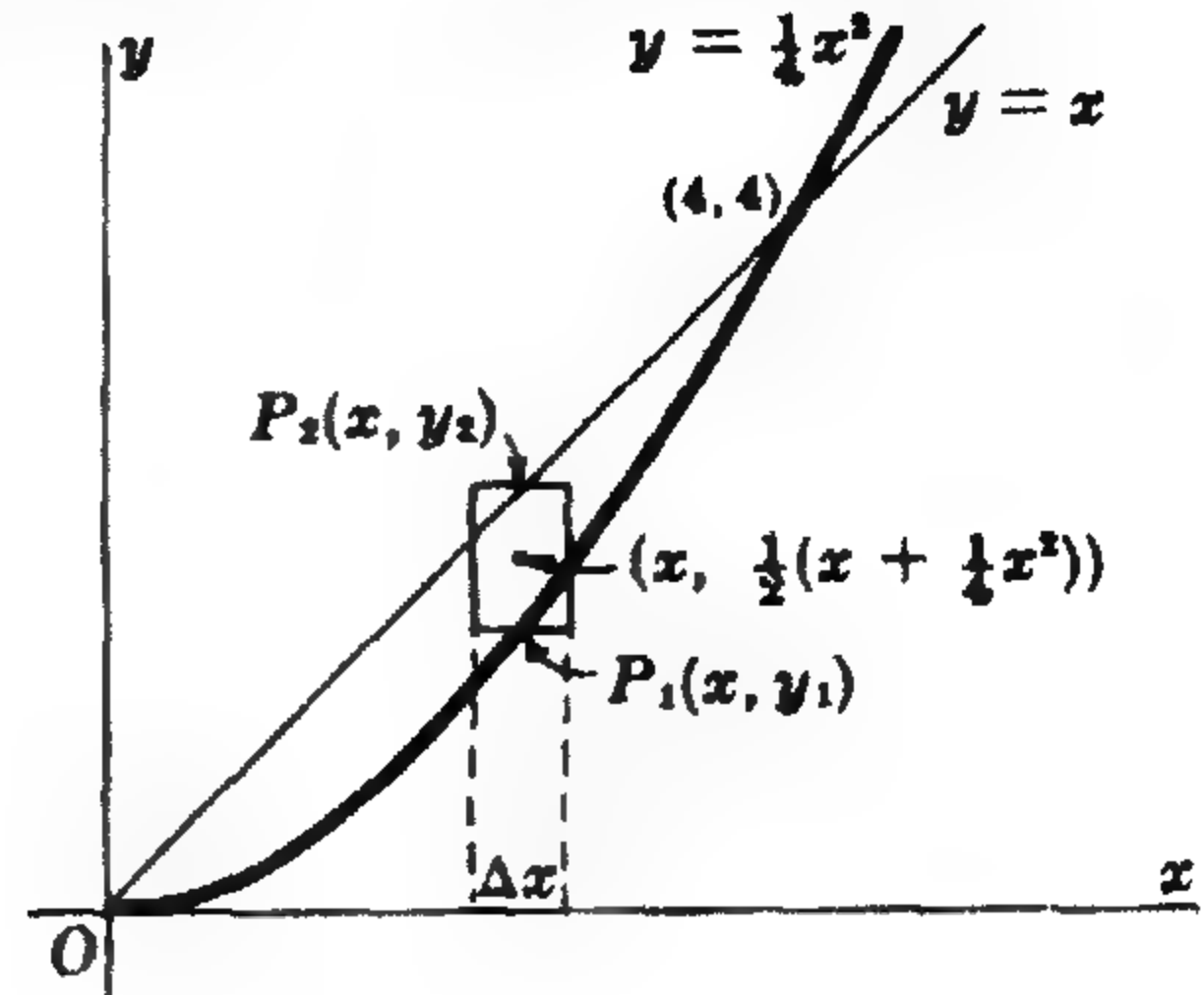
٣- أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور y لسطح المستوى الواقع في الربع الأول ، والمحدد بالقطع المكافئ $x^2 = 4y$ والمستقيم $x = 4$. أنظر الشكل ٤-٣٨ .

إذا استخدمنا المستطيل المقرب المين في الشكل ٤-٣٨ ، والذي مساحته Δx $(x - 1/4 x^2)$ ومركزه المتوسط هو $[x, 1/2 (x + 1/4 x^2)]$ فإننا نجد :

$$I_y = \int_0^4 x^2 (x - \frac{1}{4} x^2) dx = \frac{64}{5} = \frac{24}{5} A \text{ و } A = \int_0^4 (x - \frac{1}{4} x^2) dx = \frac{8}{3}$$



شكل ٣٨ - ٥



شكل ٣٨ - ٤

٤ - أوجد عزم القصور الذاتي حول كل من المحورين الاحداثيين لسطح المستوى الواقع بين المنحنى $y = \sin x$ من $x=0$ إلى $x = \pi$ ومحور السينات. أنظر الشكل ٣٨ - ٥ .

$$A = \int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$$

$$I_x = \int_0^\pi y^2 \cdot \frac{1}{3} \sin x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3} \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^\pi = \frac{4}{9} = \frac{2}{9} A$$

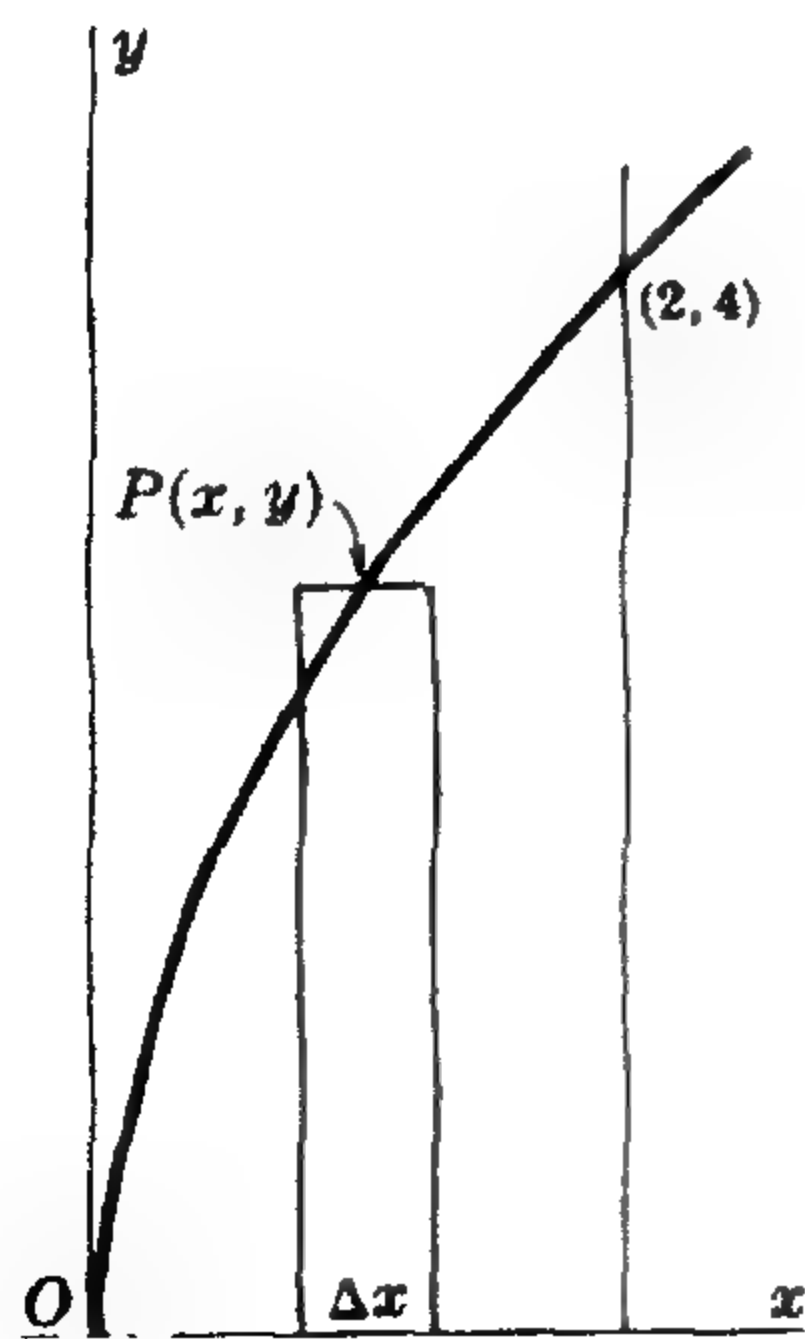
$$I_y = \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \left[2 \cos x + 2x \sin x - x^2 \cos x \right]_0^\pi = (\pi^2 - 4) = \frac{1}{2} (\pi^2 - 4) A$$

٥ - أوجد عزم القصور الذاتي لاسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها b ونصف قطر قاعدتها a حول محور الاسطوانة. أنظر الشكل ٣٨ - ٦ .

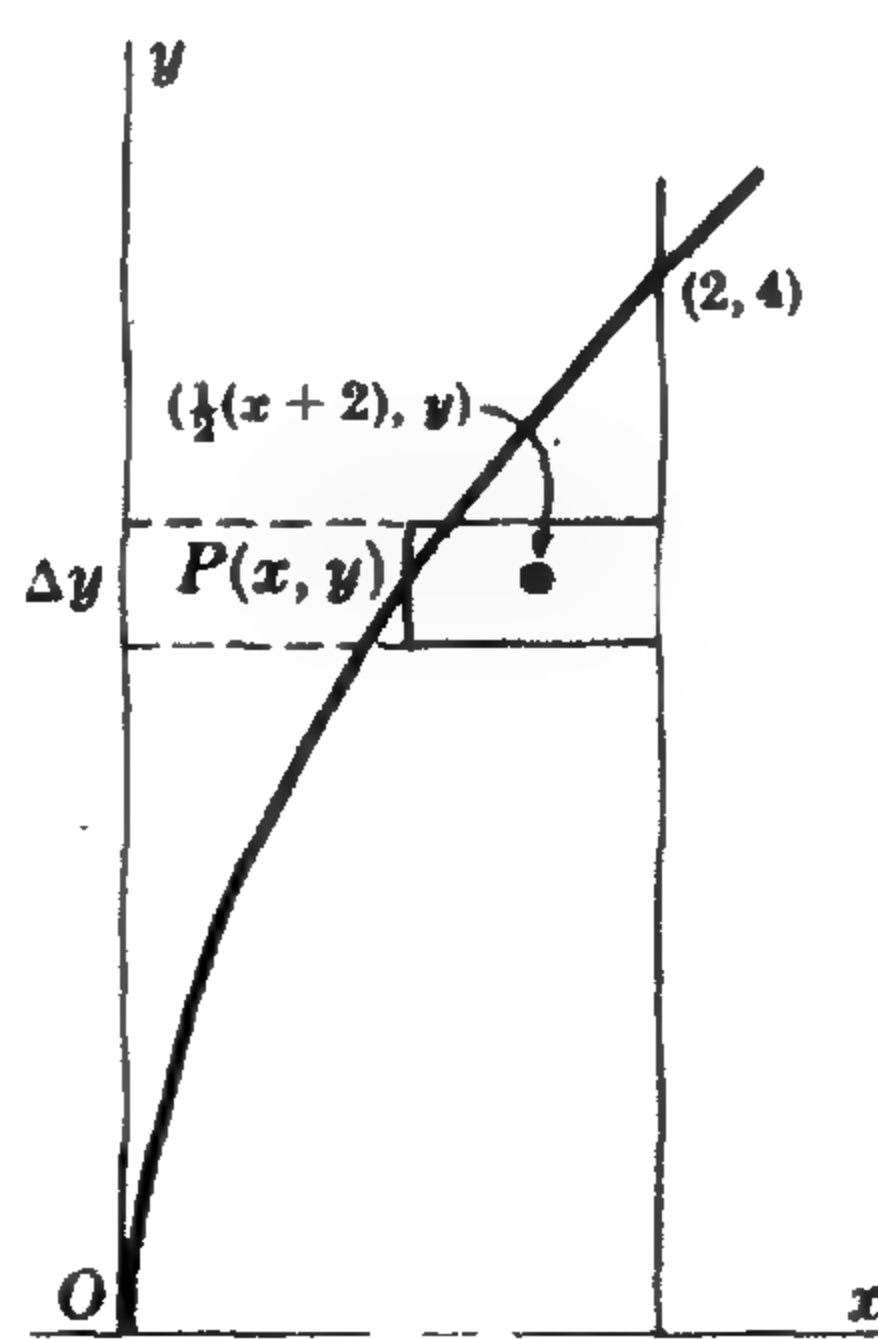
لنفرض أن الاسطوانة ناتجة عن دوران المستطيل الذي بعده a و b حول المحور y كما هو مبين في الشكل ٣٨ - ٦ . إذن المركز المتوسط للمستطيل المقرب المبين في الشكل هو $(x, \frac{1}{2} b)$ ، وحجم القشرة الناتجة عن دوران المستطيل حول المحور y هو $\Delta V = 2\pi b x \cdot \Delta x$ وبما أن $V = \pi b a^2$ ، فإن :

$$I_y = 2\pi \int_0^a x^2 \cdot b x \, dx = \frac{1}{2} \pi b a^4 = \frac{1}{2} \pi b a^2 \cdot a^2 = \frac{1}{2} V a^2$$

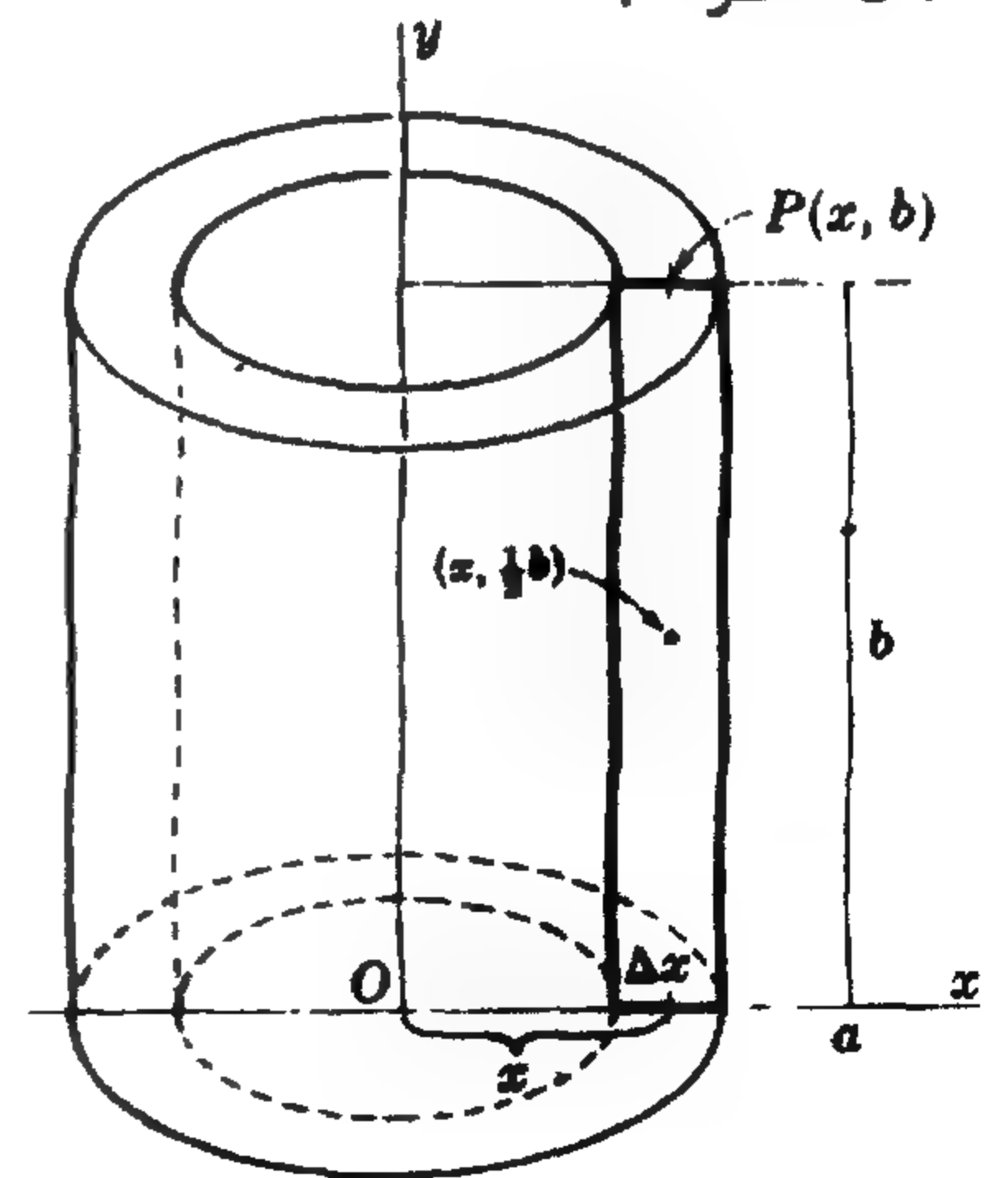
وهكذا نجد أن عزم القصور الذاتي لاسطوانة دائرية قائمة حول محورها يساوي نصف حاصل ضرب حجمها في مربع نصف قطرها .



شكل ٣٨ - ٨



شكل ٣٨ - ٧



شكل ٣٨ - ٦

٦- أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الحجم الناتج من الدوران حول المحور السيني للمساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمحور السيني والخط $x = 2$.

الحل الأول : بالنظر إلى الشكل ٣٨-٧ نجد أن المركز المتوسط للمستطيل المقرب المبين في الشكل ٣٨-٧ هو $[\frac{1}{2}(x+2), y]$ وأن الحجم الناتج عن دوران المستطيل حول المحور x هو $2\pi y(2-x)\Delta y = 2\pi y(2-y^2/8)\Delta y$. إذن :

$$I_x = 2\pi \int_0^2 y^2 \cdot y(2-y^2/8) dy = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V \text{ و } V = 2\pi \int_0^2 y(2-y^2/8) dy = 16\pi$$

الحل الثاني : بالنظر إلى الشكل ٣٨-٨ نجد أن الحجم الناتج عن دوران المستطيل المقرب في الشكل ٣٨-٨ حول المحور x يساوي $\pi y^2 \Delta x$ ، وباستخدام نتيجة المسألة ٥ نجد أن عنصر عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور x يساوي $\frac{1}{2}\pi y^2 (\pi y^2 \Delta x) = \frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x$ إذن :

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = 8\pi \int_0^2 x dx = 16\pi$$

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_0^2 y^4 dx = 32\pi \int_0^2 x^2 dx = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

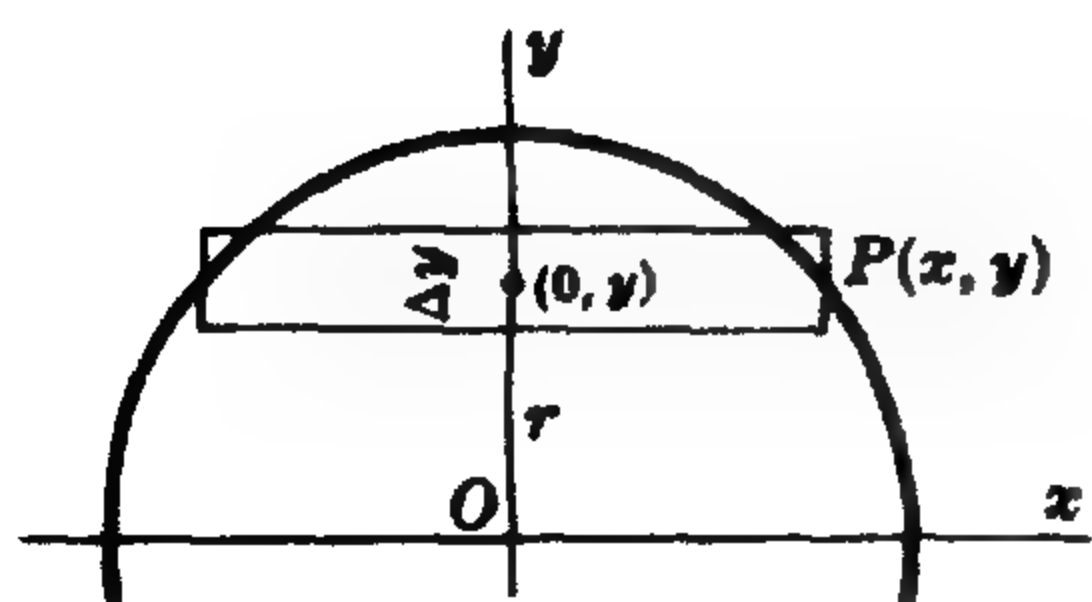
٧- أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الحجم الناتج عن دوران المساحة المغطاة في المسألة ٦ حول المحور العصادي . أنظر الشكل ٣٨-٨ .

إن الحجم الناتج عن دوران المستطيل المبين بالشكل ٣٨-٨ حول المحور y يساوي $2\pi xy \Delta x$ إذن :

$$V = 2\pi \int_0^2 xy dx = 4\sqrt{2}\pi \int_0^2 x^{3/2} dx = \frac{64}{5}\pi$$

$$I_y = 2\pi \int_0^2 x^2 \cdot xy dx = 4\sqrt{2}\pi \int_0^2 x^{5/2} dx = \frac{256}{9}\pi = \frac{20}{9}V$$

٨- أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور حجم الكرة الناتجة عن دوران دائرة نصف قطرها r حول قطر ثابت فيها .
لنأخذ الدائرة كما في الشكل حيث القطر الثابت واقع على المحور x ونستخدم طريقة القشرة .



شكل ٣٨-٩

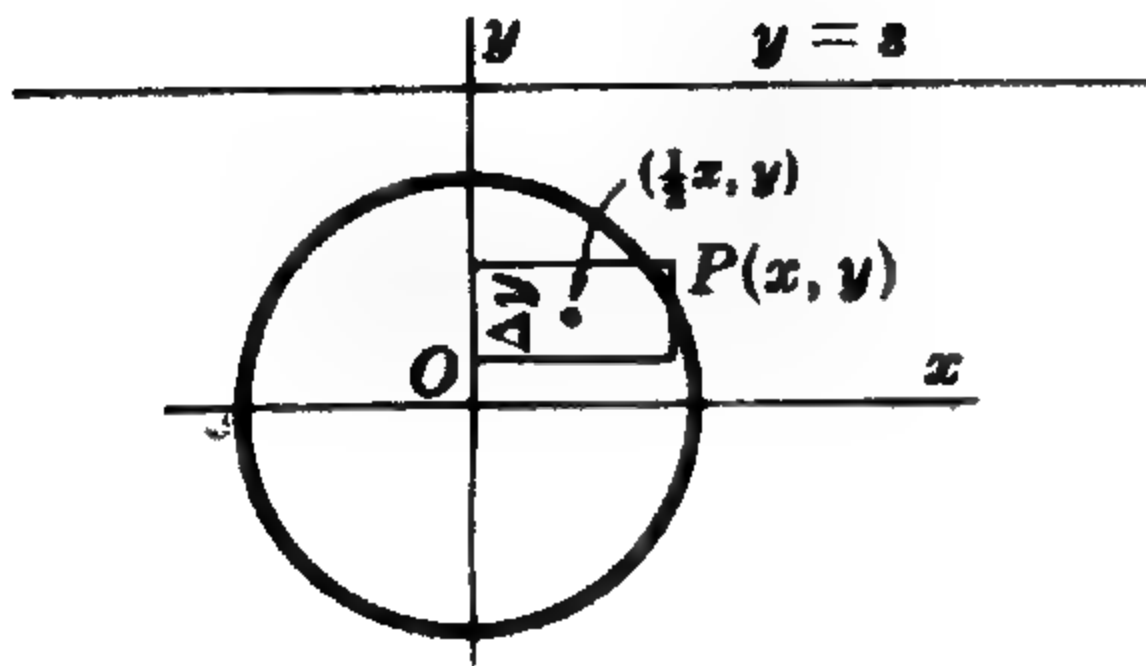
$$V = 2\pi \int_0^r 2x \cdot y dy = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$I_x = 4\pi \int_0^r y^3 \cdot xy dy = 4\pi \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

لنضع $y = r \sin z$ فيكون $\sqrt{r^2 - y^2} = r \cos z$ ، و $dy = r \cos z dz$.

والحصول على التكامل بالنسبة لـ z المقابلين لحدي التكامل بالنسبة لـ y ، نلاحظ أنه عندما $y = 0$ يكون $0 = r \sin z$ ومنه $0 = \sin z$ وبالتالي $z = 0$ وعندما $y = r$ يكون $r = r \sin z$ ومنه $1 = \sin z$ وبالتالي $z = \frac{1}{2}\pi$ إذن :

$$I_z = 4\pi r^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 z \cos^2 z dz = 4\pi r^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 z) \cos^2 z \sin z dz = \frac{8}{15}\pi r^5 = \frac{8}{15}r^2 V$$



شكل ٣٨ - ١٠

٩- أوجد عزوم القصور الذاتي لسطح دائري الشكل نصف قطره r بالنسبة لمستقيم في مستواه يبعد s units عن مركزه. لتأخذ مركز الدائرة في نقطة الأصل ولنبحث أولاً عن عزوم القصور الذاتي للدائرة بالنسبة لقطرها الموازي للمستقيم المفروض.

$$I_z = 4 \int_0^r y^2 \cdot x dy = 4 \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{4}r^4\pi = \frac{1}{4}r^2 A$$

$$I_z = I_z + A \cdot s^2 = (\frac{1}{4}r^2 + s^2)A \quad \text{ومنه}$$

١٠- إذا فرضنا أن عزوم القصور الذاتي للجسم ناتج عن دوران قوس من المنحنى $y = \sin 3x$ حول المحور x بالنسبة لمحور الجسم يساوي $I_z = \pi^2/16 = 3V/8$ ، فأوجد عزوم القصور الذاتي للجسم بالنسبة للمستقيم $y = 2$.

$$I_{y=2} = I_z + 2^2 V = 3V/8 + 4V = 35V/8$$

مسائل إضافية

١١- أوجد عزوم القصور الذاتي لكل من السطوح التالية بالنسبة للمستقيم الوارد إلى جانب كل منهما :

- (١) $y = 4 - x^2, x = 0, y = 0$ بالنسبة للمحور x ؛ بالنسبة للمحور y : ج . $128A/35, 4A/5$
 (ب) $y = 8x^2, y = 0, x = 1$ بالنسبة للمحور x ، بالنسبة للمحور y : ج . $128A/15, 2A/3$
 (ج) $x^2 + y^2 = a^2$ بالنسبة لواحد من أقطارها . ج . $a^2 A/4$
 (د) $y^2 = 4x, x = 1$ بالنسبة للمحور x ، بالنسبة للمحور y : ج . $4A/5, 3A/7$
 (هـ) $4x^2 + 9y^2 = 36$ بالنسبة للمحور x ؛ بالنسبة للمحور y : ج . $A, 9A/4$

١٢- استخدم نتائج المسألة ١١ ونظرية المحور الموازي لتحصل على عزوم القصور الذاتي للسطح المفروض حول المستقيم المفروض .

(١) $y = 4 - x^2, y = 0$ بالنسبة للمستقيم $x = 4$ (ب) $x^2 + y^2 = a^2$ بالنسبة للمماس .

(ج) $y^2 = 4x, x = 1$ بالنسبة للمستقيم $x = 1$.

ج : (١) $84A/5$ (ب) $5a^2 A/4$ (ج) $10A/7$

١٣- أوجد عزوم القصور الذاتي حول محور الدوران للجسم الناتج عن دوران السطح المستوي المفروض حول المستقيم المفروض .

(١) $y = 4x - x^2, y = 0$ بالنسبة للمحور x وبالنسبة للمحور y : (ب) $y^2 = 8x, x = 2$ بالنسبة

المحور x وبالنسبة للمحور y : (ج) $4x^2 + 9y^2 = 36$ بالنسبة للمحور x وبالنسبة للمحور y : (د) $x^2 + y^2 = a^2$ بالنسبة للمستقيم $y = b$ حيث $b > a$.

ج : (١) $128V/21, 32V/5$ (ب) $16V/3, 20V/9$ (ج) $8V/5, 18V/5$ (د) $(b^2 + \frac{3}{4}a^2)V$

١٤ - استخدم نظرية المحور الموازي لتحصل على عزم القصور الذاتي لـ (١) كرة نصف قطرها r بالنسبة لمستقيم مماس لها ، و (ب) اسطوانة دائرية قائمة بالنسبة لأحد عناصرها .

$$\text{ج : (١) } 7r^2V/5, \quad (\text{ب}) \quad 3r^2V/2$$

١٥ - برهن أن عزم القصور الذاتي لسطح مستوي بالنسبة لمستقيم L عمودي عليه (أو بالنسبة لموقع العمود على المستوى) يساوي مجموع عزوم القصور الذاتية بالنسبة لأي مستقيمين متعامدين في المستوى وماريين بموقع L .

١٦ - أوجد عزم القصور الذاتي القطبي I_0 (عزم القصور الذاتي بالنسبة لنقطة الأصل) لـ : (١) مثلث محدد بـ $x=4, y=0, y=2x$ (ب) دائرة نصف قطرها r ومركزها في نقطة الأصل (ج) الدائرة $x^2 - 2rx + y^2 = 0$ (د) السطح المحدد بالمستقيم $y = x$ والقطع المكافئ $y^2 = 2x$.

$$\text{ج : (١) } I_0 = I_x + I_y = 56A/3, \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{2}r^2A, \quad (\text{ج}) \quad 3r^2A/2, \quad (\text{د}) \quad 72A/35$$

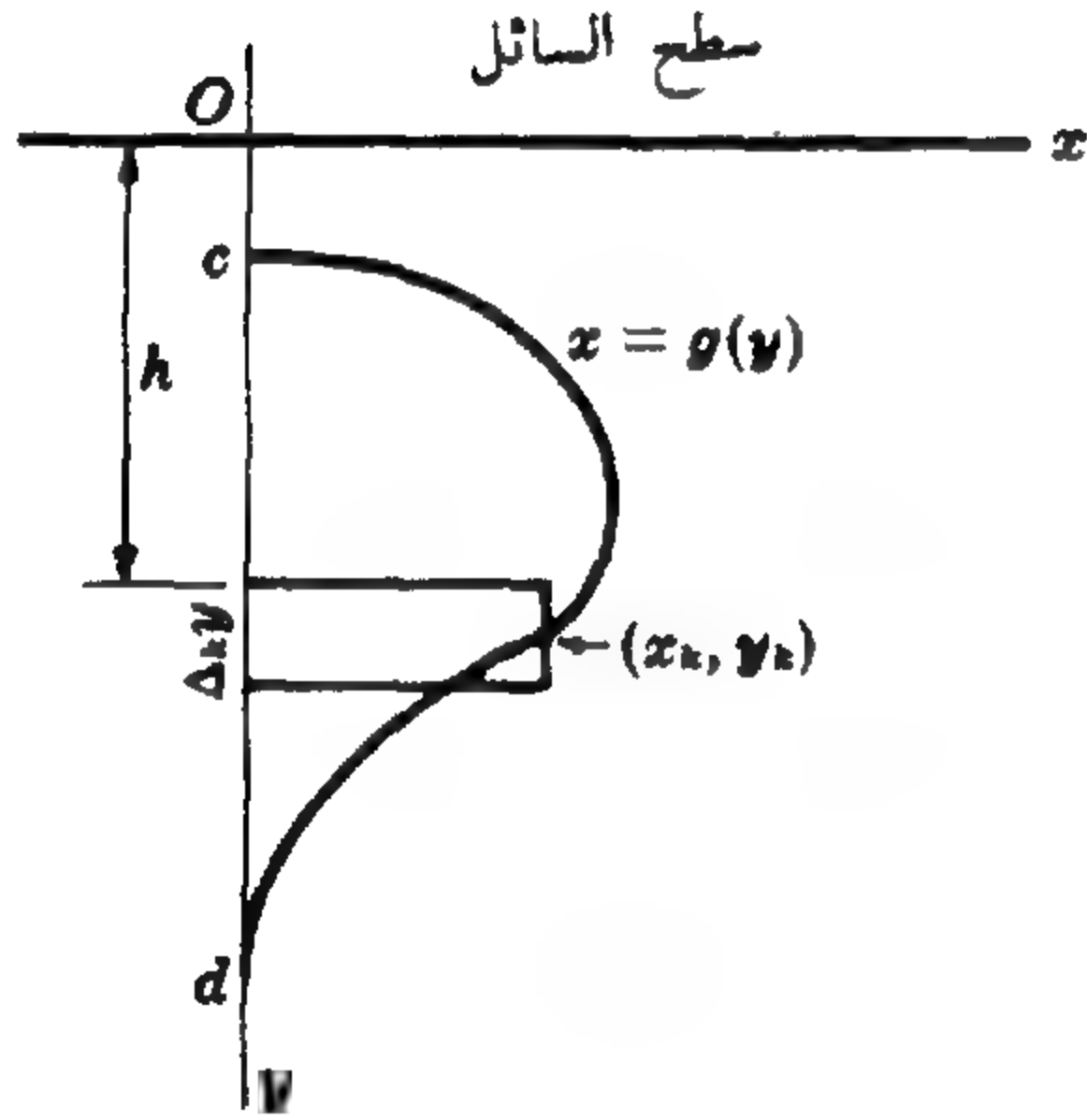
الفصل التاسع والثلاثون

ضغط السائل

الضغط = القوة الواقعة على وحدة المساحات = $\frac{\text{القوة المؤثرة عمودياً على مساحة ما}}{\text{المساحة التي تؤثر عليها القوة}}$ إن الضغط p على سطح أفقي

مساحته A الناتج عن عمود من سائل ارتفاعه h ويرتفع فوق السطح يساوي $p = wh$ حيث w وزن وحدة الحجم من السائل وهو يساوي pg بفرض أن p كثافة السائل و g ثابت الجاذبية . وإذا أعطيت p بـ Kg m^{-3} و g بـ ms^{-2} فإن w تعطى بـ Nm^{-3} . والقوة على السطح المشار إليه تساوي حاصل ضرب الضغط في مساحة السطح whA والضغط الناتج عن وجود سائل ، عند أية نقطة داخل السائل ، متساو في جميع الاتجاهات .

القوة المؤثرة على سطح مستو مغمور :



شكل ٣٩ - ١

يوضح الشكل ٣٩ - ١ سطح مستو مغمور عمودياً في سائل وزن وحدة الحجم منه يساوي $w \text{ Nm}^{-3}$. لنأخذ السطح في المستوى y بحيث يقع المحور x على سطح السائل والمحور y رأسياً لأسفل . نقسم السطح إلى شرائح موازية باستمرار لسطح السائل ، ولنقرب كل شريحة إلى مستطيل (كما في الفصل ٣٤) .

لنرمز لعمق الطرف الأعلى للمستطيل الممثل المبين في الشكل بـ h . إذن القوة المؤثرة على هذا المستطيل الذي عرضه Δy_k وطوله $x_k = g(y_k)$ تساوي

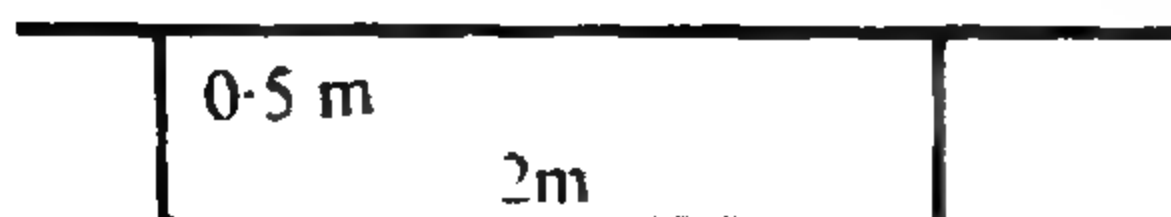
$w \cdot y_k' \cdot g(y_k) \Delta y_k$ ، حيث y_k قيمة ما لـ y بين h و $h + \Delta y_k$. والقوة الكلية المؤثرة على السطح تساوي ، استناداً إلى نظرية بليس :

$$F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n w \cdot y_k' \cdot g(y_k) \Delta y_k = w \int_c^d y \cdot g(y) dy = w \int_c^d yx dy$$

إذن القوة المؤثرة على سطح مستو مغمور رأسياً في سائل تساوي حاصل ضرب وزن وحدة الحجم من السائل في المساحة المغمورة في عمق المركز المتوسط للسطح تحت سطح السائل . وهذه الصيغة تستعمل كبداً عند تشكيل جميع التكاملات .

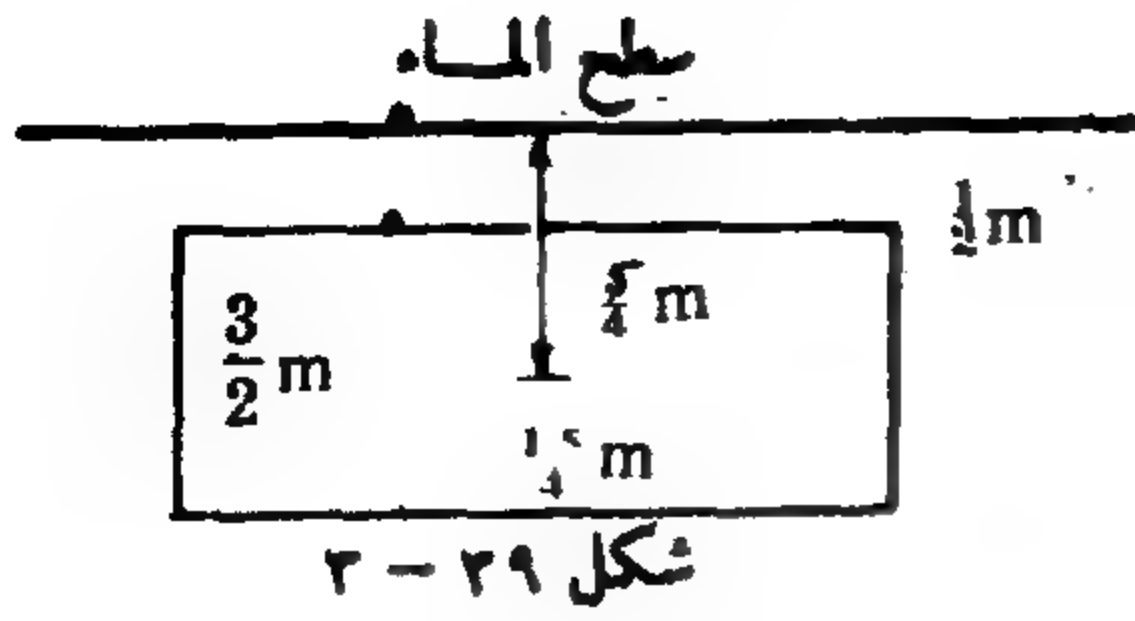
مسائل محلولة

سطح الماء



شكل ٣٩ - ٢

١ - أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي مستطيل مغمور في الماء كما في الشكل ٣٩ - ٢ ، علماً بأن 1 m^3 من الماء يزن 1000 Kg وهذا يساوي قوة مقدارها 9800 newtons .



إن مساحة السطح المغمورة $0.5 \times 2 = 1 \text{ m}^2$ ويقع مركزها المتوسط على عمق 0.25 m تحت سطح الماء وبالتالي فإن القوة $F = \text{الوزن النوعي} \times \text{المساحة} \times \text{عمق المركز المتوسط أي:}$

$$F = 9800 \text{ Nm}^{-3} \times 1 \text{ m}^2 \times 0.25 \text{ m} = 2450 \text{ N}$$

٢- أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي مستطيل مغمور في الماء كما في الشكل ٣٩ - ٣. إن مساحة السطح المغمور $45/8 \text{ m}^2$ ، ويقع المركز المتوسط على عمق $5/4 \text{ m}$ تحت سطح الماء. إذن :

$$F = 9800 \text{ Nm}^{-3} \times 45/8 \text{ m}^2 \times 5/4 \text{ m} = 68906.25 \text{ N.}$$

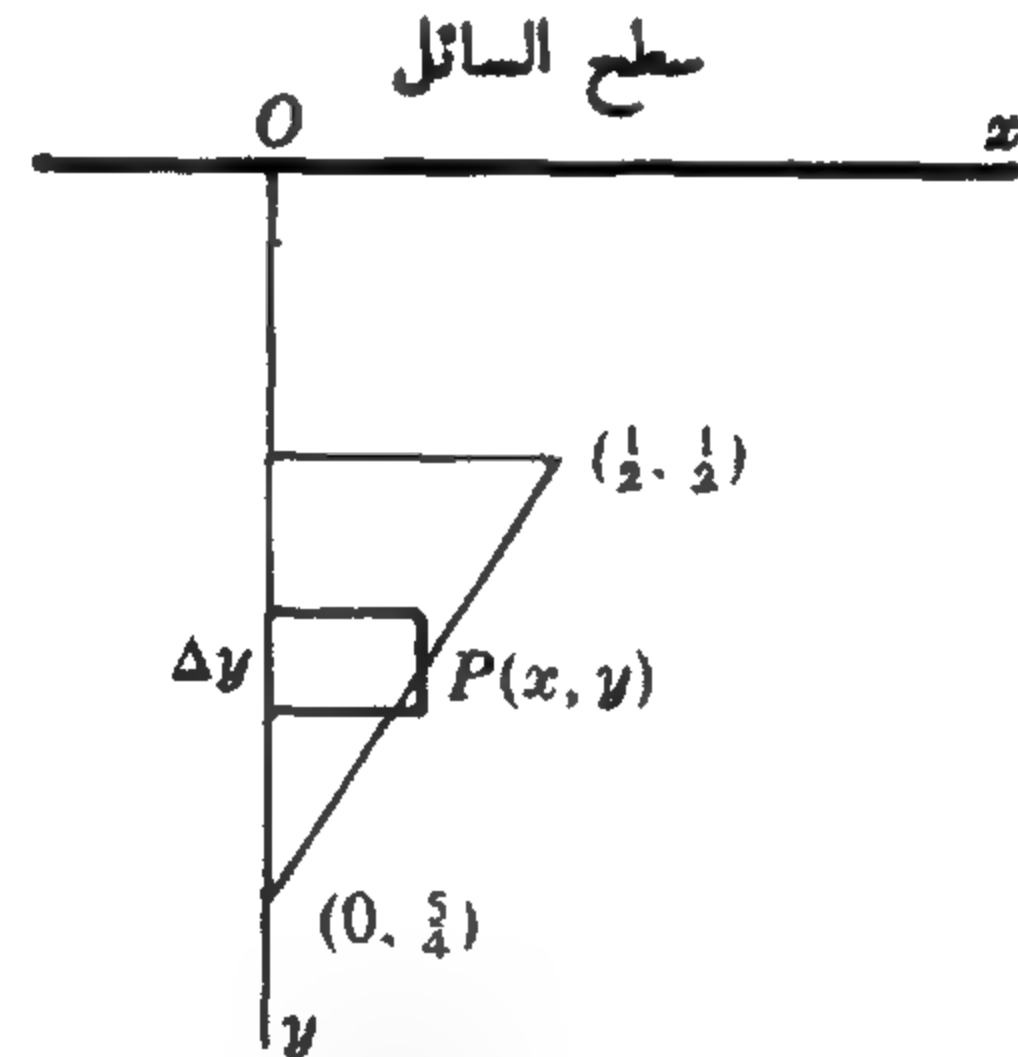
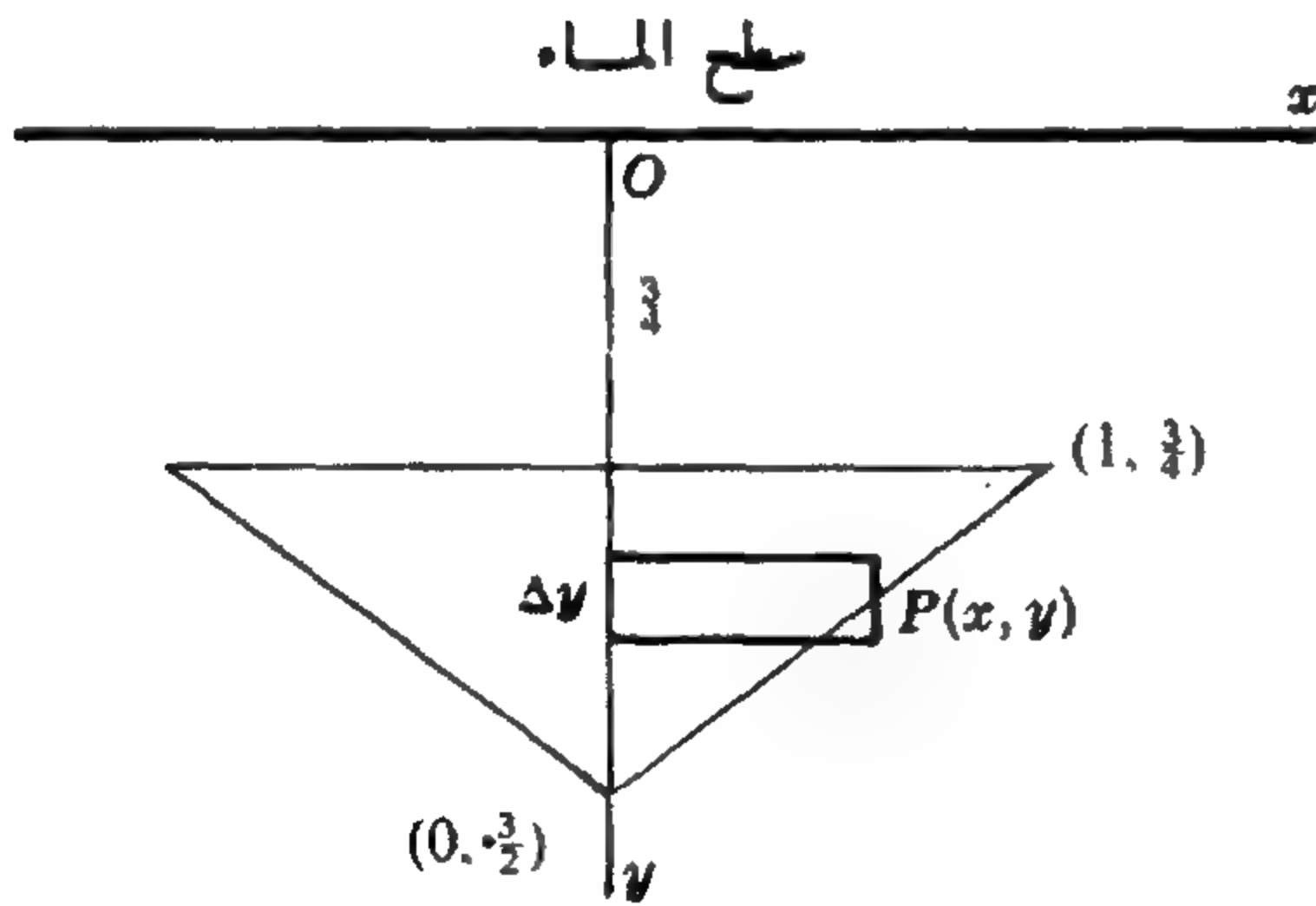
٣- أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي المثلث المبين في الشكل ٣٩ - ٤ ، علما بأن وحدة الطول هي metres وأن الوزن النوعي للسائل هو : $w = 8000 \text{ Nm}^{-3}$

الحل الأول : إن السطح المغمور محدد بالمستقيمت $3x + 2y = 5/2$ ، $x = 0$ ، $y = 1/2$

وإن القوة المؤثرة على المستطيل المقرب الذي مساحته $x \cdot \Delta y$ وعمقه y تساوى $w \cdot y \cdot x \cdot \Delta y = w y \left(\frac{5-4y}{6} \right) \Delta y$. إذن :

$$F = w \int_{1/2}^{5/4} y \left(\frac{5}{6} - \frac{2y}{3} \right) dy = \frac{9}{64} w = 1125 \text{ N}$$

الحل الثاني : إن مساحة السطح المغمور تساوى $3/16 \text{ m}^2$ وإن المركز المتوسط على عمق $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} \text{ m}$ تحت سطح السائل وبالتالي فإن : $F = 8000 \times \frac{3}{16} \times \frac{3}{4} = 1125 \text{ N}$



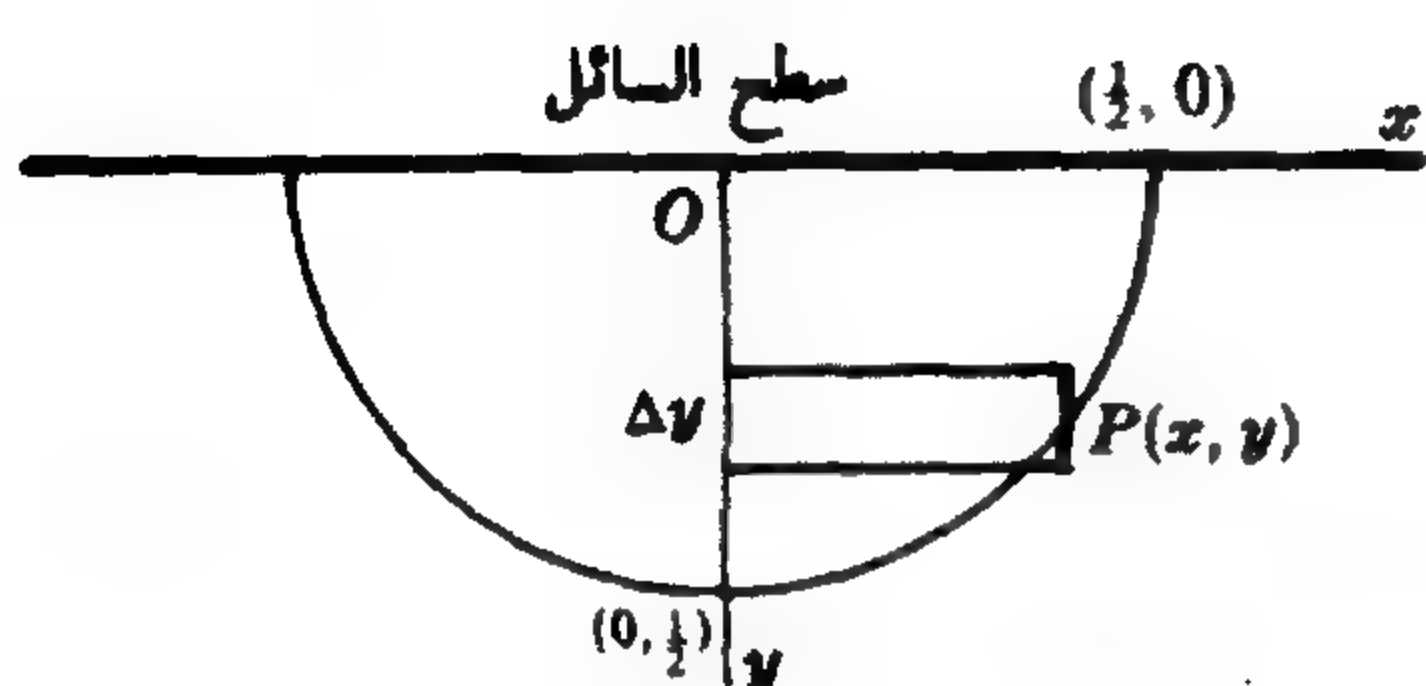
٤- صفيحة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها $5/4 \text{ m}$ و $5/4$ و 2 وضعت رأسيا في الماء بحيث كان أطول أضلاعها لأعلى وبشكل أفق وعلى عمق $3/4 \text{ m}$ تحت سطح الماء. احسب القوة المؤثرة على أحد جانبي الصفيحة. أنظر إلى الشكل ٣٩ - ٥.

الحل الأول : نأخذ المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٣٩ - ٥. ونلاحظ أن القوة المطلوبة تساوى ضعف القوة المؤثرة على السطح المحدد بالمستقيمت $3x + 4y = 6$ ، $y = 3/4$ ، $x = 0$. إن مساحة المستطيل المقرب $x \cdot \Delta y$ وعمقه المتوسط y وبالتالي فإن $\Delta F = w y x \cdot \Delta y = w y (2 - 4y/3) \Delta y$ ومنه :

$$F = 2w \int_{3/4}^{3/2} y \left(2 - \frac{4}{3}y\right) dy = \frac{3}{4}w = 7350 \text{ N}$$

الحل الثاني : إن مساحة السطح المنحور $3/4 \text{ m}^2$ والمركز المتوسط على عمق $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}) = 1 \text{ m}$ تحت سطح الماء . وبالتالي فإن :

$$F = 9800 \times 3/4 \times 1 = 7350 \text{ N}$$



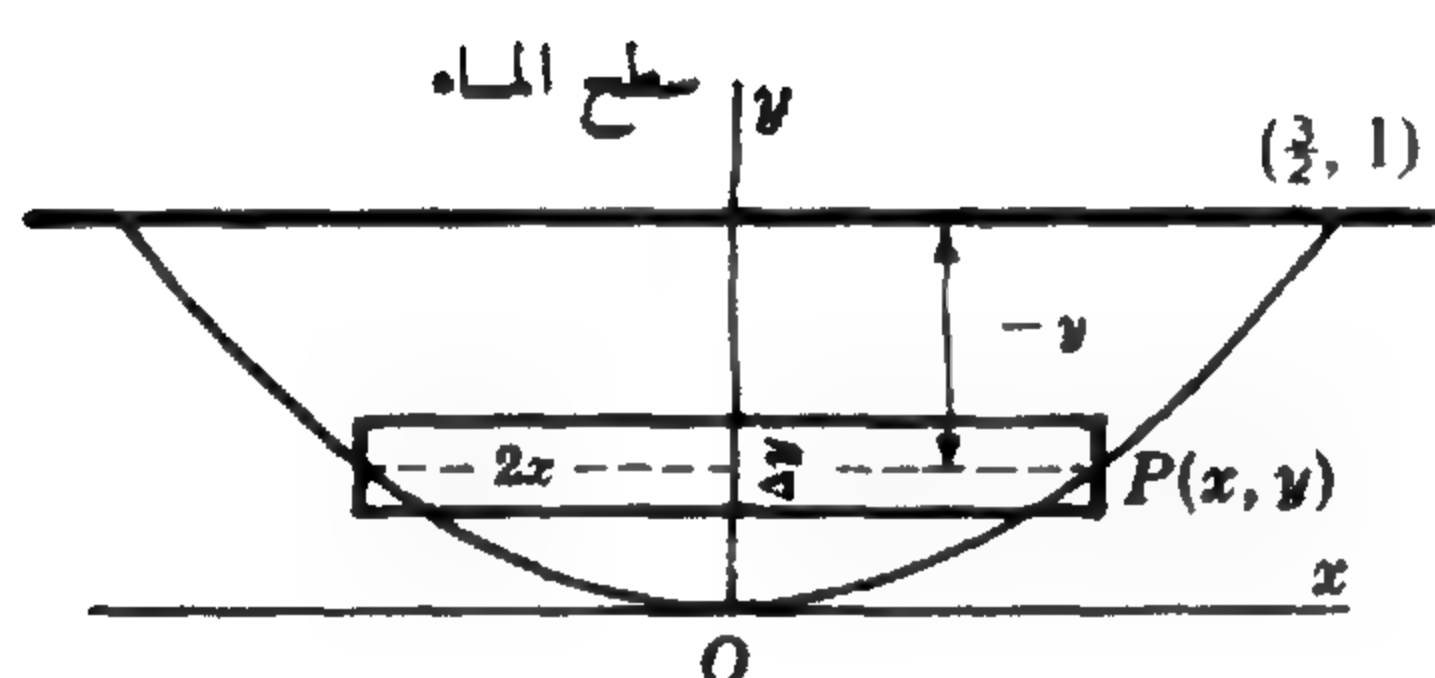
شكل ٣٩ - ٦

٥ - أوجد القوة المؤثرة على جدار حوض على شكل نصف دائرة نصف قطرها $1/2 \text{ m}$ عندما تملؤه بسائل وزنه النوعي

$$w = 9600 \text{ Nm}^{-3}.$$

باختيار المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٣٩ - ٦ نجد أن القوة المؤثرة على المستطيل المقرب تساوي $w y x \cdot \Delta y = w y \sqrt{1/4 - y^2} \Delta y$. وبالتالي فإن

$$F = 2w \int_0^{1/2} y \sqrt{1/4 - y^2} dy = \frac{1}{12} w = 800 \text{ N}$$



شكل ٣٩ - ٧

٦ - صفيحة على شكل قطع مكافئ قاعدتها 3 m وارتفاعها 1 m غمرت في الماء بحيث تقع قاعدتها على سطح الماء . أوجد القوة المؤثرة على وجه الصفيحة .

باختيار المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٣٩ - ٧ تكون معادلة القطع المكافئ $4x^2 = 9y$ ومساحة المستطيل المقرب $2x \cdot \Delta y$ والعمق المتوسط $1 - y$ لذلك :

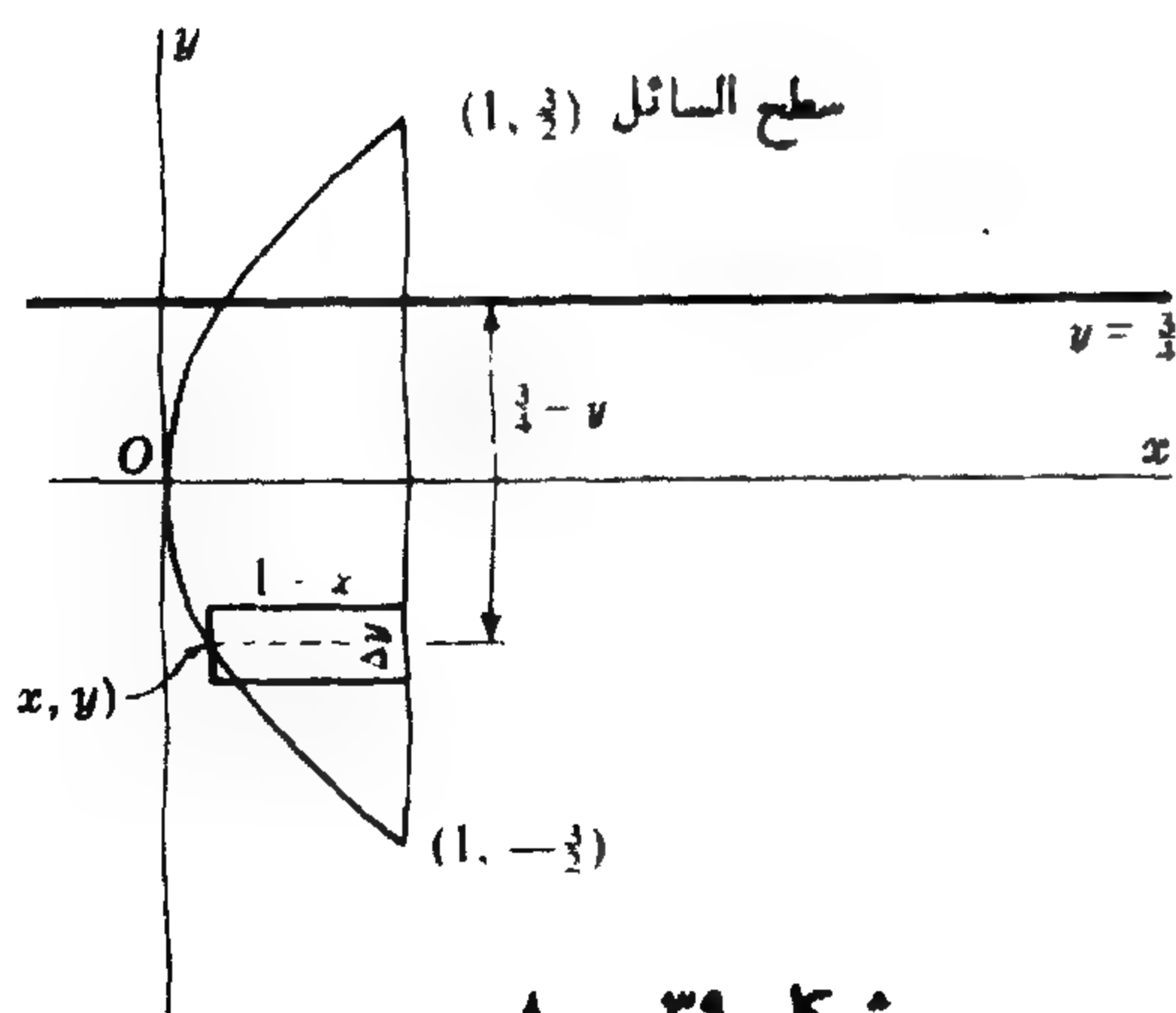
$$\Delta F = 2w(1-y)x \cdot \Delta y = w(1-y) \cdot 3\sqrt{y} \Delta y$$

$$F = 3w \int_0^1 (1-y)\sqrt{y} dy = \frac{4}{5}w = 7920 \text{ N}$$

٧ - أوجد القوة المؤثرة على صفيحة المسألة ٦ إذا كانت هذه الصفيحة مغمورة جزئياً في سائل وزنه النوعي $w = 7680 \text{ Nm}^{-3}$ بحيث يكون محورها موازياً لسطح السائل ويقع على عمق $3/4 \text{ m}$ تحت سطح السائل .

باختيار المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٣٩ - ٨ تكون معادلة القطع المكافئ $4y^2 = 9x$.

ومساحة المستطيل المقرب $(1-x)\Delta y$ وعمقه المتوسط $3/4 - y$ والقوة المؤثرة عليه هي :



شكل ٣٩ - ٨

$$\Delta F = w \left(\frac{3}{4} - y \right) (1 - x) \Delta y = w \left(\frac{3}{4} - y \right) \left(1 - \frac{4y^2}{9} \right) \Delta y$$

$$F = w \int_{-3/2}^{3/4} \left(\frac{3}{4} - y \right) \left(1 - \frac{4y^2}{9} \right) dy$$

$$= \frac{405}{256} w = 12150 \text{ N}$$

ومنه :

مسائل اضافية

٨- صفيحة مستطيلة الشكل ببعديها $1.5 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ غرقت رأسياً في سائل وزنه النوعي $w \text{ Nm}^{-3}$. أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهيها .

(أ) إذا كان الضلع الأقصر لأعلى ويقع على سطح السائل .

(ب) إذا كان الضلع الأقصر لأعلى ويقع على عمق 0.5 m تحت سطح السائل .

(ج) إذا كان الضلع الأكبر لأعلى ويقع على سطح السائل .

(د) إذا كانت الصفيحة معلقة بجبل من إحدى زواياها بحيث تكون هذه الزاوية على عمق 0.5 m تحت سطح السائل .

ج : (أ) $3w \text{ N}$ (ب) $4.5w \text{ N}$ (ج) $2.25w \text{ N}$ (د) $5.25w \text{ N}$

٩- بفرض من المحور x أفق والمحور y رأسى لأسفل ، أوجد القوة المؤثرة على أحد جانبي كل من المساحات التالية . وحدة الطول هي metres والوزن النوعي للسائل $w \text{ Nm}^{-3}$.

(أ) $y = 4x^2, y = 1$ سطح السائل عند $y = 0$.	ج : $2w/5 \text{ N}$
(ب) $y = 4x^2, y = 1$ سطح السائل عند $y = -0.5$.	ج : $11w/15 \text{ N}$
(ج) $y = 1 - 4x^2, y = 0$ سطح السائل عند $y = 0$.	ج : $4w/15 \text{ N}$
(د) $y = 1 - 4x^2, y = 0$ سطح السائل عند $y = -0.75$.	ج : $23w/30 \text{ N}$
(هـ) $y = 1 - 4x^2, y = 0.5$ سطح السائل عند $y = -0.25$.	ج : $19\sqrt{2}w/120 \text{ N}$

١٠- حوض مقطوع على شكل شبه منحرف عرضه 0.5 m عند القاع و 1 m عند القمة وعمق الحوض 0.75 m . أوجد القوة المؤثرة على أحد طرفيه (أ) إذا كان الحوض مملوئاً بالماء . (ب) إذا كان يحوى ماء إلى ارتفاع 0.5 m .

ج : (أ) 1837.5 N (ب) 714.6 N

١١- صفيحة دائرية الشكل نصف قطرها 0.5 m ، أنزلت في سائل (وزنه $w \text{ Nm}^{-3}$) بحيث يقع مركزها على عمق 1 m تحت سطح السائل . أوجد القوة المؤثرة على النصف الأسفل للصفيحة والقوة المؤثرة على نصفها الأعلى .

ج : $(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{12})w \text{ N}$ ، $(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{12})w \text{ N}$

١٢ - خزان اسطوانى نصف قطره 2 m ويستند على جانبه . فإذا كان هذا الخزان يحوى زيتا وزنه النوعى $w \text{ Nm}^{-3}$ وإلى عمق 3 m فأوجد القوة المؤثرة على أحد طرفيه . ج : $(\frac{8}{3}\pi + 9\sqrt{3})w\text{N}$

١٣ - نعرف مركز الضغط لقطعة السطح المستوية فى الشكل ٣٩ - ١ على أنها النقطة (\bar{x}, \bar{y}) التى إذا أثرت فيها قوة متمركزة قياسها F فإنها تعطى نفس العزم بالنسبة لأى مستقيم أفقى (رأسى) الذى تعطيه القوى الموزعة .

$$F\bar{y} = w \int_c^d y^2 x dy \quad \text{و} \quad F\bar{x} = \frac{1}{2} w \int_c^d y x^2 dy \quad (1)$$

(ب) بين أن عمق مركز الضغط تحت سطح السائل يساوى عزم القصور الذاتى للسطح مقسوما على العزم الأول لهذه القطعة بالنسبة لمستقيم واقع على سطح السائل .

١٤ - استخدم الجزء (ب) من المسألة (١٣) لتحمين عمق مركز الضغط تحت سطح السائل (١) المسألة ٥ ،

(ب) المسألة ٦ ، (ج) المسألة ٧ ، (د) المسألة ٩ (١) ، (ج) المسألة ٩ (ب)

ج :

(١) $3\pi/32$ ، (ب) $4/7$ ، (ج) $32/25$ ، (د) $5/7$ ، (هـ) $179/154$

الفصل الأربعون

الشغل

القوة الثابتة : الشغل W الذي تبذله قوة ثابتة F تؤثر لمسافة متجهة s على خط مستقيم يساوى $F \cdot s$ وحدة .
القوة المتغيرة : لنفرض الآن أن القوة متغيرة باستمرار وتؤثر في خط مستقيم . ل نرمز لـ x للمسافة الموجهة لنقطة تأثير القوة عن نقطة ثابتة على المستقيم ولنفرض أن القوة ممثلة على شكل دالة $F(x)$ في x .



شكل ١ - ١

لإيجاد الشغل المبذول عندما تتحرك نقطة التأثير من $x = a$ إلى $x = b$:
 (أ) قسم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى n من الفترات الجزئية طول كل منها $\Delta_k x$ ولنفرض x_k نقطة ما على الفترة الجزئية k .
 (ب) نفرض أن القوة تبقى ثابتة أثناء الإزاحة على طول الفترة الجزئية وأنها تساوى $F(x_k)$. إذن الشغل المبذول أثناء هذه الإزاحة يساوى $F(x_k) \Delta_k x$ ، والشغل الكلى المبذول الناتج من مجموعة القوى الـ n المفروضة يساوى :

$$\sum_{k=1}^n F(x_k) \Delta_k x.$$

(ج) نجعل عدد الفترات الجزئية يزداد إلى ما لا نهاية بحيث تقرب كل $\Delta_k x$ إلى الصفر ، ونطبق النظرية الأساسية لنحصل على :

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(x_k) \Delta_k x = \int_a^b F(x) dx$$

مسائل محلولة

١ - إن القوة اللازمة لإطالة زنبرك ، لحدود معينة ، تتناسب مع الاستطالة الناتجة . ويسمى ثابت التناسب معامل الزنبرك ، فإذا كان يلزم لزنبرك مفروض طوله 25 cm قوة قدرها 100 N كي يستطيل 0.5 cm ، فاحسب الشغل المبذول لاستطالة الزنبرك من 27 cm إلى 30 cm .

لنرمز بـ x للاستطالة فمعتدئ يكون $F(x) = kx$.

وعندما $x = 0.5$ يكون $F(x) = 100$ وبالتالي فإن $k = 200$ و $30x$

والشغل اللازم بذله لاستطالة قدرها Δx يساوى $200x \cdot \Delta x$ والشغل الكلى اللا

$$W = \int_1^3 200x dx = 2100 \text{ cmN} = 21 \text{ J}$$

٢ - إذا كان معامل زنبرك 4 MNm^{-1} . أوجد الشغل اللازم بذله لضغط الزنبرك 0.025 m .
نفرض أن x مقدار الإزاحة للطرف الحر للزنبرك بالأمتار فعنده يكون $F(x) = 4,000,000 x$ ويكون
الشغل اللازم بذله لإزاحة Δx هو $4,000,000 x \cdot \Delta x$ وبالتالي :

$$W = \int_0^{0.025} 4,000,000 x dx = 1250 \text{ J}$$

٣ - وزن كابل 40 Nm^{-1} ينفلت من ملف اسطوانى . فإذا كان 15 m قد أفلتت مسبقا فما الشغل الذى تبذله قوة
الجاذبية كى يفلت 75 m إضافيا .

نفرض أن x طول الجزء المفلوت من الحبل فى لحظة t . عنده يكون $F(x) = 40x$ ويكون :

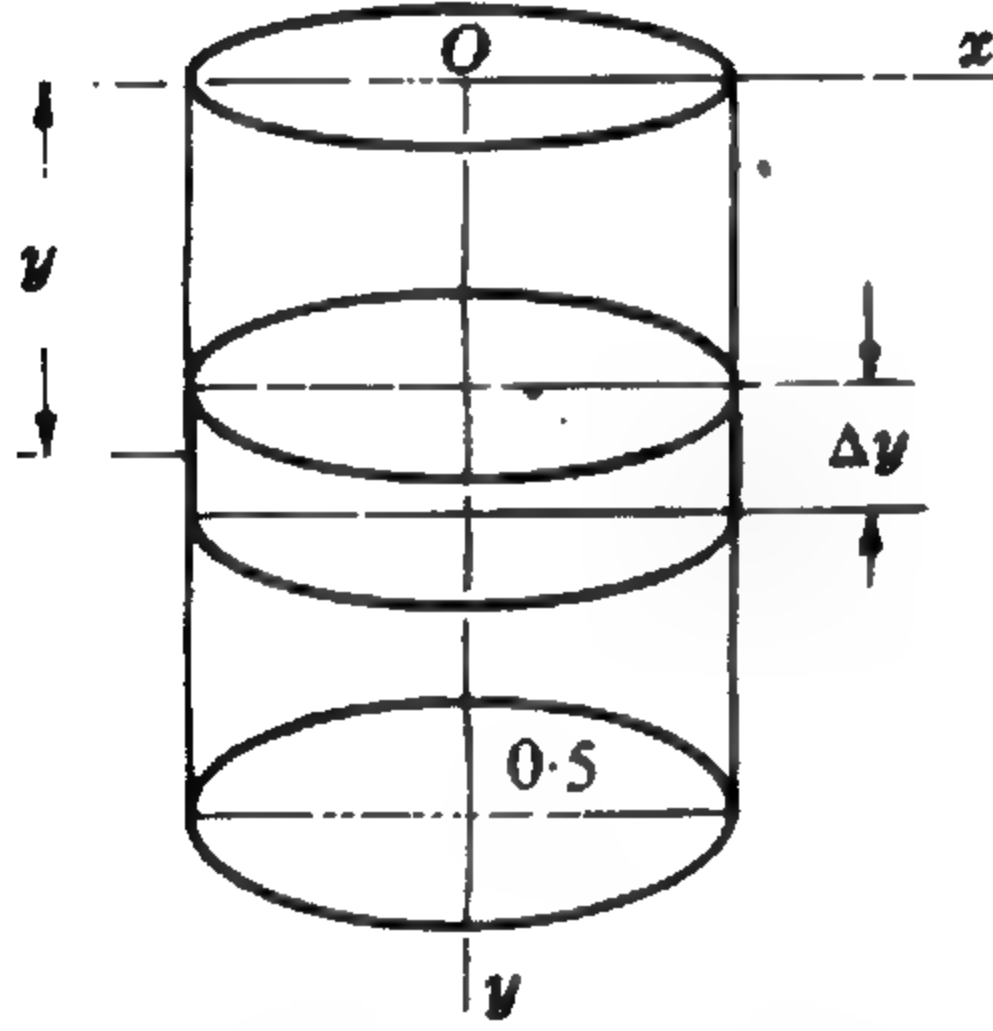
$$W = \int_{15}^{75} 40x dx = 157500 \text{ J}$$

٤ - كابل طوله 30 m ويزن 70 Nm^{-1} يرتبط بطرف هذا الكابل وزن مقداره 700 N . أوجد الشغل اللازم
لف 24 m من الكابل على ملف .

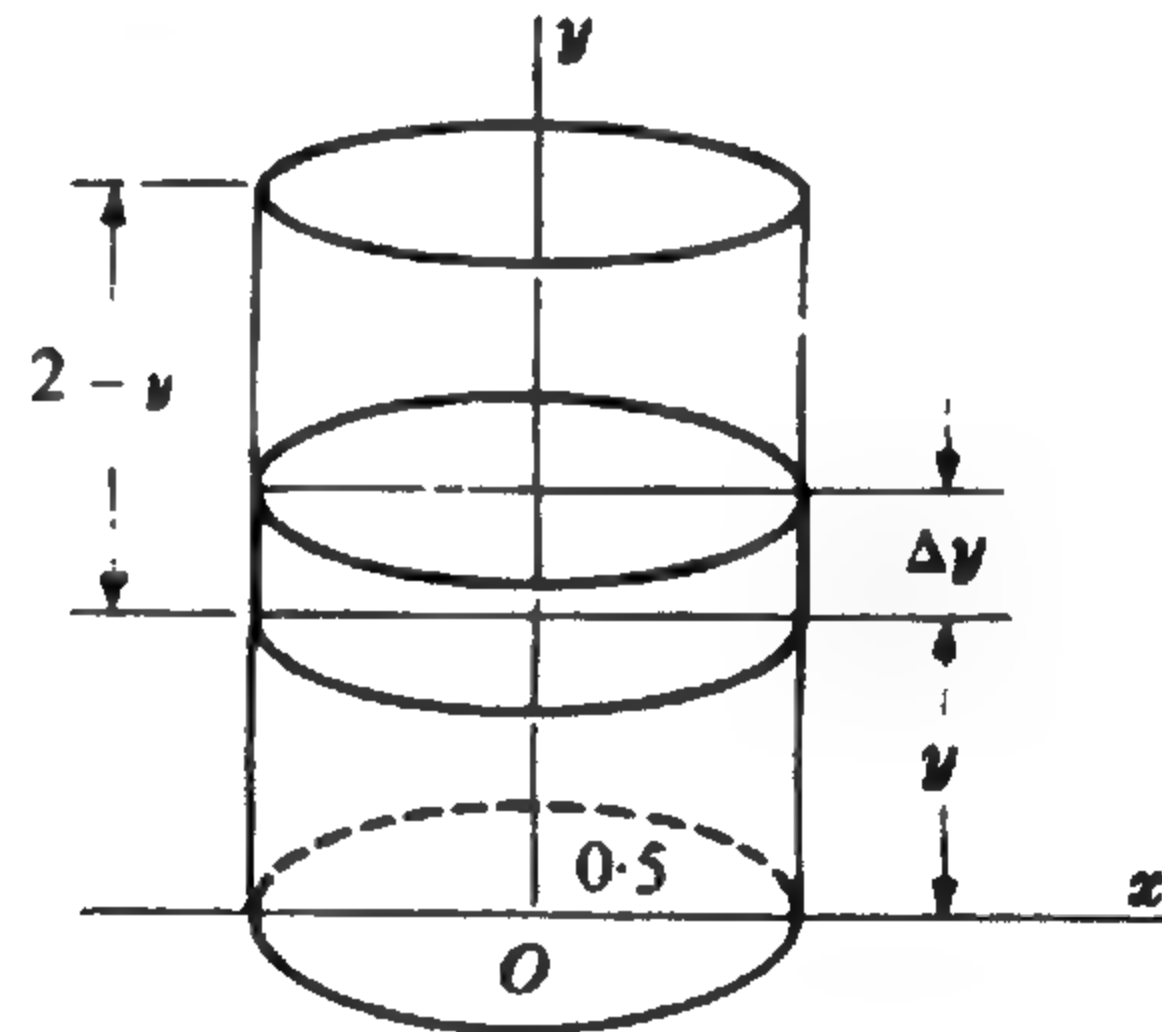
إن الوزن الكلى (جزء الكبل غير الملفوف مع الوزن) يساوى $7000 + 70(30 - x) = 4900 - 70x$
والشغل اللازم لرفع الوزن مسافة Δx هو $(4900 - 70x) \Delta x$. والشغل المطلوب إذن :

$$W = \int_0^{24} (4900 - 70x) dx = 97440 \text{ J}$$

٥ - خزان اسطوانى دائرى قائم نصف قطره 0.5 m وارتفاعه 2 m مملوء بالماء . أوجد الشغل اللازم لتفريغ الماء من
أهل الخزان . بفرض أن الوزن النوعى للماء 9800 Nm^{-3} .



شكل ٤٠ - ٣



شكل ٤٠ - ٢

الحل الأول : لننظر إلى الشكل ٤٠ - ٢ ولنتصور أن الماء دفع خارجا بواسطة مكبس أجبر على الحركة لأعلى
بدأ من أسفل الخزان . ويوضح الشكل ٤٠ - ٣ المكبس بعد أن ارتفع مسافة قدرها $y \text{ m}$ من أسفل الخزان . إن القوة
الرافعة تساوى وزن الماء فوق المكبس وهى تساوى تقريبا $F(y) = \pi r^2 w (2 - y) = \frac{1}{4} \pi w (2 - y)$ والشغل
اللازم لإزاحة المكبس مقدار Δy يساوى تقريبا $\frac{1}{4} \pi w (2 - y) \cdot \Delta y$. وبذلك يكون الشغل اللازم لإفراغ الماء
من أهل الخزان :

$$W = \frac{1}{4} \pi w \int_0^2 (2 - y) dy = \frac{1}{4} \pi w = \frac{1}{4} \pi (9800) = 4900\pi \text{ J}$$

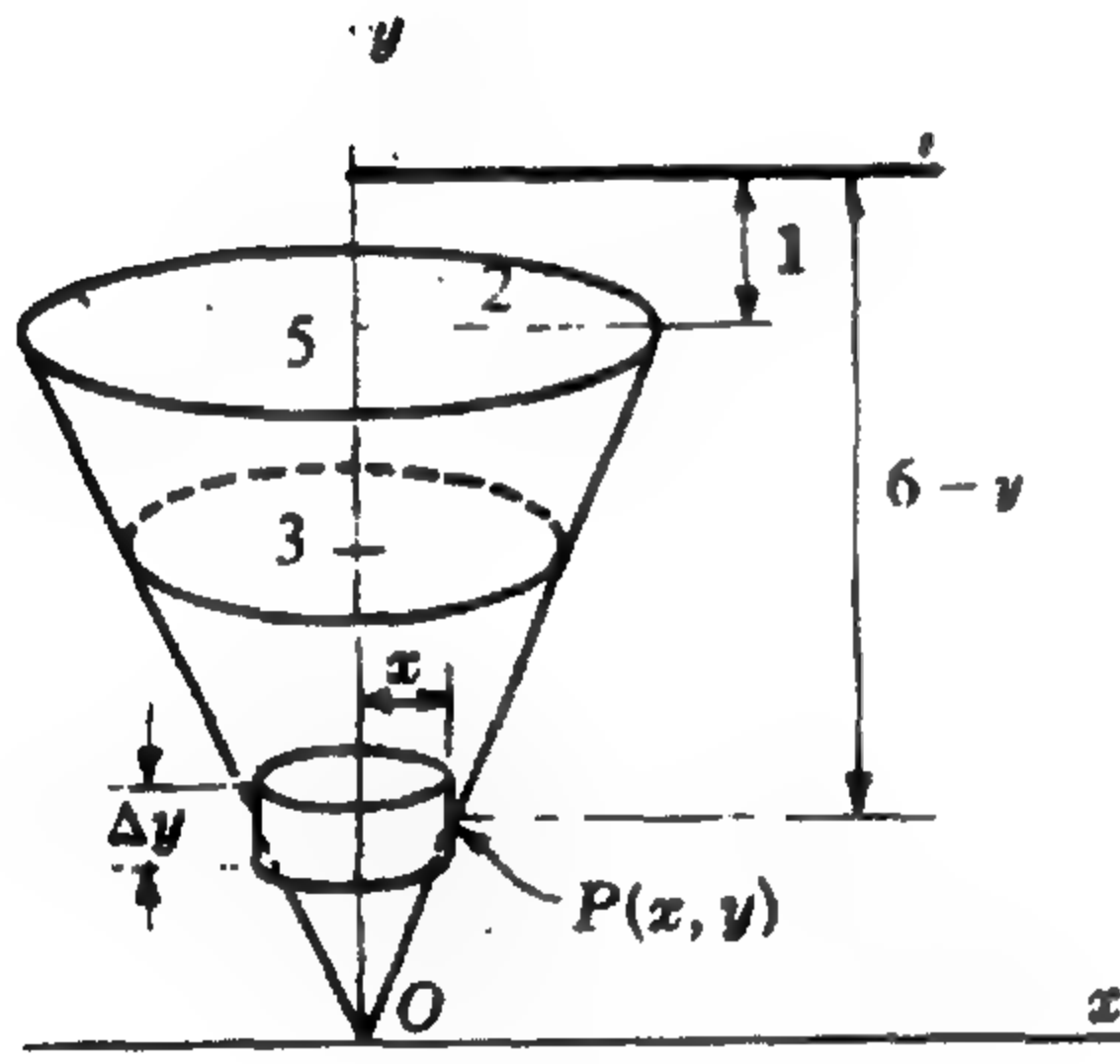
الحل الثاني : لننظر إلى الشكل ٤٠ - ٣ ولتصور أن الماء مجزأ إلى n اسطوانة صغيرة ارتفاع كل منها Δy وأنه يتم تفريغ الخزان برفع كل اسطوانة إلى القمة . لنحسب الشغل اللازم لرفع الاسطوانة المثلثة الميمنة في الشكل ٣٠ - ٤ . والذي بعدها المتوسط عن السقف y ووزنها $\frac{1}{4}\pi w \Delta y$. إذن الشغل اللازم لرفعها إلى القمة $\frac{1}{4}\pi w y \Delta y$. وبالجمع بالنسبة للأسطوانات الـ n وتطبيق النظرية الأساسية نجد :

$$W = \frac{1}{4}\pi w \int_0^3 y dy = \frac{1}{8}\pi w = 4900\pi \text{ J.}$$

٦ - يتسبب تمدد الغاز في اسطوانة في تحريك المكبس فإذا زاد حجم الغاز المحصور من 250 cm^3 إلى 400 cm^3 . وبفرض أن العلاقة بين الضغط $(p \text{ Ncm}^{-2})$ والحجم $(v \text{ m}^3)$ هي $pv^{1.4} = 3000$ فأوجد الشغل المبذول .

إذا رمزنا بـ A لمساحة المقطع للأسطوانة فإن pA تساوى مقدار القوة المؤثرة بالغاز . وإذا زاد الحجم بمقدار Δv فإن المكبس قد تحرك مسافة $\Delta v/A$ والشغل اللازم لهذه الإزاحة هو $pA \cdot \frac{\Delta v}{A} = \frac{3000}{v^{1.4}} \Delta v$. إذن :

$$W = 3000 \int_{250}^{400} \frac{dv}{v^{1.4}} = -\frac{3000}{0.4} v^{-0.4} \Big|_{250}^{400} = -7500 \left(\frac{1}{25^{0.4}} - \frac{1}{40^{0.4}} \right) = 1.5 \text{ J}$$



شكل ٤٠ - ٤

٧ - وعاء مخروطي الشكل قطر قاعدته العليا 4 m وعمقه 5 m . فإذا كان هذا الوعاء يحوى سائلا وزنه النوعي $w \text{ Nm}^{-3}$ وعمقه 3 m . فأوجد الشغل اللازم لضخ هذا السائل من موضع يعلو 1 m فوق قمة الوعاء .

لننظر للأسطوانة المثلثة في الشكل ٤٠ - ٤ والتي نصف قطرها x وارتفاعها y ومتوسط بعدها عن أسفل الإناء y . إن وزن هذه الاسطوانة Δy $\pi w x^2$ والشغل اللازم لرفعها إلى الارتفاع المطلوب $\pi w x^2 (6-y) \Delta y$.

ومن تشابه المثلثات نجد $x/y = 2/5$ أو $x = 2/5 y$.

إذن :

$$W = \frac{4}{25}\pi w \int_0^3 y^2(6-y) dy = \frac{27}{5}\pi w \text{ J}$$

مسائل إضافية

٨ - إذا أثرت قوة مقدارها 360 N على زنبرك طوله 4 m فأحدث به استطالة مقدارها 0.3 m ، فأوجد الشغل اللازم لاستطالة الزنبرك : (أ) من 4 m إلى 5 m (ب) من 5 m إلى 5.3 m .

ج : (أ) 600 J (ب) 414 J .

٩ - جسمان يجذبان كل منهما الآخر بقوة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما ، فإذا بقى أحدهما ثابتا في موضع على المحور x واقع على يمين نقطة الأصل ويبد عنها بمقدار وحدتين ، فأوجد الشغل اللازم لتحريك الجسم الآخر على المحور x من الموضع الذي يقع على يسار نقطة الأصل ويبد عنها ثلاث وحدات إلى نقطة الأصل .

ج : $3k/10$.

١٠ - تقدر القوة التي تجذب بها الكرة الأرضية كتلة مقدارها w kg تبعد مسافة s km عن مركزها بـ $F = 9.8 (6400)^2 w/s^2$. بفرض أن نصف قطر الأرض 6400 km. أوجد الشغل اللازم بذله ضد قوة الجاذبية لتحريك كتلة 1 kg من سطح الأرض إلى نقطة تبعد 1600 km عن السطح.

ج : $12.5 \text{ MJ} = 12544 \text{ kmN}$ (تقريباً).

١١ - أوجد الشغل اللازم بذله ضد قوة الجاذبية لتحريك صاروخ كتلته 8000 kg إلى ارتفاع 320 km فوق سطح الأرض.

ج : $23.9 \text{ GJ} = 23.9 \times 10^5 \text{ kmN}$.

١٢ - أوجد الشغل اللازم لرفع 500 kg فحم من منجم عمقه 500 m بواسطة حبل يزن 30 Nm^{-1} .

ج : 6.2 MJ .

١٣ - صهريج مقطعة 2.5 m^2 أمثار وعمقه 2 m. أوجد الشغل اللازم لتفريغه من أعلاه إذا كان (أ) مليئاً بالماء. (ب) مليئاً إلى ثلاثة أرباعه فقط بالماء.

ج : (أ) $125\,000 \text{ J}$ (ب) $117\,187.5 \text{ J}$.

١٤ - خزان على شكل نصف كرة نصف قطرها 1 m مملوء بالماء. (أ) أوجد الشغل اللازم لتفريغ الماء من أعلى الخزان. (ب) أوجد الشغل اللازم لتفريغه بواسطة أنبوب يرتفع 0.5 m فوق سقف الخزان.

ج : (أ) $2500 \pi \text{ J}$ (ب) $5833 \pi \text{ J}$.

١٥ - ما هو الشغل اللازم لملء خزان اسطوانى قائم نصف قطره 1 m وارتفاعه 3 m بسائل وزنه النوعى $w \text{ Nm}^{-3}$ وذلك بواسطة فتحة في أسفله ؟ وكم يكون هذا الشغل إذا كان الخزان أفقياً.

ج : $9/2 \pi w \text{ J}$ ، $3 \pi w \text{ J}$.

١٦ - بين أن الشغل اللازم لتفريغ خزان ما مساوياً للشغل اللازم لرفع محتواه من مركز ثقل السائل إلى الموضع الذي يفرغ منه السائل.

١٧ - يراد سحب كتلة مقدارها 100 kg مسافة 20 m على مستوى يميل 30° عن الأفقى. احسب الشغل اللازم بفرض أن قوة الاحتكاك التي تماكس الحركة هي $N\mu$ حيث $\mu = 1/\sqrt{3}$ هو معامل الاحتكاك و $N = 980 \cos 30^\circ$ هو رد فعل المستوى.

ج : 19600 J .

١٨ - حل المسألة ١٧ بفرض أن المستوى يميل 45° عن الأفقى وأن معامل الاحتكاك $\mu = 1/\sqrt{2}$.

ج : $9800(1 + \sqrt{2}) \text{ J}$.

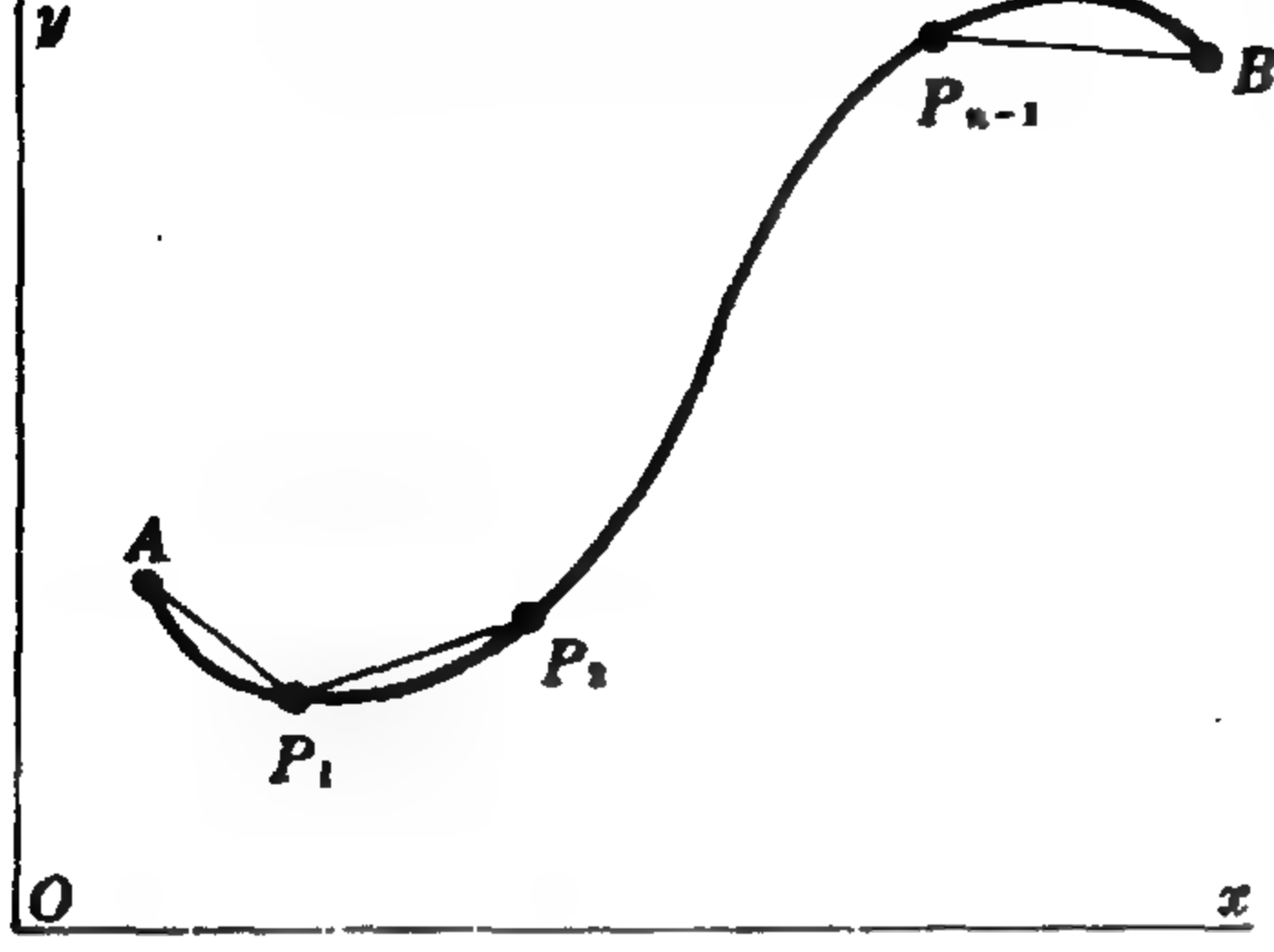
١٩ - اسطوانة مكبس تحتوى دواء. فإذا كان حجم الهواء تحت ضغط 1000 Nm^{-2} يساوى 3 m^3 . أوجد الشغل المبذول على المكبس لضغط الهواء إلى الحجم 0.06 m^3 .

(أ) بفرض أن pV ثابت (ب) بفرض أن $pV^{1.4}$ ثابت.

ج : $11\,735.7 \text{ J}$ (ب) $28\,365 \text{ J}$.

الفصل الحادى والأربعون

طول قوس



شكل ١ - ١

طول قوس AB لمنحنى هو بالتعريف نهاية مجموع أطوال مجموعة من الأوتار المتتالية $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$.
تصل بين نقط على القوس ، عندما يزداد عدد النقط إلى ما لا نهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر .

وإذا كانت $A(a, c)$ و $B(b, d)$ نقطتين على المنحنى $y = f(x)$ حيث $f(x)$ ومشتقتها الأولى $f'(x)$ متصلتان فى الفترة $a \leq x \leq b$ فإن طول القوس AB يعطى بـ

$$s = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

وبالمثل إذا كانت $A(a, c)$ و $B(b, d)$ نقطتين على المنحنى $x = g(y)$ حيث $g(y)$ ومشتقاتها الأولى بالنسبة لـ y متصلتان فى الفترة $c \leq y \leq d$ فإن طول القوس AB يعطى بـ :

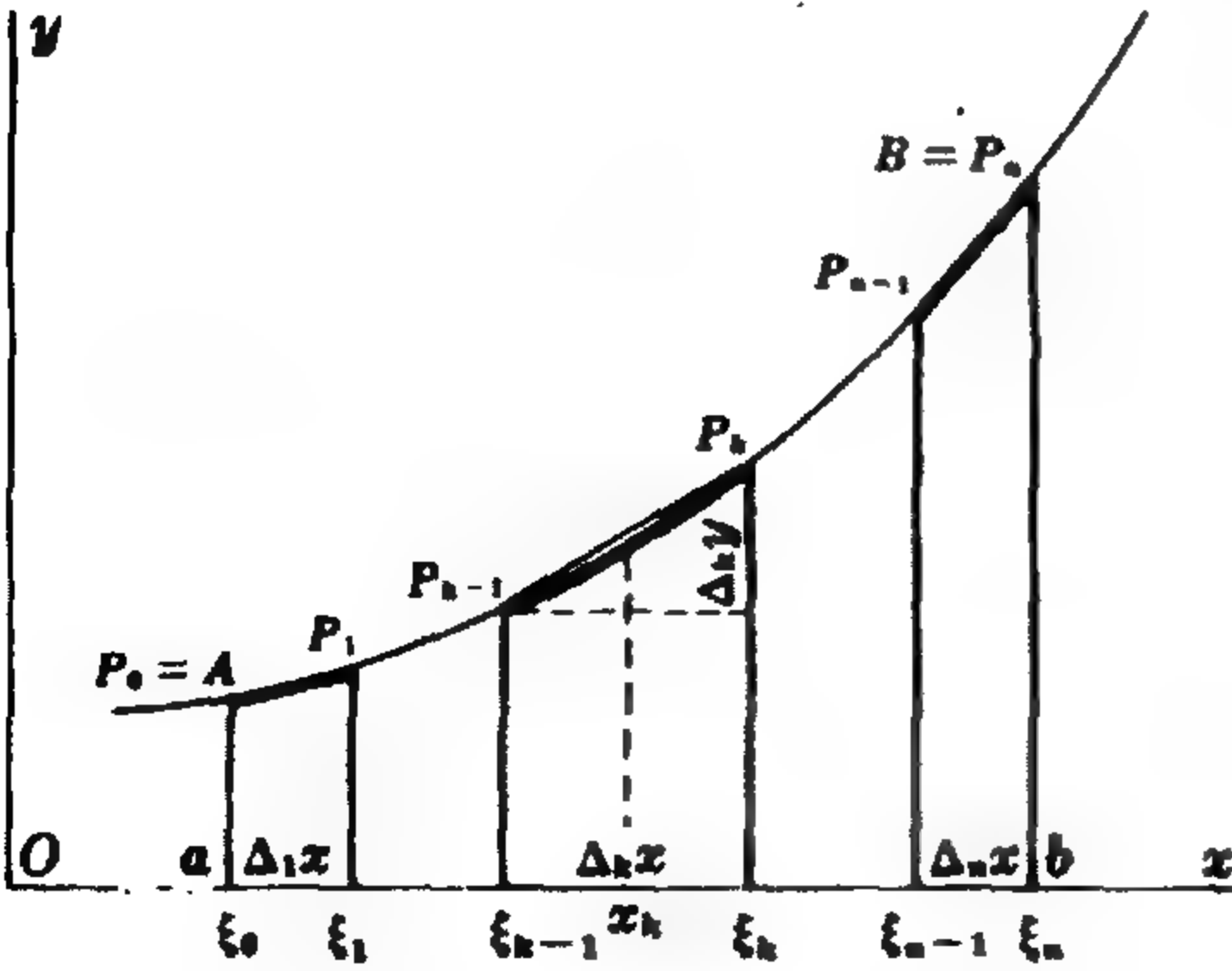
$$s = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

أما إذا كانت $A(u = u_1)$ و $B(u = u_2)$ نقطتين من منحنى معطى بالتمثيل البارامترى $x = f(u)$ و $y = g(u)$ وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن طول القوس AB يعطى بـ :

$$s = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

لبرهان أنظر المسألة ١٠ .

مسائل محلولة



شكل ١ - ٢

استنتج الصيغة التى تعطى طول القوس :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

لنفرض أن الفترة $a \leq x \leq b$ قسمت إلى n من الفترات الجزئية بالنقط $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n = b$ وأتينا أمتنا أعمدة لتعيين النقط $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = B$ على القوس كما هو مبين فى الشكل ١ - ٢ . عندئذ يكون طول الوتر المثل المبين بالشكل هو :

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2} \Delta_k x$$

واستنادا إلى قانون القيمة المتوسط (الفصل ٢١) يوجد على القوس $P_{k-1}P_k$ نقطة واحدة على الأقل ، ولتكن

$x = x_k$ بحيث يكون ميل المماس عندها $f'(x)$ مساويا لـ $\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$ وهو ميل الوتر $P_{k-1}P_k$ وبهذا يكون

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x, \quad \xi_{k-1} < x_k < \xi_k$$

وباستخدام النظرية الأساسية نجد :

$$AB = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

٢ - احسب طول قوس المنحنى $y = x^{3/2}$ من $x = 0$ إلى $x = 5$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$ ومنه يكون طول القوس :

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27} \text{ units}$$

٣ - احسب طول قوس المنحنى $x = 3y^{3/2}$ من $y = 0$ إلى $y = 4$.

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4}y} dy = \frac{8}{243} (82\sqrt{82} - 1) \text{ units} \quad \text{منه} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{1/2} \quad \text{إن}$$

٤ - احسب طول قوس المنحنى $24xy = x^4 + 48$ من $x = 2$ إلى $x = 4$.

$$s = \frac{1}{8} \int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) dx = \frac{17}{6} \text{ units} \quad \text{وبالتالى} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{64} \left(\frac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2 \quad \text{منه} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - 16}{8x^3}$$

٥ - احسب طول قوس منحنى السلسلة $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ من $x = 0$ إلى $x = a$.

$$\text{أن} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) \quad \text{منه} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \frac{1}{4}(e^{2x/a} + e^{-2x/a}) \quad \text{وبالتالى} :$$

$$s = \frac{1}{2} \int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a}) dx = \frac{1}{2}a \left[e^{x/a} - e^{-x/a} \right]_0^a = \frac{1}{2}a \left(e - \frac{1}{e} \right) \text{ units}$$

٦ - احسب طول قوس القطع المكافئ $y^2 = 12x$ المقطوع بالوتر البؤرى العمودى .

إن الطول المطلوب يساوى ضعف طول القوس من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(3, 6)$.

$$\text{ثم إن} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} \quad \text{منه} \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36 + y^2}{36} \quad \text{وبالتالى}$$

$$s = 2 \left(\frac{1}{6}\right) \int_0^6 \sqrt{36 + y^2} dy = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}y \sqrt{36 + y^2} + 18 \ln(y + \sqrt{36 + y^2}) \right]_0^6 \\ = 6\{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\} \text{ units}$$

٧ - احسب طول قوس المنحنى $x = t^2, y = t^3$ من $t = 0$ إلى $t = 4$.

$$\text{إن} \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \quad \text{منه} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2 \left(1 + \frac{9}{4}t^2\right) \quad \text{وبالتالى} :$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} \cdot 2t dt = \frac{8}{27} (37\sqrt{37} - 1) \text{ units}$$

٨ - احسب طول قوس من المنحنى الدويرى $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$.
يرسم أحد أقواس المنحنى الدويرى عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$.

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{ومن} \quad \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta, \quad \text{ثم إن}$$

$$s = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\theta d\theta = -4 \cos \frac{1}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} = 8 \text{ units}$$

مسائل اضافية

احسب في كل من المسائل من ٩ - ٢٠ طول المنحنى كاملا أو طول القوس المشار إليه :

- | | | |
|--|-----|---|
| $(104\sqrt{13} - 125)/27$ units | : ج | $y^2 = 8x^2 - 4$ من $x=1$ إلى $x=8$. |
| $17/12$ units | : ج | $6xy = x^4 + 3$ من $x=1$ إلى $x=2$. |
| $3 - \sqrt{2} + \ln \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$ units | : ج | $y = \ln x$ من $x=1$ إلى $x=2\sqrt{2}$. |
| 14 units | : ج | $27y^2 = 4(x-2)^2 - 12$ من $(2,0)$ إلى $(11,6\sqrt{3})$. |
| $\ln(e^4 + 1) - 2$ units | : ج | $y = \ln(e^x - 1)/(e^x + 1)$ من $x=2$ إلى $x=4$. |
| $\ln 21/5 - 1/2$ units | : ج | $y = \ln(1 - x^2)$ من $x=1/4$ إلى $x=3/4$. |
| $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$ units | : ج | $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ من $x=1$ إلى $x=e$. |
| $\ln(1 + \sqrt{2})/\sqrt{3}$ units | : ج | $y = \ln \cos x$ من $x=\pi/6$ إلى $x=1/4\pi$. |
| $2\pi a$ units | : ج | $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$. - ١٧ |
| $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ units | : ج | $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ من $t=0$ إلى $t=4$. - ١٨ |
| $\frac{1}{2}\pi$ units | : ج | $x = \ln \sqrt{1+t^2}, y = \arctan t$ من $t=0$ إلى $t=1$. - ١٩ |
| 16 units | : ج | $x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1, y = 2 \sin \theta + \sin 2\theta$. - ٢٠ |

٢١ - إذا كان موضع نقطة في اللحظة t يتعين بـ $x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2}$ فاحسب طول المنحنى الذى ترسمه النقطة من $t=0$ إلى $t=4$.
ج : 20 units.

٢٢ - لتكن $P(x, y)$ نقطة ثابتة و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطة متغيرة على المنحنى $y = f(x)$. أنظر الشكل ١٧ - ١ من الفصل ١٧.

برهن أن :

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\text{arc } PQ}{\text{chord } PQ} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{ds/dx}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = 1$$

٢٢- (١) برهن أن طول قوس المنحنى $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ الواقع في الربع الأول يساوى $3a/2$.

(ب) بين أننا لو حسبنا طول قوس (١) من المعادلة $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ فإننا نحصل على $a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$ الذى تصبح فيه الدالة المكاملة لا نهائية عند الحد الأدنى للتكامل. سيرر معنا تكاملات محددة من هذا النمط في الفصل ٤٦.

٢٤- يمكن صياغة المسألة التى تقودنا إلى ما يسمى منحنى المطاردة على النحو التالى :

يرى كلب A في الموضع $A(1,0)$ صاحبه في الموضع $O(0,0)$ ماشيا على طول المحور y ، فيركض (في الربع الأول) ليلحق به أوجد مسار الكلب بفرض أنه يتجه دوما نحو صاحبه وأن كلا من الكلب وصاحبه يتحرك بمعدل ثابت وهو p لصاحب الكلب و $q < p$ للكلب.

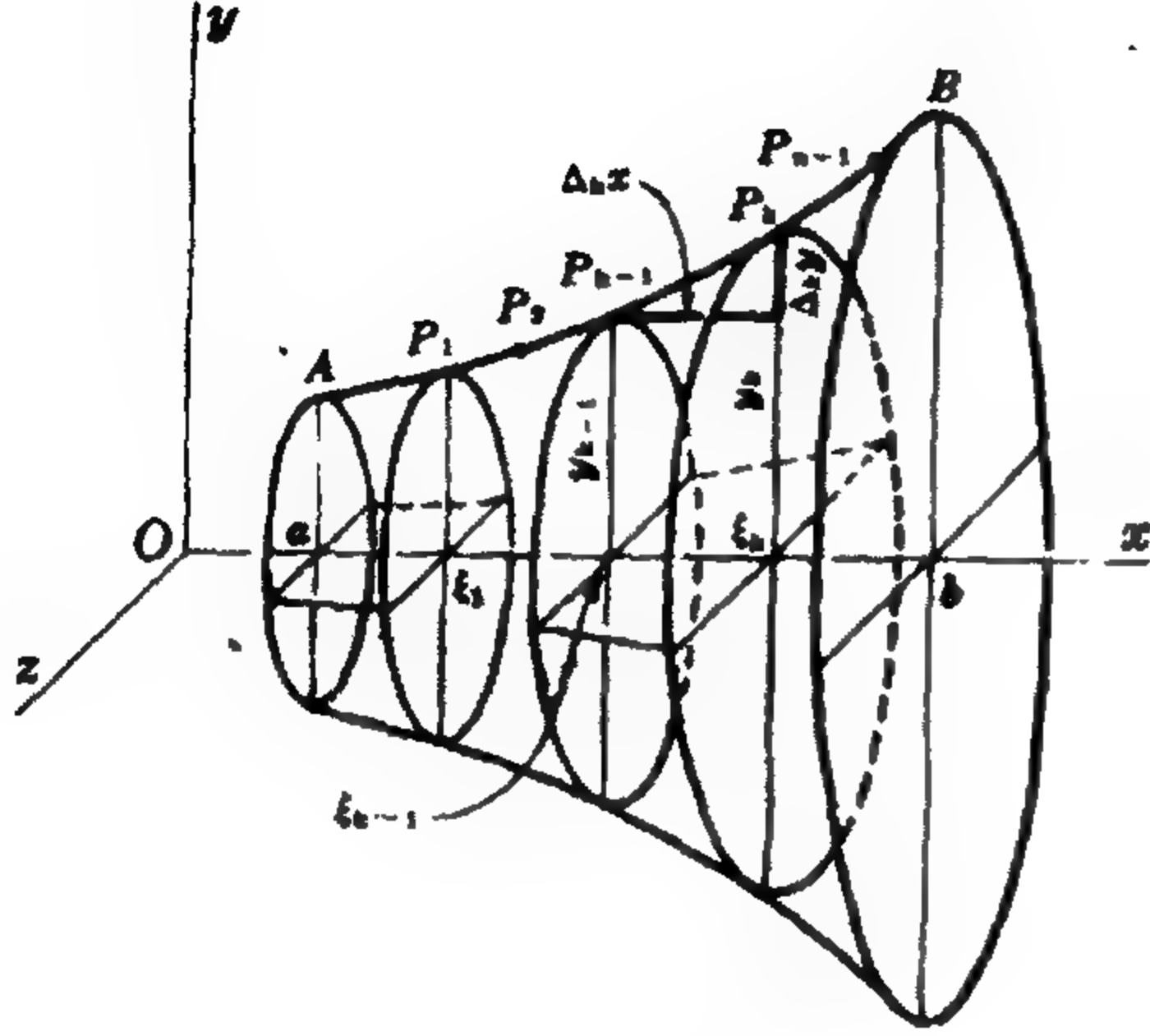
يمكن حل هذه المسألة في الفصل ٧٠. وأما الآن فالمطلوب هو التحقق من أنه يمكن الحصول على معادلة المسار $y = f(x)$ بتكامل

$$y' = \frac{1}{2}(x^{p/q} - x^{-p/q})$$

إرشاد : ليكن $P(a, b)$ حيث $0 < a < 1$ موضع الكلب ولنرمز بـ Q لنقطة تقاطع مماس المسار $y = f(x)$ عند النقطة P مع المحور y . أوجد الزمن اللازم ليصل الكلب إلى النقطة P وبين أن صاحبه يكون عندئذ في النقطة Q .

الفصل الثاني والأربعون

مساحة السطح الدوراني



شكل ٤٢ - ١

إن مساحة السطح الذي ينتج عن دوران القوس AB من منحنى متصل حول مستقيم واقع في مستواه هو بالتعريف نهاية مجموع المساحات التي تنتج عن دوران n وترات $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$ حول هذا المستقيم عندما يزداد عدد الأوتار إلى ما لا نهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر.

إذا كانت $A(a, c)$ ، $B(b, d)$ نقطتين على المنحنى $y' = f(x)$ حيث $f(x)$ ومشتقتها الأولى $f'(x)$ متصلتان وبحيث لا تغير $f(x)$ إشارتها في الفترة $a \leq x \leq b$ فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور x تعطى بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \, ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

وإذا كان بالإضافة لذلك $f'(x) \neq 0$ في الفترة المفروضة فإن مساحة السطح تعطى كذلك بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \, ds = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

وإذا كانت $A(a, c)$ ، $B(b, d)$ نقطتين على المنحنى $x = g(y)$ حيث $g(y)$ ومشتقتها الأولى بالنسبة لـ y تحقق شروطا مماثلة لتلك التي مرت في الفقرة السابقة فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور y تعطى بـ :

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x \, ds = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

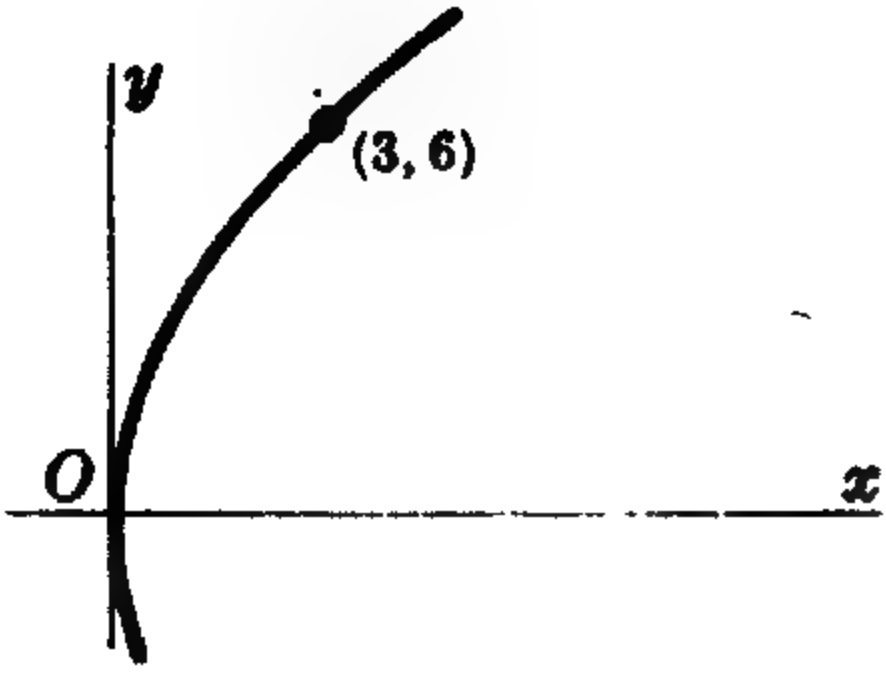
أما إذا كانت $A(u = u_1)$ ، $B(u = u_2)$ نقطتين على المنحنى المعطى بالمعادلتين البارامتريتين $x = f(u)$ ، $y = g(u)$ وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور x تعطى بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \, ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

وإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور y تعطى بـ :

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x \, ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

مسائل مطوّلة



شكل ٢ - ٢

١ - أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس القطع المكافئ $y^2 = 12x$ من $x=0$ إلى $x=3$ حول المحور x .

$$(1) \text{ لنطبق الصيغة } S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

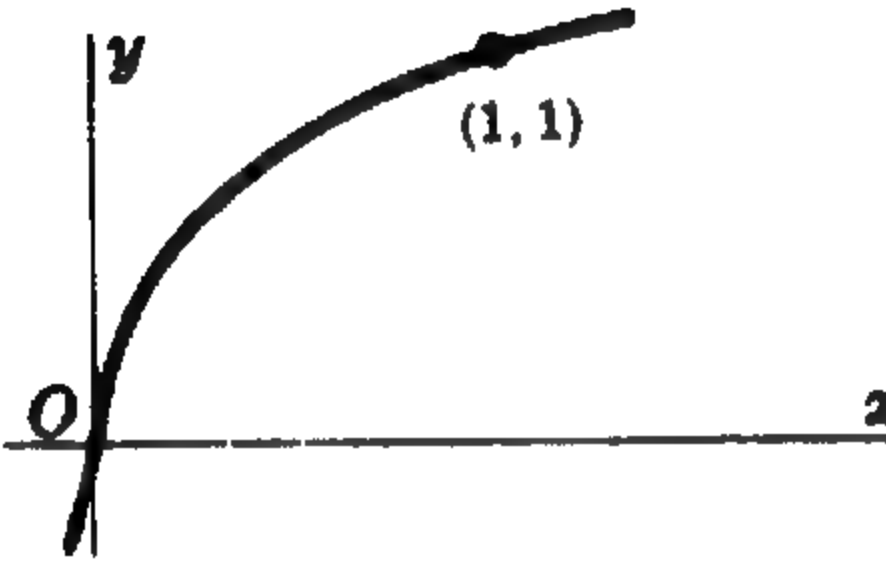
$$\text{إن } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 + 36}{y^2} \text{ ومنه}$$

$$S_x = 2\pi \int_0^3 y \frac{\sqrt{y^2 + 36}}{y} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x + 36} dx = 24(2\sqrt{2} - 1)\pi$$

(ب) لنطبق الصيغة $S_x = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$. أن $S_x = 2\pi \int_0^6 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ ، ومنه $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6}$ ، $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36 + y^2}{36}$ ،

$$S_x = 2\pi \int_0^6 y \frac{\sqrt{36 + y^2}}{6} dy = \frac{\pi}{9} (36 + y^2)^{3/2} \Big|_0^6 = 24(2\sqrt{2} - 1)\pi$$

٢ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القوس $x = y^2$ من $y=0$ إلى $y=1$ حول المحور y .



شكل ٢ - ٣

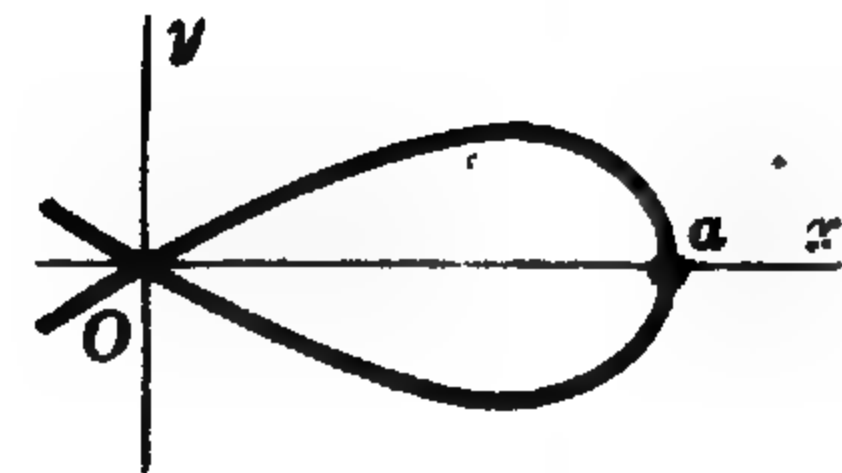
$$S_y = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_0^1 y^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{27} (1 + 9y^4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

٣ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القوس $y^2 + 4x = 2 \ln y$ من $y=1$ إلى $y=3$ حول المحور x .

$$S_x = 2\pi \int_1^3 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_1^3 y \frac{1 + y^2}{2y} dy = \pi \int_1^3 (1 + y^2) dy = \frac{32}{3}\pi$$

٤ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة المنحنى $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ حول المحور x .



شكل ٢ - ٤

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)} = \frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)} \text{ ومنه } \frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{8a^2y}$$

$$S_x = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{3a^2 - 2x^2}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2} \int_0^a (3a^2 - 2x^2)x dx = \frac{1}{4}\pi a^3 \text{ square units}$$

٥ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القطع الناقص $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ حول المحور x .

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-4}^4 y \frac{\sqrt{16y^2 + x^2}}{4y} dx = \frac{1}{2}\pi \int_{-4}^4 \sqrt{64 - 3x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left[\frac{x\sqrt{3}}{2} \sqrt{64 - 3x^2} + 32 \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{8} \right]_{-4}^4 = 8\pi \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \right) \text{ square units.}$$

٦ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى اللولبي التحي حول المحور x .

إن المساحة المطلوبة تنتج بدوران القوس عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$.

وإن $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ ومنه $\frac{dx}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta$,

$$S_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} (a \sin^2 \theta) 3a \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{12a^2\pi}{5} \text{ sq. un.}$$

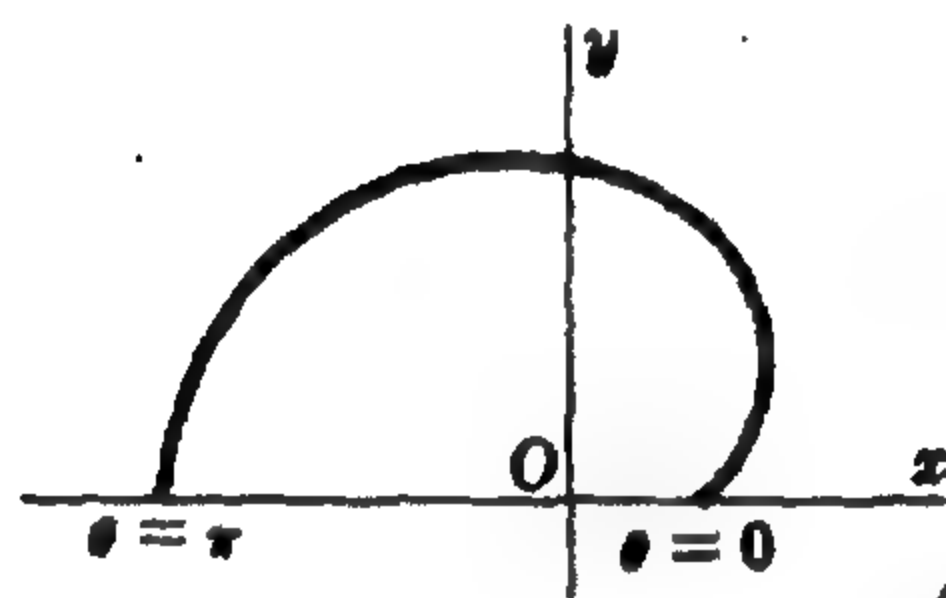
ملاحظة : يبدو من الطبيعي أن نكتب $2\pi \int_0^{\pi} (a \sin^2 \theta) 3a \cos \theta \sin \theta d\theta$ ولكن القيمة تكون عندئذ مساوية للصفر.

لذا ينبغي أن لا يغيب عن بالنا أنه في الوقت الذي تعطى فيه المساحات والحجوم ... إلخ ... بتكاملات محددة فإنه لا يمكن تفسير كل تكامل محدد على أنه مساحة ... إلخ.

٧ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران منحنى القلب

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta, \quad y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta.$$

حول المحور x .



شكل ٤٢ - ٥

إن السطح المطلوب ينتج بدوران القوس عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$.

وإن $dx/d\theta = -2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta$, $dy/d\theta = 2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta$

ومن

$$(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = 8(1 - \sin \theta \sin 2\theta - \cos \theta \cos 2\theta) = 8(1 - \cos \theta).$$

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi} (2 \sin \theta - \sin 2\theta) \cdot 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos \theta)^{3/2} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi (1 - \cos \theta)^{5/2} \Big|_0^{\pi} = \frac{128\pi}{5} \text{ square units}$$

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad \text{٨ - استنتج الصيغة}$$

لنقرب القوس AB بـ n وتراتما هو مبين في الشكل ٤٢ - ١ فعندما يدور الوتر المثل بـ $P_{k-1}P_k$ حول المحور x

ينتج جذع مخروط نصف قطري قاعدتيه y_k, y_{k-1} وارتفاعه المائل :

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2} \Delta_k x = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x$$

(أنظر المسألة ١ من الفصل ٤١) ومساحته الجانبية (محيط مقطعه الأوسط \times ارتفاعه المائل) هي .

$$S_k = 2\pi \left(\frac{y_{k-1} + y_k}{2} \right) \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x$$

وبما أن $f(x)$ دالة متصلة فإنه يوجد على القوس P_k نقطة واحدة x'_k على الأقل بحيث يكون :

$$f(x'_k) = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k) = \frac{1}{2}\{f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)\}$$

$$S_k = 2\pi f(x'_k) \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x$$
 ومنه

واستنادا إلى نظرية بايس نجد أخيرا :

$$\begin{aligned} S_s &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n S_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n 2\pi f(x'_k) \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \end{aligned}$$

مسائل اضافية

احسب في كل من المسائل من ٩ إلى ١٨ مساحة السطح الناتج عن دوران القوس المفروض حول المحور المعطى :

- ٩ . $y = mx - 4$ من $x=0$ إلى $x=2$ حول المحور x . ج : $4m\pi\sqrt{1+m^2}$ square units .
 ١٠ . $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ من $x=0$ إلى $x=3$ حول المحور x . ج : $\pi(82\sqrt{82} - 1)/9$ square units .
 ١١ . $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ من $x=0$ إلى $x=3$ حول المحور y . ج : $\frac{1}{2}\pi[9\sqrt{82} + \ln(9 + \sqrt{82})]$ square units .
 ١٢ . $8y^2 = x^2(1-x^2)$ ، المقدة ، حول المحور x . ج : $\frac{1}{2}\pi$ square units .
 ١٣ . $y = x^2/6 + 1/2x - 1$ من $x=1$ إلى $x=2$ حول المحور y . ج : $(15/4 + \ln 2)\pi$ square units .
 ١٤ . $y = \ln x - 1$ من $x=1$ إلى $x=7$ حول المحور y . ج : $[34\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})]\pi$.
 ١٥ . $9y^2 = x(3-x)^2$ ، المقدة ، حول المحور y . ج : $28\pi\sqrt{3}/5$ square units .
 ١٦ . $y = a \cosh x/a - 1$ من $x=-a$ إلى $x=a$ حول المحور x . ج : $\frac{1}{2}\pi a^2(e^2 - e^{-2} + 4)$ square units .
 ١٧ . قوس من $x = a(\theta - \sin \theta)$ ، $y = a(1 - \cos \theta)$ حول المحور x . ج : $64\pi a^2/3$ square units .
 ١٨ . $x = e^t \cos t$ ، $y = e^t \sin t$ من $t=0$ إلى $t=1/2\pi$ حول المحور x . ج : $2\pi\sqrt{2}(2e^\pi + 1)/5$.

١٩ - احسب مساحة منطقة كروية قطعت من كرة نصف قطرها r بمستويين متوازيين يبعد كل منهما عن المركز بـ a .

ج : $2\pi ar$.

٢٠ - احسب المساحة المقطوعة من كرة نصف قطرها r بمخروط نصف زاوية رأسه α ورأسه في مركز الكرة .

ج : $2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$.

الفصل الثالث والأربعون

المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتي لأقواس المتحنينات والسطوح الدورانية

المركز المتوسط لقوس • أن الإحداثيين (\bar{x}, \bar{y}) للمركز المتوسط لقوس AB من منحنى مستو معادلته $F(x, y) = 0$ أو $x = f(u), y = g(u)$ يحققان العلاقتين :

$$\bar{y} \cdot s = \bar{y} \int_{AB} ds = \int_{AB} y ds \quad , \quad \bar{x} \cdot s = \bar{x} \int_{AB} ds = \int_{AB} x ds$$

أنظر المسألتين ١ - ٢

نظرية بابوس الثانية : إذا دار منحنى حول محور في مستواه وغير قاطع له ، فإن مساحة السطح الناتج عن هذا الدوران تساوى حاصل ضرب طول المنحنى في طول المسار الذي يرسمه المركز المتوسط للمنحنى .

أنظر المسألة ٣

عزوم القصور الذاتي لقوس : يعطى عزوم القصور الذاتي لقوس AB من منحنى مستو (مثلا : قطعة من سلك رفيع متجانس) بالنسبة للمحورين الإحداثيين بالصيغتين :

$$I_y = \int_{AB} x^2 ds \quad , \quad I_x = \int_{AB} y^2 ds$$

أنظر المسألتين ٤ - ٥

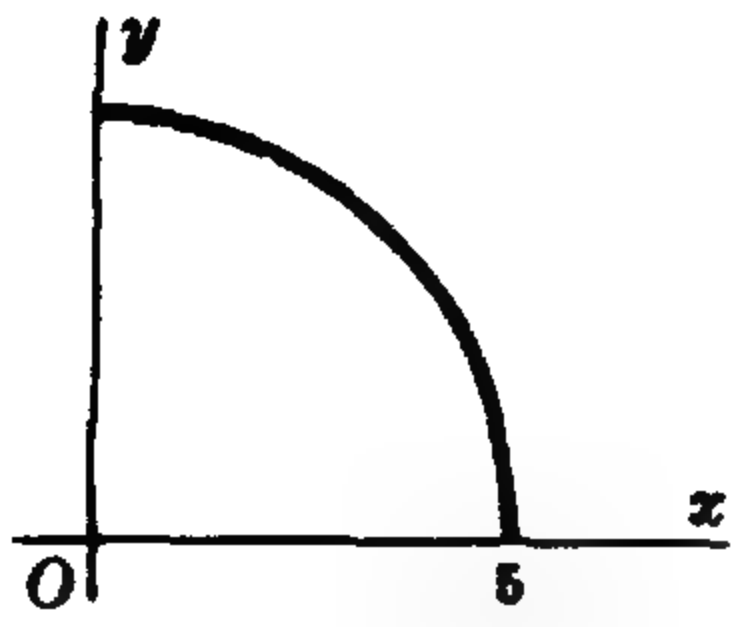
المركز المتوسط لسطح دوراني : يعطى الإحداثي \bar{x} للمركز المتوسط لسطح ناتج عن دوران قوس AB من منحنى حول المحور x بالعلاقة :

$$\bar{x} \cdot S_x = 2\pi \int_{AB} x \cdot y ds$$

عزم القصور الذاتي لسطح دوراني : إن عزوم القصور الذاتي لسطح ناتج عن دوران قوس AB من منحنى مستو حول المحور x بالنسبة لمحور الدوران هو :

$$I_x = 2\pi \int_{AB} y^2 \cdot y ds$$

مسائل محلولة



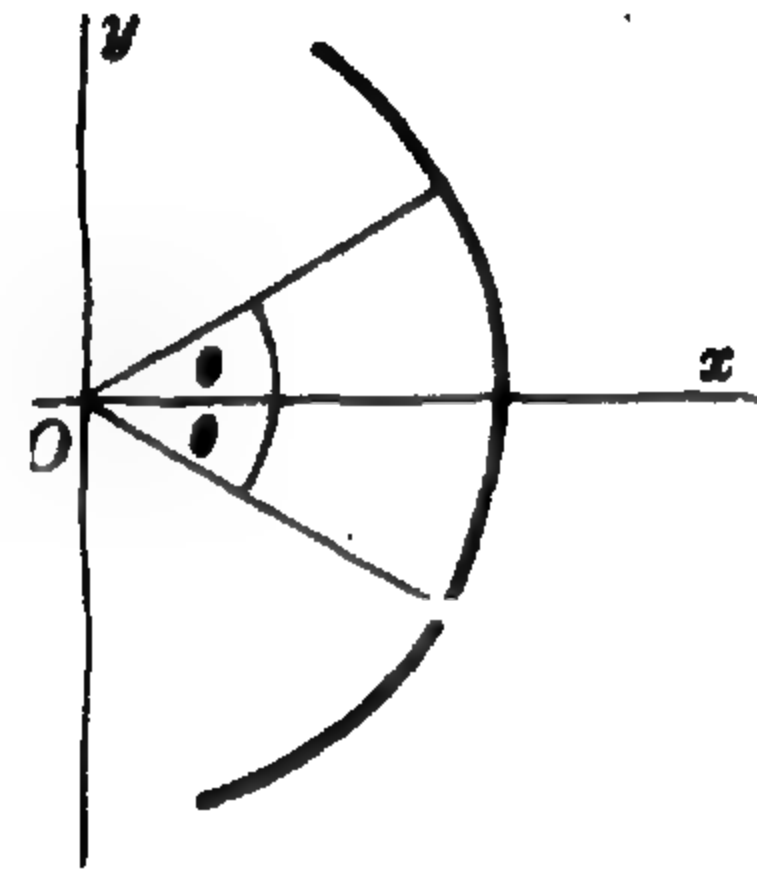
شكل ١ - ٤٣

١ - عين المركز المتوسط لقوس الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ الذي يقع في الربع الأول.

إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ and $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{y^2}$. وبما أن $s = \frac{5}{2}\pi$,

فإن $\bar{y} = 10/\pi$ ، $\frac{5}{2}\pi\bar{y} = \int_0^s y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^s 5 dx = 25$

و استنادا إلى التناظر يكون $\bar{x} = \bar{y}$ وبالتالي فإن المركز المتوسط هو النقطة $(10/\pi, 10/\pi)$



شكل ٢ - ٤٣

٢ - عين المركز المتوسط لقوس دائرة نصف قطرها r إذا كانت الزاوية المركزية

للقوس 2θ .

لنأخذ القوس كما في الشكل ٢ - ٤٣ وعندئذ يكون \bar{x} للقوس كله منطبقا على المحور السيني للمركز المتوسط للنصف العلوي من القوس ويكون $\bar{y} = 0$

أن $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ ومنه $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2}$ ويكون بالنسبة للنصف العلوي من القوس $s = r\theta$.

إذن $r\theta \cdot \bar{x} = \int_0^{r \sin \theta} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = r \int_0^{r \sin \theta} dy = r^2 \sin \theta$

و المركز المتوسط يقع على نصف القطر الممتد وعلى بعد $(r \sin \theta)/\theta$ من مركز الدائرة.

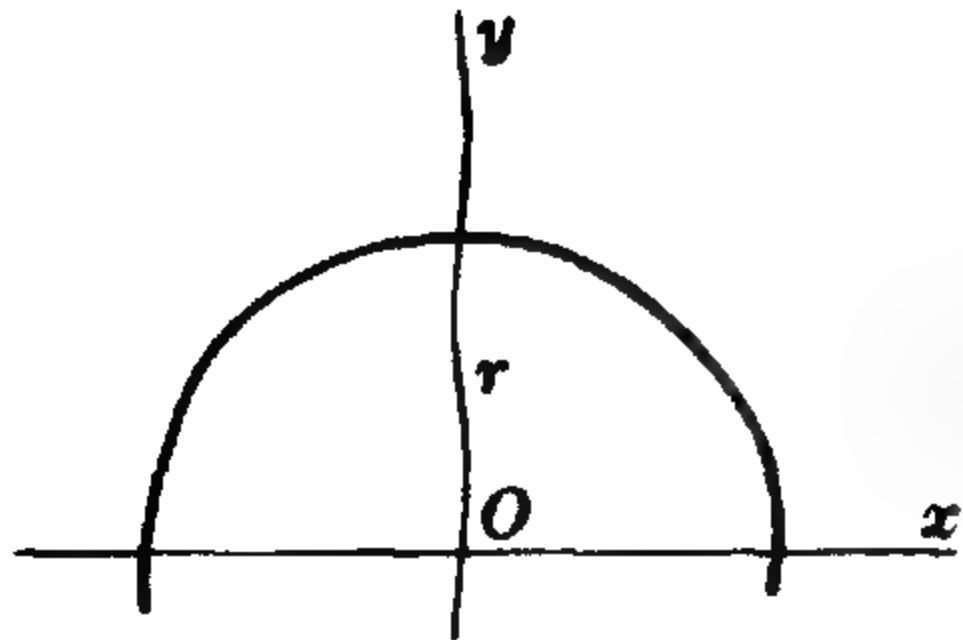
٣ - أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران مستطيل - بعده a, b حول محور يبعد c units

عن المركز بفرض أن c أكبر من كل من a, b .

إن محيط المستطيل $2(a + b)$ وبما أن مركزه المتوسط يرسم دائرة نصف قطرها c فإن :

$$S = 2(a + b) \cdot 2\pi c = 4\pi(a + b)c \text{ square units}$$

٤ - احسب عزوم القصور الذاتي لقوس دائرة بالنسبة لقطر ثابت منها.



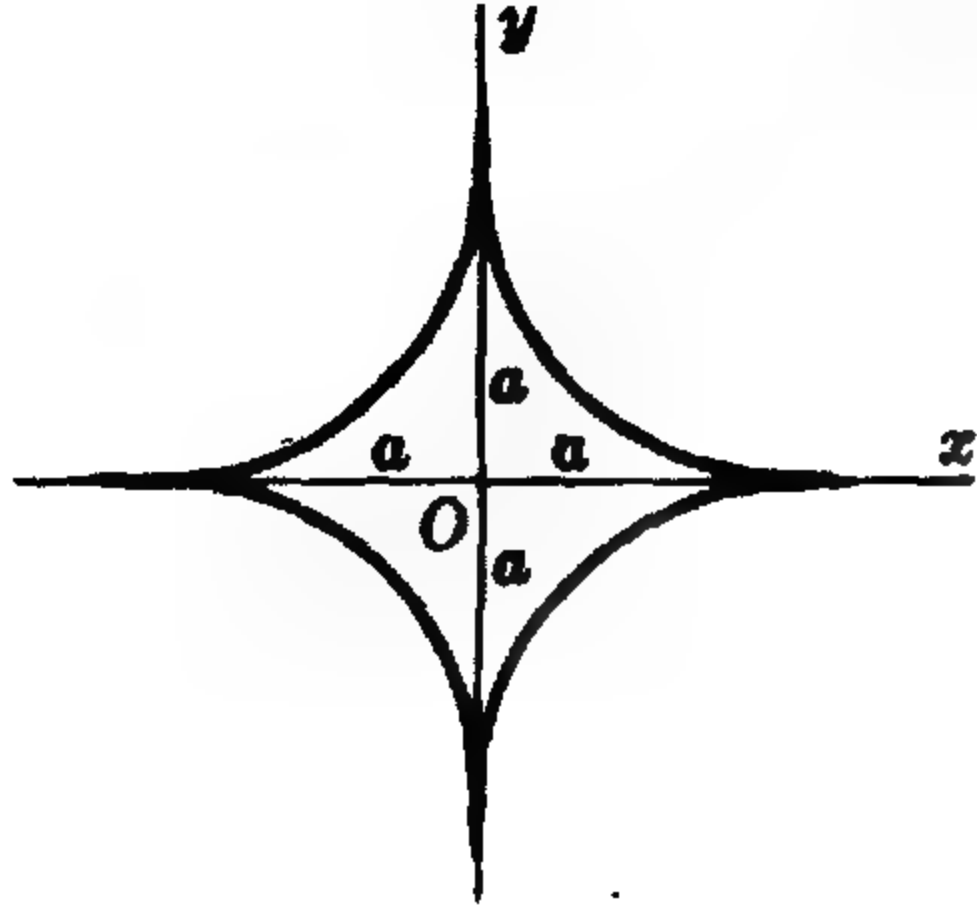
شكل ٤ - ٤٣

لنأخذ الدائرة كما في الشكل ٤ - ٤٣ ولنأخذ القطر الثابت منطبقا على المحور x .

إن العزم المطلوب يساوي أربع مرات عزوم القوس الموجود في الربع الأول ثم إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

كذلك $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{y}$ و $s = 2\pi r$ وعلى هذا يكون

$$\begin{aligned} I_x &= 4 \int_0^r y^2 ds = 4 \int_0^r y^2 \cdot \frac{r}{y} dx = 4r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 4r \left[\frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \pi r^3 = \frac{1}{2} \pi r^3 \end{aligned}$$



شكل (٣) - ٥

٥ - احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x لقوس المنحنى التويضي التحق

$$(x = a \sin^3 \theta, y = a \cos^3 \theta) \text{ (الهيوسيكلوئيد)}$$

إن العزم المطلوب يساوي أربع مرات عزم قوس المنحنى الموجود في الربع الأول :

$$\text{ثم إن } \frac{dx}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta, \frac{dy}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta, \text{ ومنه :}$$

$$s = 4 \int ds = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin \theta \cos \theta d\theta = 6a$$

$$I_x = 4 \int y^2 ds = 12a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{2}a^3 = \frac{1}{4}a^3 s$$

مسائل إضافية

٦ - عين المركز المتوسط لـ :

(أ) قوس المنحنى $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ الواقع في الربع الأول . استخدام $s = 3a/2$. ج : $(2a/5, 2a/5)$

(ب) قوس العقدة $9y^2 = x(3-x)^2$ الواقع في الربع الأول . استخدام $s = 2\sqrt{3}$. ج : $(7/5, \sqrt{3}/4)$

(ج) القوس الأول من $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$. ج : $(\pi a, 4a/3)$

(د) قوس المنحنى $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ الذي يقع في الربع الأول . ج : أنظر (١)

٧ - احسب عزم القصور الذاتي للقوس المفروض بالنسبة للمستقيم المذكور أمامه .

(أ) عقدة المنحنى $9y^2 = x(3-x)^2$. المحور x : المحور y . استخدم $s = 4\sqrt{3}$. ج : $I_x = 8s/35, I_y = 99s/35$

(ب) $y = a \cosh x/a$ من $x=0$ إلى $x=a$ ، المحور x . ج : $(a^2 + \frac{1}{3}s^2)s$

٨ - عين المركز المتوسط لسطح نصف كرة . ج : $\bar{y} = \frac{1}{2}r$

٩ - عين المركز المتوسط لسطح ناتج عن دوران :

(أ) $4y + 3x = 8$ من $x=0$ إلى $x=2$ حول المحور x . ج : $\bar{x} = 4/5$

(ب) قوس من $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 4a/3$

١٠ - استخدم نظرية نظرية بابوس الثانية لتحصل على :

(أ) المركز المتوسط لقوس دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r وواقع في الربع الأول . ج : $(2r/\pi, 2r/\pi)$

(ب) مساحة السطح الناتج عن دوران مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a حول محور يبعد c units عن المركز المتوسط للمثلث .

ج : $6\pi ac$ square units

١١ - احسب عزوم القصور الذاتي حول محور الدوران لـ :

(أ) سطح كرة نصف قطرها r . ج : $\frac{8}{3}\pi r^2$

(ب) السطح الجانبي لمخروط ينتج عن دوران المستقيم $y = 2x$ من $x = 0$ إلى $x = 2$ حول المحور x .

ج : 8π

١٢ - استنتج كل صيغة من صيغ هذا الفصل .

الفصل الرابع والأربعون

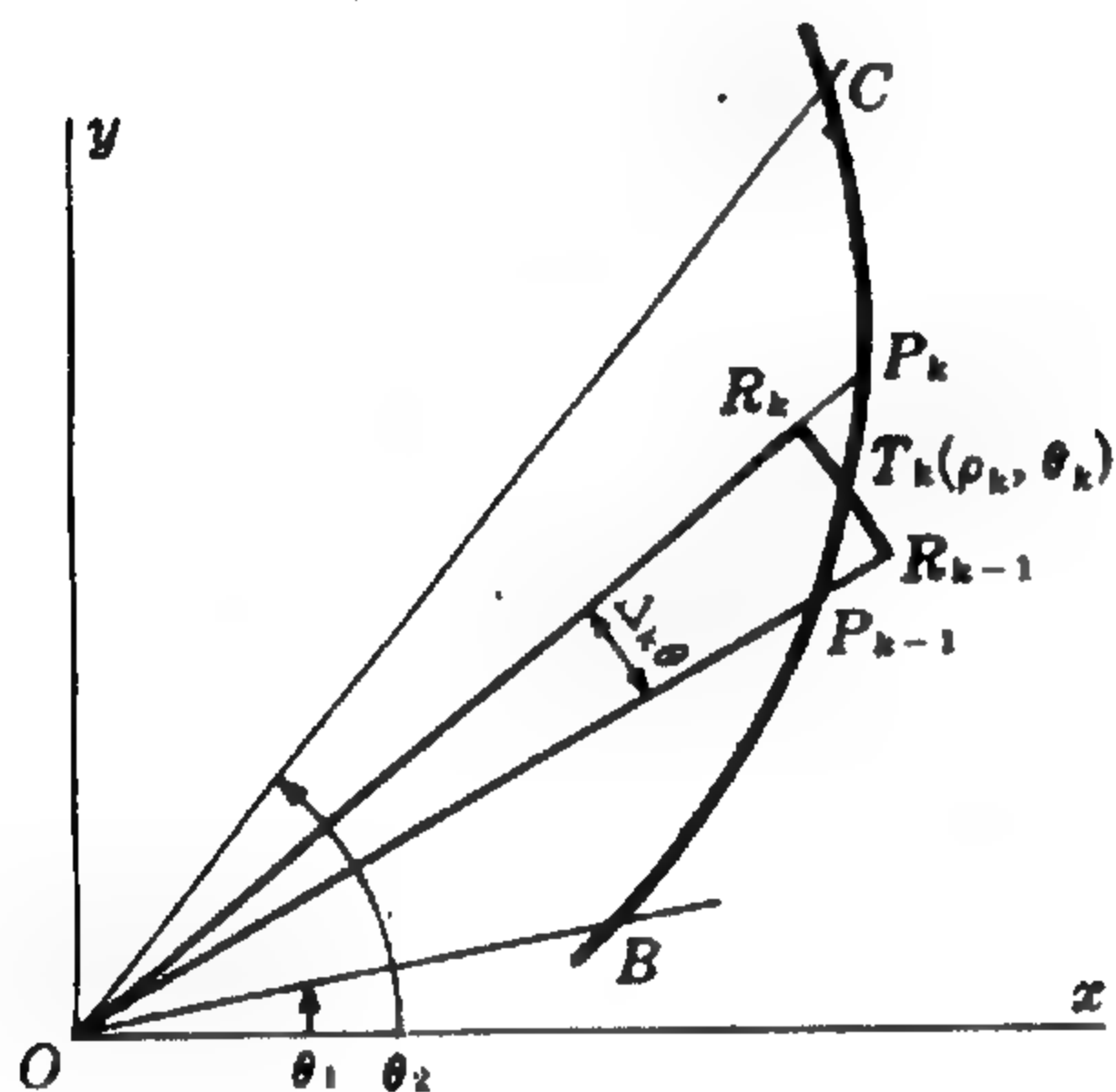
مساحات المسطوح المستوية ومراكزها المتوسطة في الإحداثيات القطبية

نعطى مساحة سطح مستو محصورة بين المنحنى $\rho = f(\theta)$ ونصف القطرين المتجهين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ بـ :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

ينبغي ، عند استخدام الإحداثيات القطبية ، الانتباه الشديد لتحديد حدود التكامل الملائمة ، ويتطلب هذا الاستفادة من أى تناظر لتضييق مجال التكامل بقدر الإمكان .

أنظر المسائل ١ - ٧



شكل ١ - ١

المركز المتوسط لسطح مستو • يعطى الإحداثيان (x, y)

للمركز المتوسط لسطح مستو محصور بين المنحنى $\rho = f(\theta)$ ونصف القطرين المتجهين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ بـ :

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \bar{x} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3} x \cdot \rho^2 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= \bar{y} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3} y \cdot \rho^2 d\theta \end{aligned}$$

أنظر المسائل ٩ - ١٠

مسائل محلولة

$$١ - \text{استنتج أن } A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta.$$

لنقسم الزاوية BOC الموضحة بالشكل إلى n قسماً بالأشعة $OP_0 = OB, OP_1, \dots, OP_n = OC$. يوضح الشكل شريحة ممثلة $OP_{k-1}P_k$ تقابل الزاوية المركزية $\Delta_k \theta$ وتقرب هذه الشريحة بالقطاع الدائري $OR_{k-1}P_k$ الذى نصف قطره P_k . وزاويته المركزية $\Delta_k \theta$ وتقدر مساحته . (أنظر المسألة ١٥ (ب) الفصل ٣٤) بـ : $\frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta_k \theta = \frac{1}{2} \{f(\theta_k)\}^2 \Delta_k \theta$. وبالتالي يكون استنادا إلى النظرية الأساسية .

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \{f(\theta_k)\}^2 \Delta_k \theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{f(\theta)\}^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

٢ - احسب مساحة السطح المستوي المحدد بالمنحنى $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

يتضح من الشكل ٤٤ - ٢ أن السطح المطلوب حساب مساحته يتكون من أربع قطع يمسح أحدها بنصف القطر المتجه عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 1/4\pi$ لذلك .

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \text{ square units}$$

وبما أن كل ربع من المستوى يحوى جزءا من السطح المطلوب مساحته فإنه يبدو من المعقول أن نكتب :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \cos 2\theta d\theta = 0$$

شكل ٤٤ - ٢

يمكن إيجاد سبب هذه النتيجة الخاطئة بإيمان النظر في :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} a^2$$

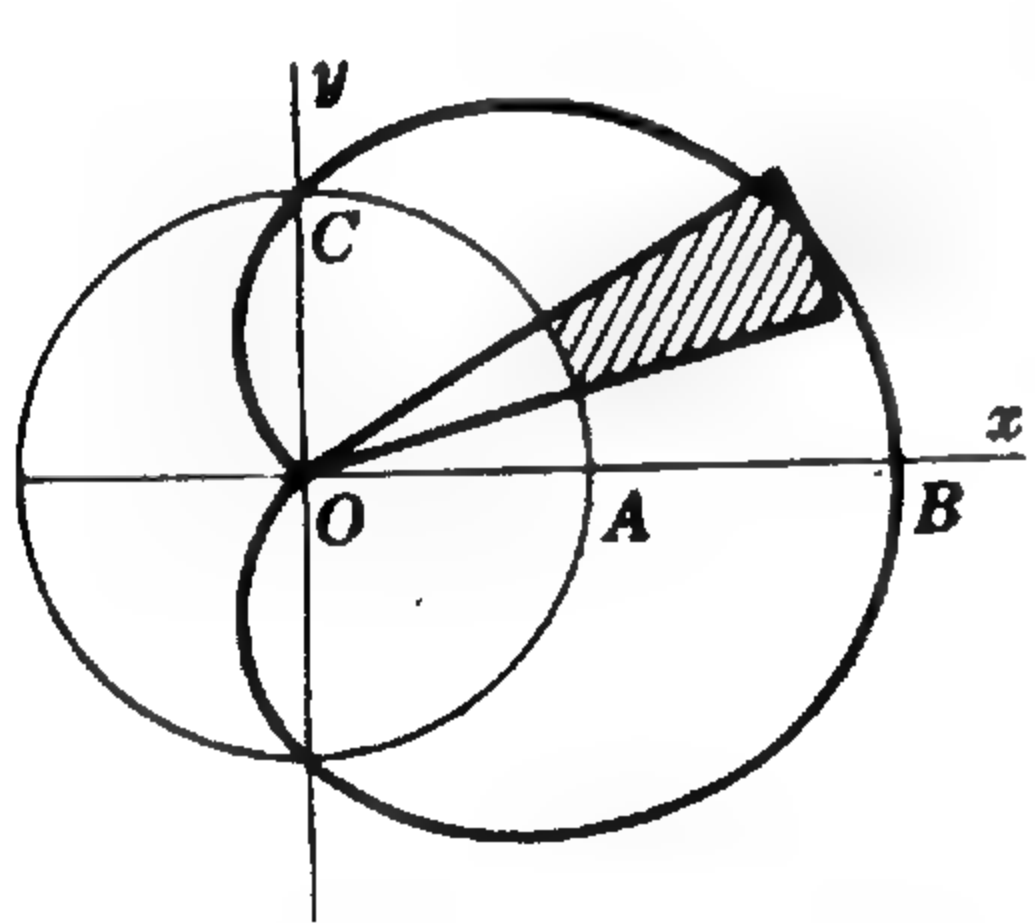
في الفترتين $(0, \pi/4)$ و $(3\pi/4, \pi)$ يكون $\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$ حقيقيا ، وبالتالي فإن التكاملين الأول والثالث يعطيان المساحتين الموافقتين للسطحين اللذين يمسحهما نصف القطر المتجه عندما تسمح θ هاتين الفترتين .

أما في الفترة $(\pi/4, 3\pi/4)$ فإن $\rho^2 < 0$ وبالتالي فإن ρ تخيل . وهكذا على الرغم من كون $\frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta$ تكاملا صحيحا تماما ، فإنه لا يمكن تفسيره هنا على أنه مساحة قطعة سطح .

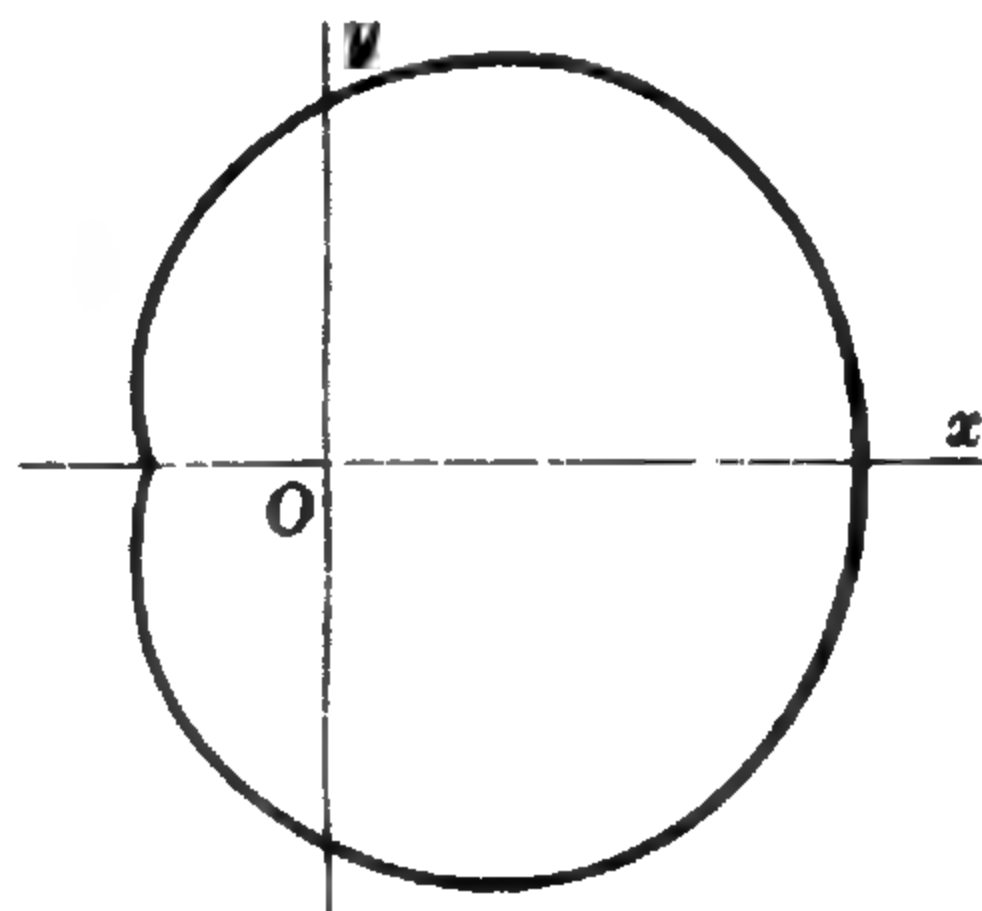
٣ - احسب مساحة السطح المحدد بالوردة ثلاثية الوريقة $\rho = a \cos 3\theta$.

إن المساحة المطلوبة تساوى ست مرات مساحة قطعة السطح المظلة في الشكل ٤٤ - ٣ والتي نحصل عليها عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/6$ ولذلك .

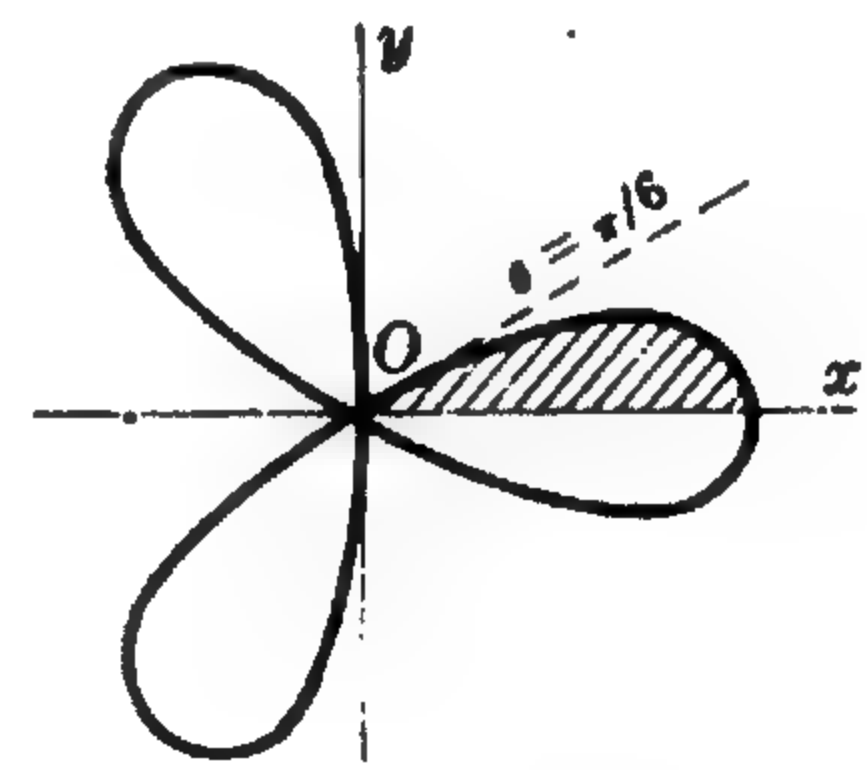
$$A = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\theta d\theta = 3a^2 \int_0^{\pi/6} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\theta) d\theta = \frac{1}{4} \pi a^2 \text{ sq. un.}$$



شكل ٤٤ - ٥



شكل ٤٤ - ٤



شكل ٤٤ - ٣

٤ - احسب مساحة السطح المحدد بالمنحنى $\rho = 2 + \cos \theta$ والمبين بالشكل ٤٤ - ٤ .

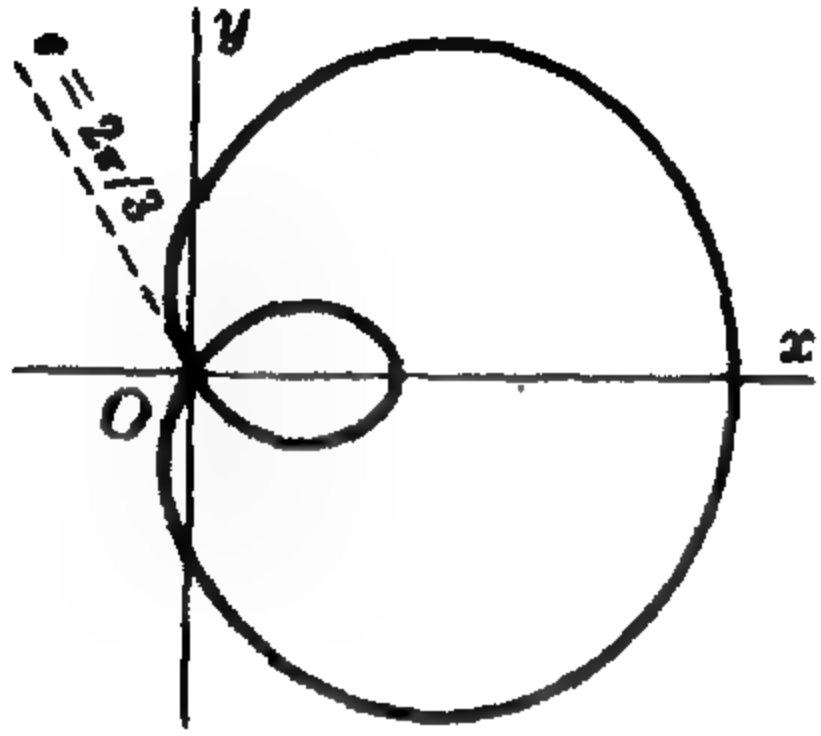
إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح الذى نحصل عليه عندما تتغير θ من 0 إلى π .

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (2 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \left[4\theta + 4 \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = 9\pi/2 \text{ square units}$$

٥ - احسب مساحة السطح الواقعة داخل منحنى القلب $\rho = 1 + \cos \theta$ وخارج الدائرة $\rho = 1$.
بالنظر إلى الشكل ٤٤ - ٥ نجد أن مساحة $ABC =$ مساحة $OBC -$ مساحة $OAC =$ نصف المساحة المطلوبة لذلك فإن :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2 + \frac{1}{4} \pi \text{ sq. un.}$$



شكل ٤٤ - ٦

٦ - أوجد مساحة كل من عقدى المنحنى $\rho = \frac{1}{2} + \cos \theta$.

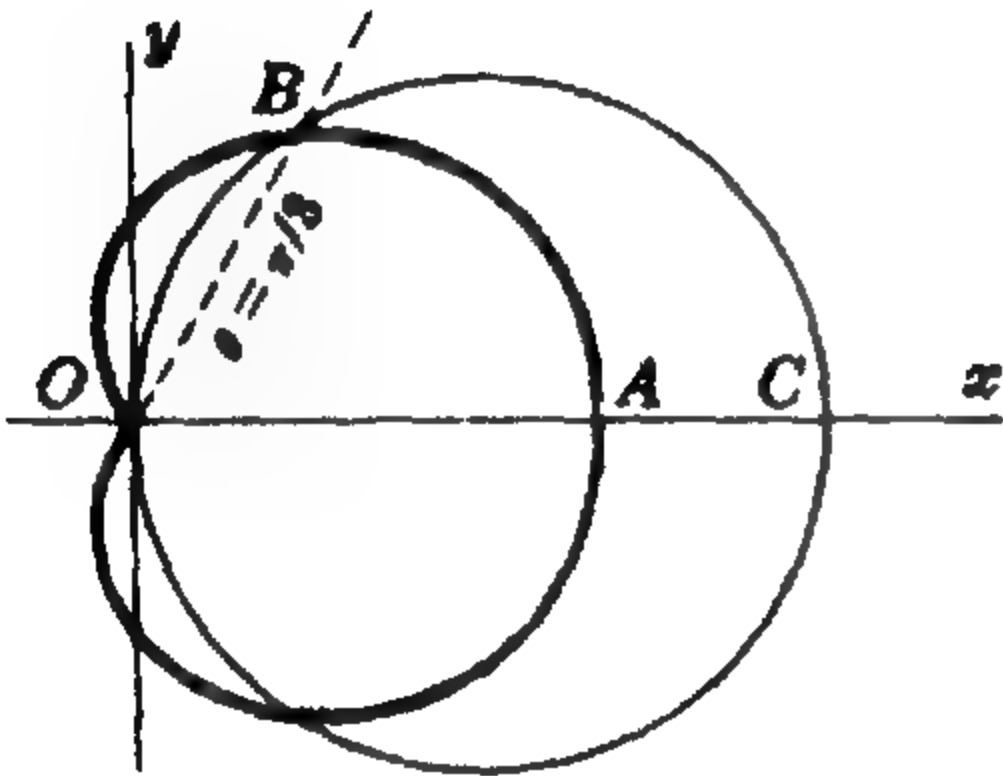
العقدة الكبرى . إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح التى نحصل عليها عندما تتغير θ من 0 إلى $2\pi/3$:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/3} (\frac{1}{2} + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi/3} (\frac{1}{4} + \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ square units}$$

العقدة الصغرى . إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح التى نحصل عليها عندما تتغير θ من $2\pi/3$ إلى π إذن :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{\pi} (\frac{1}{2} + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ square units}$$



شكل ٤٤ - ٧

٧ - احسب مساحة السطح المشتركة بين الدائرة $\rho = 3 \cos \theta$ ومنحنى القلب $\rho = 1 + \cos \theta$.

إن مساحة السطح OAB تتكون من جزئين ، يسمح أحدهما نصف القطر المتجه للمنحنى $\rho = 1 + \cos \theta$ عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/3$. ويسمح ثانيهما نصف القطر المتجه للمنحنى $\rho = 3 \cos \theta$ عندما تتغير θ من $\pi/3$ إلى $\pi/2$.

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos \theta)^2 d\theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 5\pi/4 \text{ square units}$$

٨ - استنتج الصيغتين $A\bar{x} = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos \theta d\theta$, $A\bar{y} = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \sin \theta d\theta$ حيث (\bar{x}, \bar{y}) موضع المركز

المتوسط للسطح المستوى BOC فى الشكل ٤٤ - ١ .

باعتبار القطاع الدائرى المثلث المقرب OR_k R_{k-1} وبفرض السهولة إن OT_k ينصف الزاوية OP_k P_{k-1} وكى نحصل على موضع تقريبي للمركز المتوسط $C_k(x, y_k)$ للقطاع نعتبره مثلثا حقيقيا . عندئذ يكون المركز المتوسط على الخط OT_k ويبعد مسافة $\rho_k/3$ من النقطة O ، أى يكون على وجه التقريب .

$$\bar{y}_k = \frac{2}{3} f(\theta_k) \sin \theta_k \quad \text{و} \quad \bar{x}_k = \frac{2}{3} \rho_k \cos \theta_k = \frac{2}{3} f(\theta_k) \cos \theta_k$$

ومن جهة أخرى أن العزم الأول للقطاع حول المحور y هو :

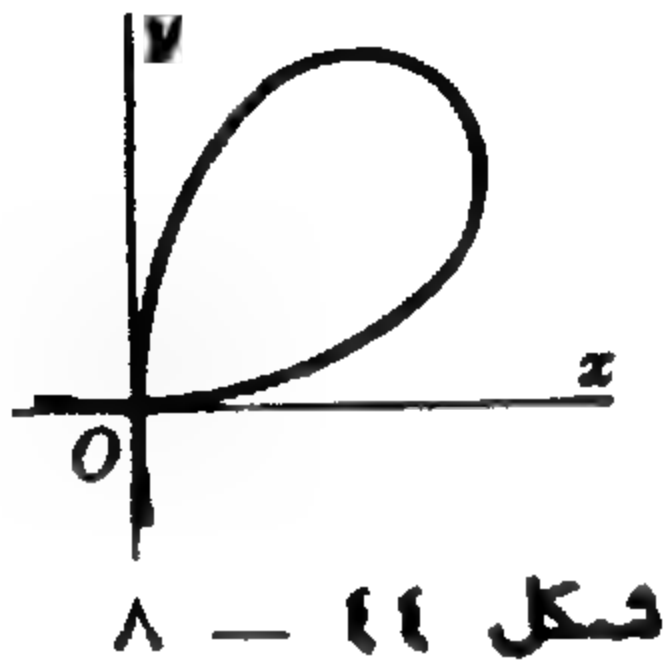
$$\bar{x}_k \cdot \frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta \theta = \frac{2}{3} \rho_k \cos \theta_k \cdot \frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta \theta = \frac{1}{3} \{f(\theta_k)\}^3 \cos \theta_k \Delta \theta$$

واستنادا إلى النظرية الأساسية :

$$A\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \{f(\theta_k)\}^3 \cos \theta_k \Delta_k \theta = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos \theta d\theta$$

يترك للقارئ أن يحصل على الصيغة $A\bar{y}$ كتتمرين .

ملاحظة : إن المركز المتوسط للقطاع OR_k يقع ، استنادا إلى المسألة ٨ من الفصل ٢٧ على OT_k على بعد $\frac{2\rho_k \sin \frac{1}{2}\Delta_k \theta}{3 \cdot \frac{1}{2}\Delta_k \theta}$ من النقطة O . لعل القارئ يرغب أن يستخدم هذه النتيجة في استنتاج الصيغتين السابقتين .



شكل ١١ — ٨

٩ — عين المركز المتوسط للسطح الواقع في الربع الأول والمحدد بمقدرة الوردة $\rho = \sin 2\theta$.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8} \bar{x} = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \cos \theta d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{16}{105}, \quad \bar{x} = \frac{128}{105\pi}$$

واستنادا إلى التناظر يكون $\bar{y} = 128/105\pi$. والمركز المتوسط هو النقطة $(128/105\pi, 128/105\pi)$.

١٠ — عين المركز المتوسط للسطح الواقع في الربع الأول والمحدد بالقطع المكافئ $\rho = \frac{6}{1 + \cos \theta}$ كما هو مبين في

الشكل ١١ — ٩ .

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{36}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \sec^4 \frac{1}{2}\theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \tan^2 \frac{1}{2}\theta) \sec^2 \frac{1}{2}\theta d\theta = 9 \left[\tan \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2}\theta \right]_0^{\pi/2} = 12$$

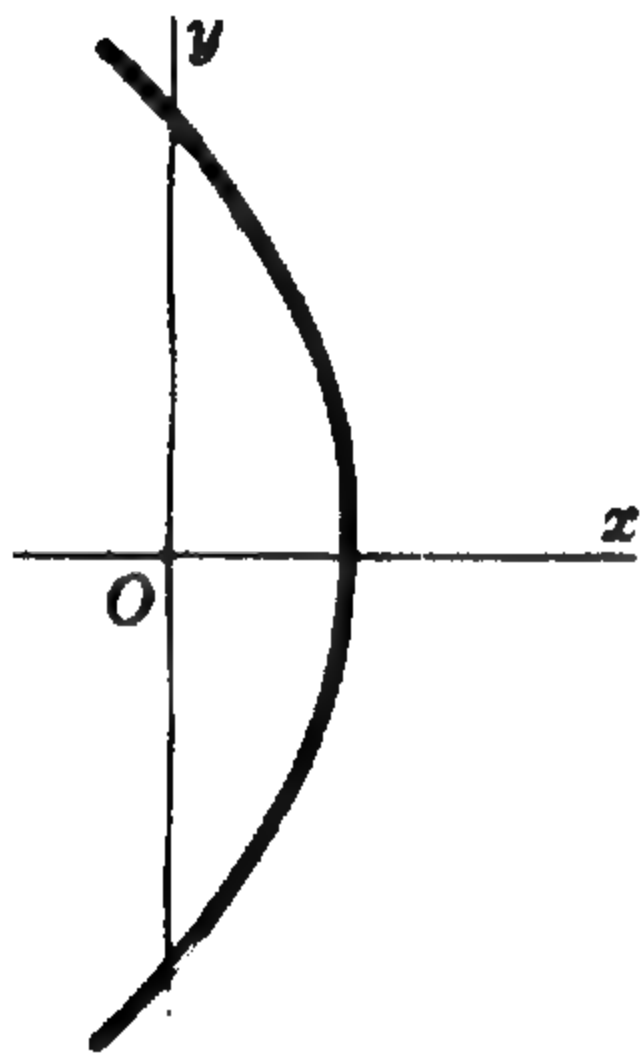
$$12\bar{x} = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{216 \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^3} d\theta = 9 \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 1}{\cos^3 \frac{1}{2}\theta} d\theta$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} (2 \sec^4 \frac{1}{2}\theta - \sec^2 \frac{1}{2}\theta) d\theta = 18 \left[\tan \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2}\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 72/5, \quad \text{and} \quad \bar{x} = 6/5.$$

$$12\bar{y} = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{216 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^3} d\theta = 27, \quad \text{و} \quad \bar{y} = 9/4.$$

والمركز المتوسط هو النقطة $(6/5, 9/4)$.



شكل ١٢ — ٩

مسائل إضافية

١١ — احسب مساحة السطح المحدد بكل من المنحنيات التالية :

ج : π sq. un.	(أ) $\rho^2 = 1 + \cos 2\theta$
ج : a^2 sq. un.	(ب) $\rho^3 = a^3 \sin \theta (1 - \cos \theta)$
ج : 4π sq. un.	(ج) $\rho = 4 \cos \theta$
ج : $\frac{1}{2}\pi a^2$ sq. un.	(د) $\rho = a \cos 2\theta$
ج : 6π sq. un.	(هـ) $\rho = 4 \sin^2 \theta$
ج : 24π sq. un.	(و) $\rho = 4(1 - \sin \theta)$

١٢ - احسب مساحة السطح :

- (أ) داخل $\rho = \cos \theta$ وخارج $\rho = 1 - \cos \theta$. ج : $(\sqrt{3} - \pi/3)$ sq. un.
 (ب) داخل $\rho = \sin \theta$ وخارج $\rho = 1 - \cos \theta$. ج : $(1 - \pi/4)$ sq. un.
 (ج) بين البيضوي الداخلي والبيضوي الخارجي لـ $\rho^2 = a^2(1 + \sin \theta)$. ج : $4a^2$ sq. un.
 (د) بين عقدتي المنحنى $\rho = 2 - 4 \sin \theta$. ج : $4(\pi + 3\sqrt{3})$ sq. in.

١٣ - (أ) لملزون أرشميدس $\rho = a\theta$. بين أن المساحة التي تضاف بالدورة الـ n ($n > 2$) تساوي $(n-1)$ مرة من المساحة التي تضاف بالدورة الثانية .

(ب) لملزون اللوغاريتمي $\rho = ae^{\theta}$. بين أن المساحة التي تضاف بالدورة الـ n ($n > 2$) تساوي $e^{4\pi}$ مرة من المساحة التي تضاف بالدورة التي قبلها .

١٤ - عين المركز المتوسط للمسطوح التالية :

- (أ) النصف الأيمن من $\rho = a(1 - \sin \theta)$. ج : $(16a/9\pi, -5a/6)$
 (ب) السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ $\rho = 4 \sin^2 \theta$. ج : $(128/63\pi, 2048/315\pi)$
 (ج) النصف العلوي من $\rho = 2 + \cos \theta$. ج : $(17/18, 80/27\pi)$
 (د) السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ $\rho = 1 + \cos \theta$. ج : $(\frac{16+5\pi}{16+6\pi}, \frac{10}{8+3\pi})$
 (هـ) السطح الواقع في الربع الأول في المسألة هـ . ج : $(\frac{32+15\pi}{48+6\pi}, \frac{22}{24+3\pi})$

١٥ - استخدم نظرية بابوس الأولى لتحصل على الحجم الناتج بدوران :

- (أ) $\rho = a(1 - \sin \theta)$ حول المستقيم $\theta = \pi/2$. ج : $8\pi a^3/3$ cu. un.
 (ب) $\rho = 2 + \cos \theta$ حول المحور القطبي . ج : $40\pi/3$ cu. un.

الفصل الخامس والأربعون

أطوال الأقواس ومراكزها المتوسطة . مساحات السطوح الدورانية في الإحداثيات القطبية

يعطى طول قوس المنحنى $\rho = f(\theta)$ من $\theta = \theta_1$ إلى $\theta = \theta_2$ بـ

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

أنظر المسائل ١ - ٤

المركز المتوسط لقوس . يحقق الإحداثيين (\bar{x}, \bar{y}) للمركز المتوسط لقوس المنحنى $\rho = f(\theta)$ من $\theta = \theta_1$ إلى $\theta = \theta_2$ الملتصقين :

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot s &= \bar{x} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos \theta ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x ds \\ \bar{y} \cdot s &= \bar{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin \theta ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y ds \end{aligned}$$

أنظر المسائل ٥ - ٦

مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس المنحنى $\rho = f(\theta)$ من $\theta = \theta_1$ إلى $\theta = \theta_2$ حول :

$$S_x = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin \theta ds \quad \text{المحور القطبي هو}$$

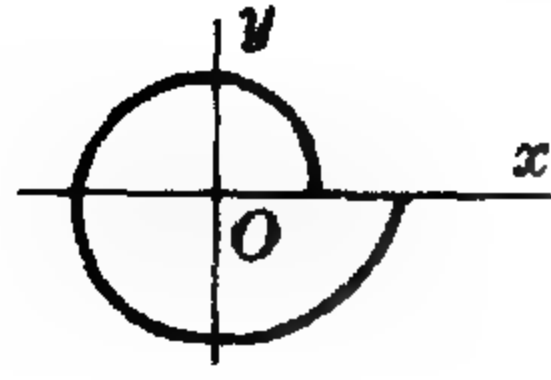
$$S_y = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} x ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos \theta ds \quad \text{والمحور } \theta = \pi/2 \text{ هو}$$

على أن يؤخذ حدا التكامل قريبين من بعضهما بقدر الإمكان .

أنظر المسائل ٧ - ١٠

مسائل محلولة

١ - احسب طول قوس الحلزون $\rho = e^{2\theta}$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$.



شكل ١ — ٥

$$dp/d\theta = 2e^{2\theta} \text{ and } \rho^2 + (dp/d\theta)^2 = 5e^{4\theta}.$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (dp/d\theta)^2} d\theta = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{5} (e^{4\pi} - 1) \text{ units}$$

$$\rho = a(1 - \cos \theta). \quad \text{٢ - احسب طول منحنى القلب (الكارديويد)}$$

ترسم النقطة منحنى القلب بكامله عندما تتغير θ من 0 إلى 2π

$$\rho^2 + (dp/d\theta)^2 = a^2(1 - \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (dp/d\theta)^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\theta d\theta = 8a \text{ units}$$

لم نأخذ في هذا الحل حتى التكامل قريبين بقدر الإمكان ، وذلك لأن الطول المطلوب يساوى ضعف الطول عندما تتغير θ من 0 إلى π أنظر المسألة ٣ .

$$\rho = a(1 - \sin \theta). \quad \text{٣ - احسب طول منحنى القلب}$$

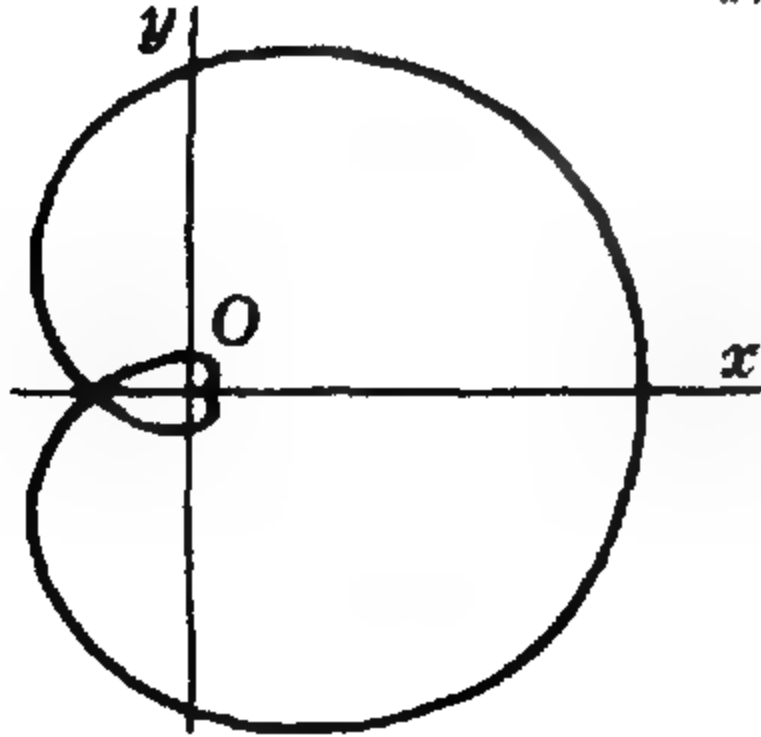
$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2(1 - \sin \theta)^2 + (-a \cos \theta)^2 = 2a^2(\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta)^2$$

وباتباع طريقة المسألة ٢ نكتب :

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (dp/d\theta)^2} d\theta = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} (\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta) d\theta \\ &= 2\sqrt{2} a (-\cos \frac{1}{2}\theta - \sin \frac{1}{2}\theta) \Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{2} a \text{ units} \end{aligned}$$

إن منحنى القلب في المسألتين لا يختلفان عن بعضهما إلا بوضعهما في المستوى ، لذلك فإن ينبغي أن يكون لهما نفس الطول . وتعليل هذا الاختلاف نجده في دراسة الدالتين المكاملتين $\sin \frac{1}{2}\theta$ و $\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta$ في حين لا تصبح الأولى سالبة أبدا نجد الثانية سالبة عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/2$ وموجبة فيما عدا ذلك . والطول المطلوب هو ضعف الطول الذي نحصل عليه عندما تتغير θ من $\pi/2$ إلى $3\pi/2$ لذلك يكون :

$$s = 2\sqrt{2} a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta) d\theta = 4\sqrt{2} a (-\cos \frac{1}{2}\theta - \sin \frac{1}{2}\theta) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8a \text{ units}$$



شكل ٤ — ٥

$$\rho = a \cos^4 \frac{1}{4}\theta. \quad \text{٤ - احسب طول المنحنى}$$

إن الطول المطلوب ضعف الطول الذي نحصل عليه عندما تتغير θ من 0 إلى 2π .

$$dp/d\theta = -a \cos^3 \frac{1}{4}\theta \sin \frac{1}{4}\theta \text{ and } \rho^2 + (dp/d\theta)^2 = a^2 \cos^6 \frac{1}{4}\theta.$$

$$\begin{aligned} s &= 2 \cdot a \int_0^{2\pi} \cos^3 \frac{1}{4}\theta d\theta = 8a \left[\sin \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{1}{4}\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 16a/3 \text{ units} \end{aligned}$$

٥ - عين المركز المتوسط لمنحنى القلب $\rho = a(1 - \cos \theta)$. أنظر المسألة ٢.

إن $\bar{y} = 0$ بسبب التناظر وإن \bar{x} للمنحنى بكامله لا تختلف عن \bar{x} للنصف الأعلى منه ولقد رأينا في المسألة ٢ أن نصف طول منحنى القلب هو $4a$ لذلك :

$$\begin{aligned} 4a \cdot \bar{x} &= \int_0^\pi \rho \cos \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta = 2a^2 \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \cos \theta \sin \frac{1}{2}\theta d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^\pi (-2 \cos^4 \frac{1}{2}\theta + 3 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 1) \sin \frac{1}{2}\theta d\theta = 4a^2 \left[\frac{1}{5} \cos^5 \frac{1}{2}\theta - 2 \cos^3 \frac{1}{2}\theta + 2 \cos \frac{1}{2}\theta \right]_0^\pi \\ &= -16a^2/5, \end{aligned}$$

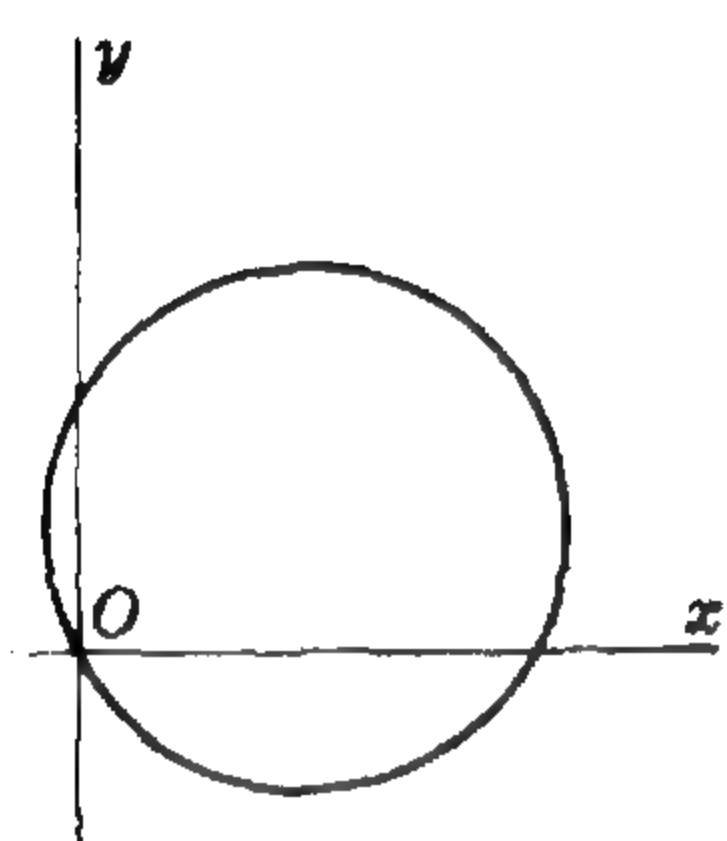
ومنه $\bar{x} = -4a/5$. و إحداثيا المركز المتوسط هما $(-4a/5, 0)$.

٦ - عين المركز المتوسط لقوس الدائرة $\rho = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 1/2\pi$.

أن $\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 20$, $d\rho/d\theta = 2 \cos \theta - 4 \sin \theta$ بما أن

نصف القطر هو $\sqrt{5}$. فإن $\sqrt{5}\pi$ هو

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\pi \cdot \bar{x} &= \int_0^{\pi/2} \rho \cos \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta \\ &= 4\sqrt{5} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4\sqrt{5} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= 2\sqrt{5}(\pi + 1), \text{ and } \bar{x} = \frac{2(\pi + 1)}{\pi}. \end{aligned}$$



شكل ٥ - ٥

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\pi \cdot \bar{y} &= \int_0^{\pi/2} \rho \sin \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta = 4\sqrt{5} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 4\sqrt{5} \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{5} \left(\frac{1}{2} \pi + 1 \right), \quad \bar{y} = \frac{\pi + 4}{\pi}. \end{aligned}$$

٧ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران النصف العلوي لمنحنى القلب $\rho = a(1 - \cos \theta)$ حول المحور القطبي.

نعلم من المسألة ٢ أن $\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$. ومنه

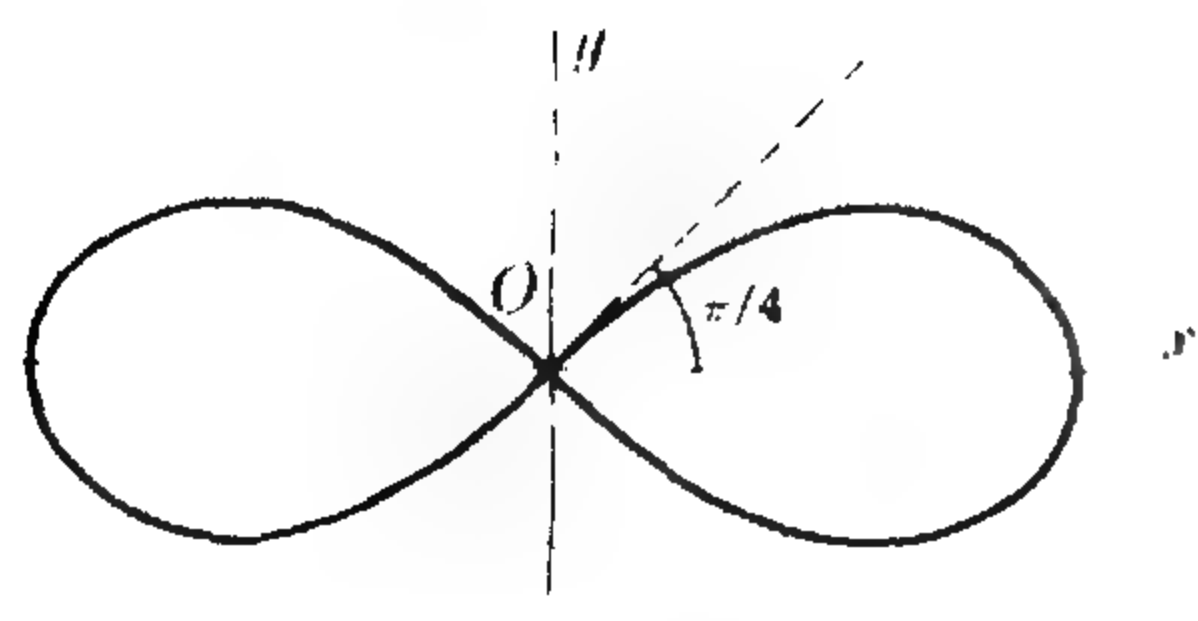
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi \rho \sin \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta = 4a^2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \sin \theta \sin \frac{1}{2}\theta d\theta \\ &= 16a^2\pi \int_0^\pi \sin^4 \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta d\theta = \frac{32}{5}a^2\pi \text{ square units} \end{aligned}$$

٨ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى في العروتين

ليمنسكات $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ حول المحور القطبي.

إن المساحة المطلوبة تساوي ضعف المساحة الناتجة عن دوران جزء

المنحنى الواقع في الربع الأول.



شكل ٦ - ٦

$$\begin{aligned} \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 &= a^2 \cos 2\theta + \left(-\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho} \right)^2 = \frac{a^4}{\rho^2} \\ S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \sin \theta \frac{a^2}{\rho} d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \\ &= 2a^2\pi(2 - \sqrt{2}) \text{ square units} \end{aligned}$$

٩ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة من المنحنى ذي العروتين $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ حول المحور $\theta = \pi/2$.

إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى المساحة الناتجة عن دوران جزء المنحنى الواقع في الربع الأول.

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \cos \theta \frac{a^2}{\rho} d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2} a^2\pi \text{ square units}$$

١٠ - استخدم نظرية بابوس لتحديد المركز المتوسط لقوس منحنى القلب $\rho = a(1 - \cos \theta)$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$.

لنجعل القوس يدور حول المحور القطبي فيكون $S = 2\pi \bar{y} s$. استنادا إلى المسألتين ٢ و ٧ أن $32a^2\pi/5 = 2\pi \bar{y} \cdot 4a$ وبالتالي $\bar{y} = 4a/5$.

واستنادا إلى المسألة ٥ نرى أن إحداثي المركز المتوسط هما $(-4a/5, 4a/5)$.

مسائل إضافية

١١ - احسب طول كل من :

(أ) $\rho = \theta^2$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\sqrt{3}$. ج: 56/3 units

(ب) $\rho = e^{\theta/2}$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 8$. ج: $\sqrt{5} (e^4 - 1)$ units

(ج) $\rho \cos^2 \frac{1}{2}\theta$. ج: 4 units

(د) $\rho = \sin^3 \theta/3$. ج: $3\pi/2$ units

(هـ) $\rho = \cos^4 \theta/4$. ج: 16/3 units

(و) $\rho = a/\theta$ من (ρ_1, θ_1) إلى (ρ_2, θ_2) . ج: $\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a \ln \frac{\rho_1(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2(a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})}$ units

(ز) $\rho = 2a \tan \theta \sin \theta$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi/3$. ج: $2a\sqrt{3} \left\{ \frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \right\}$ units

١٢ - عين المركز المتوسط للنصف العلوى من $\rho = 8 \cos \theta$. ج: $(4.8/\pi)$

١٣ - للمنحنى $a \sin \theta + b \cos \theta$ من أن $S_r = a\pi s$ ، $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، و $S_\theta = b\pi s$.

١٤ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى $\rho = 4 \cos \theta$ حول المحور القطبي.

ج: $16\pi \text{ sq. un.}$

١٥ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران كل عقدة من $\rho = 3 \sin^2 \theta$ حول المحور $\theta = \pi/2$.

ج: $\pi/256 \text{ sq. un.}$: $513\pi/256 \text{ sq. un.}$

٢٧. الفصل الخامس والاربعون - اطوال القواس ومراكزها الوسطية بمساحات السطوح الدورانية في الاحداثيات القطبية

١٦ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة المنحنى $\rho^2 = \cos 2\theta$ حول المحور $\theta = \pi/2$

ج : $2\sqrt{2} \pi \text{ sq. un.}$

١٧ - بين أنه إذا دارت كل من عقدتي $\rho = \cos^4 \theta/4$ حول المحور القطبي فإنهما ينتجان سطحين متساويين في المساحة.

١٨ - عين المركز المتوسط للسطح الناتج عن دوران العقدة اليمنى للمنحنى $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ حول المحور القطبي.

ج : $\bar{x} = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1)/6$

١٩ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى $\rho = \sin^2 \theta/2$ حول المستقيم $\rho = \csc \theta$.

ج : $8\pi \text{ sq. un.}$

٢٠ - استخرج صيغ هذا الفصل.

الفصل السادس والأربعون

التكاملات المعتلة

يقال عن التكامل المحدد $\int_a^b f(x) dx$ إنه تكامل معتل إذا :

- (أ) كان للدالة المكاملة $f(x)$ في الفترة $a \leq x \leq b$ نقطة انقطاع واحدة أو أكثر .
(ب) أو كان أحد حدى التكامل على الأقل لا نهائيا .

الدالة المكاملة المنقطعة : إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \leq x < b$ ولكنها منقطعة عند $x = b$ فإننا نعرف :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية .

وإذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a < x \leq b$ ولكنها منقطعة عند $x = a$ فإننا نعرف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية .

وإذا كانت $f(x)$ متصلة لجميع قيم x في الفترة $a \leq x \leq b$ باستثناء $x = c$ حيث $a < c < b$ فإننا نعرف :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon'}^b f(x) dx$$

بشرط وجود النهايتين .

أنظر المسائل ١ - ٦

حدا التكامل اللانهائين : إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \leq x \leq u$ فإننا نعرف :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية

وإذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $u' \leq x \leq b$ فإننا نعرف :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{u' \rightarrow -\infty} \int_{u'}^b f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية

وإذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $u' \leq x \leq u$ فإننا نعرف .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx + \lim_{u' \rightarrow -\infty} \int_{u'}^a f(x) dx$$

بشرط وجود النهايتين .

أنظر المسائل ٧ - ١٣

مسائل محلولة

١ - احسب قيمة $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. إن الدالة المكاملة منقطعة عند $x = 3$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\arcsin \frac{x}{3} \right]_0^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{3-\epsilon}{3} = \arcsin 1 = \frac{1}{2} \pi$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2} \pi \quad \text{ومنه}$$

٢ - بين أنه ليس للتكامل $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ معنى . إن الدالة المكاملة تعاني انقطاعا عند $x = 2$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \frac{1}{2-x} \right]_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{1}{2} \right)$$

إن النهاية غير موجودة وبالتالي ليس للتكامل معنى .

٣ - بين أنه ليس للتكامل $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ معنى .

إن الدالة المكاملة تعاني انقطاعا عند النقطة $x = 1$ بين حدى التكامل 4,0 . لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{x-1} \right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{x-1} \right]_{1+\epsilon'}^4 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\epsilon'} \right) \end{aligned}$$

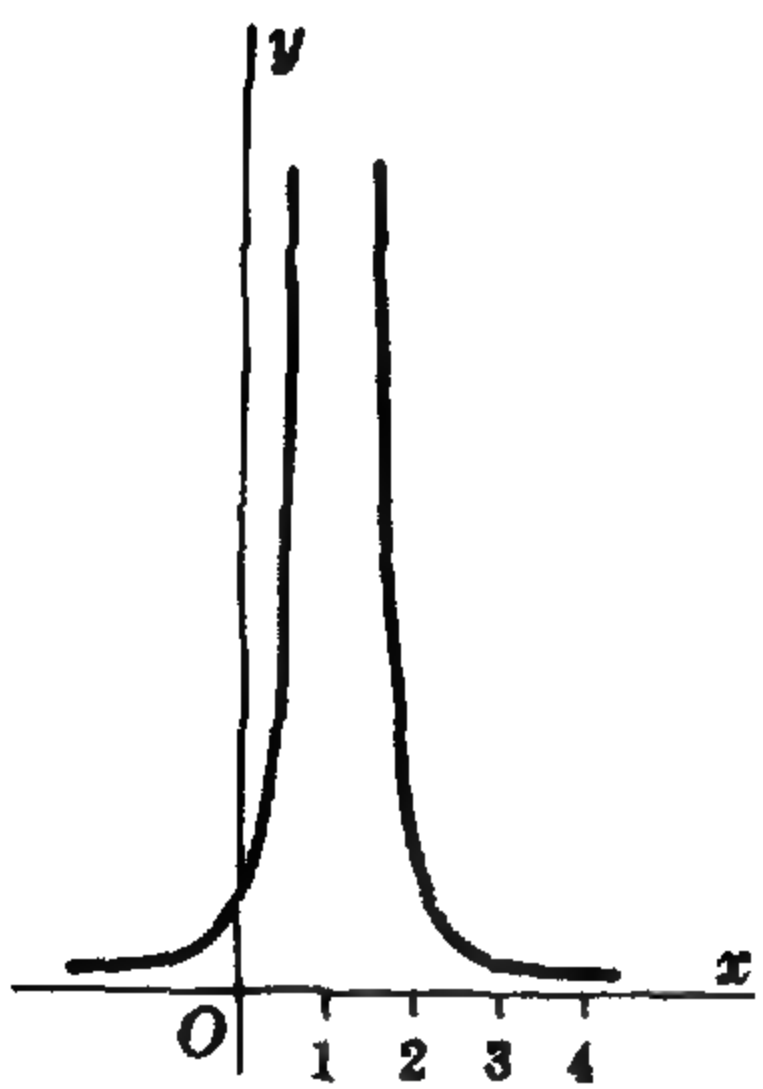
إن النهاية غير موجودة وبالتالي ليس للتكامل معنى .

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^4 = -\frac{4}{3}.$$

أما إذا غرضنا النظر عن الانقطاع فإننا نجد

وهذه النتيجة غير معقولة .

٤ - احسب قيمة $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. إن الدالة المكاملة تعاني انقطاعا عند $x = 1$. لذلك نعتبر :



شكل ٤٦ - ١

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} (x-1)^{2/3} \right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} (x-1)^{2/3} \right]_{1+\epsilon'}^4 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \left((-\epsilon)^{2/3} - 1 \right) + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - \epsilon'^{2/3}) = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1) \\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1). \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

٥ - برهن أنه ليس لتكامل $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ معنى . إن الدالة المكاملة تعاني انقطاعا عند $x = 1/2\pi$.

لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \sec x \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln (\sec x + \tan x) \Big|_0^{1/2\pi - \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \{ \sec (1/2\pi - \epsilon) + \tan (1/2\pi - \epsilon) \}$$

وأن النهاية غير موجودة وبالتالي ليس لتكامل معنى .

٦ - احسب قيمة $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx$. إن الدالة المكاملة تعاني انقطاعا عند $x = 1/2\pi$ لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -2(1 - \sin x)^{1/2} \Big|_0^{1/2\pi - \epsilon} = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{ -[1 - \sin (1/2\pi - \epsilon)] + 1 \} \\ &= 2(0 + 1) = 2. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx = 2$.

٧ - احسب قيمة $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$. إن الحد الأعلى لتكامل لا نهائي . لذلك نعتبر :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \pi. \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} x \right]_0^u = \frac{1}{4} \pi.$$

٨ - احسب قيمة $\int_{-\infty}^0 e^{2x} \, dx$. إن الحد الأدنى لتكامل لا نهائي لذلك نعتبر :

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}. \quad \text{وبالتالي فإن} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 e^{2x} \, dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_u^0 = \frac{1}{2} (1) - \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2u} = \frac{1}{2} - 0.$$

٩ - بين أنه ليس لتكامل $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ معنى . إن الحد الأعلى لتكامل نهائي لذلك نعتبر :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2\sqrt{u} - 2).$$

١٠ - احسب قيمة $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x \, dx}{e^x + e^{-x}}$. إن حدى التكامل لا نهائيان . لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{e^x \, dx}{e^x + 1} + \lim_{u' \rightarrow -\infty} \int_{u'}^0 \frac{e^x \, dx}{e^x + 1} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan e^x \Big|_0^u + \lim_{u' \rightarrow -\infty} \arctan e^x \Big|_{u'}^0 \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (\arctan e^u - \frac{1}{2}\pi) + \lim_{u' \rightarrow -\infty} (\frac{1}{2}\pi - \arctan e^{u'}) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi - 0 = \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

١١- احسب قيمة $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$. إن الحد الأعلى لتكامل لانهاى . لذلك نعتبر :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} \sin x \, dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-u} (\sin u + \cos u) \right\} + \frac{1}{2}$$

عندما $u \rightarrow \infty$ نجد أن $e^{-u} \rightarrow 0$ في حين يتغير كل من $\sin u$ و $\cos u$ من 1 الى -1 .

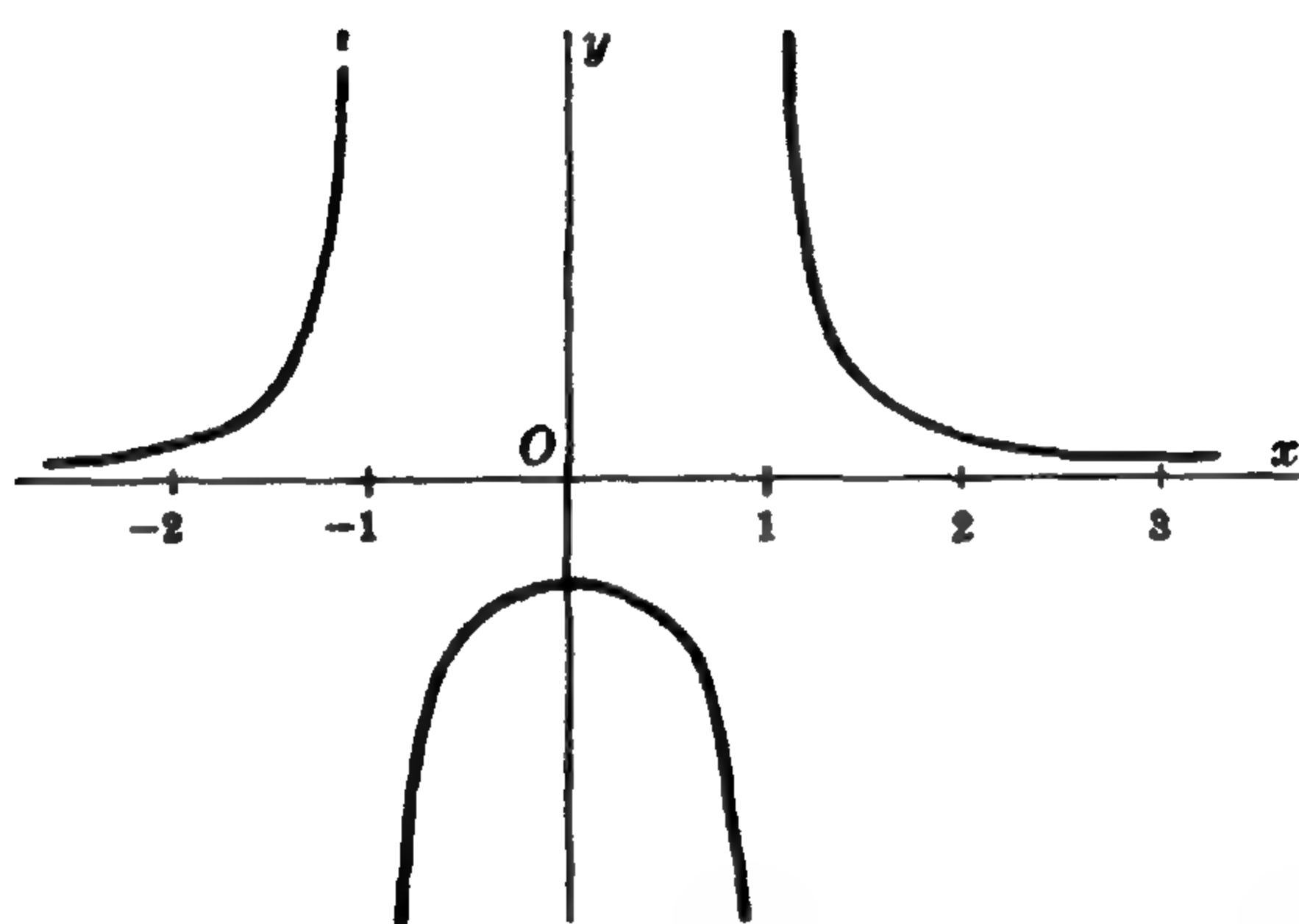
$$\text{لذلك فإن } \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}.$$

١٢- احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = \frac{x^2}{1-x^2}$ وخطية المقارين . أنظر الشكل ٤٦ - ٢ :

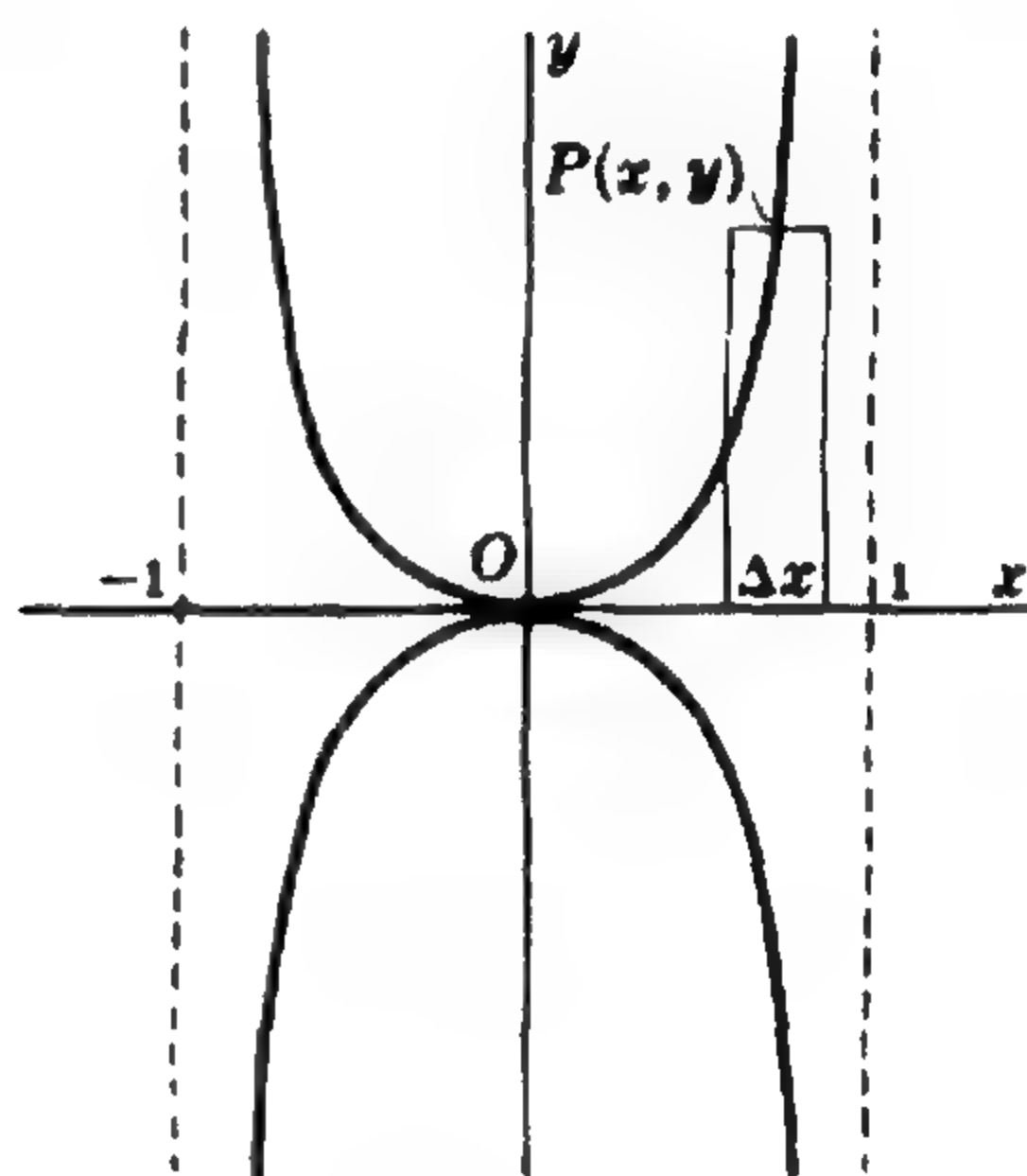
إن $A = 4 \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ، ولكن الدالة المكاملة تماثل انقطاعا عند $x = 1$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[-(1-x^2)^{1/2} \right]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}) = 1$$

والمساحة المطلوبة تساوى $4(1) = 4 \text{ sq. un.}$



شكل ٤٦ - ٣



شكل ٤٦ - ٢

١٣- احسب المساحة الواقعة على يمين $x=3$ بين المنحنى $y = \frac{1}{x^2-1}$ والمحور x .

$$\begin{aligned} A &= \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_3^u \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x-1}{x+1} \right]_3^u \\ &= \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \frac{1-1/u}{1+1/u} + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2) \text{ sq. un.} \end{aligned}$$

مسائل اضافية

١ - بين أن :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \quad (١)$$

$$(ب) \int_0^4 \frac{dx}{4-x} \text{ ليس له معنى}$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4 \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{3/2}} \quad \text{ليس له معنى.} \quad (\text{د})$$

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi \quad (\text{هـ})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = 9/2 \quad (\text{و})$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt{2} \quad (\text{ز})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} \quad \text{ليس له معنى.} \quad (\text{ح})$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 \quad (\text{ط})$$

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -1/4 \quad (\text{ي})$$

١٥- احسب المساحة الواقعة بين المنحنى المفروض وخطوطه المقاربة :

$$y^2 = \frac{1}{x(1-x)} \quad (\text{ج}) \quad y^2 = \frac{4-x}{x}, \quad (\text{ب}) \quad y^2 = \frac{x^2}{4-x^2}, \quad (\text{ا})$$

ج : (ا) 4π sq. un. (ب) 4π sq. un. (ج) 2π sq. un.

١٦- بين أن :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2/e \quad (\text{و}) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \quad (\text{ا})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0 \quad (\text{ز}) \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \pi/2 \quad (\text{ح}) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = -1 \quad (\text{ط}) \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} \quad \text{ليس له معنى.} \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 6 \quad (\text{ي}) \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2} \quad (\text{هـ})$$

١٧- احسب المساحة الواقعة بين المنحنى المفروض ونقطه المقارب :

$$y = x e^{-x^2/2} \quad (\text{ج}) \quad y = \frac{x}{(4+x^2)^2}, \quad (\text{ب}) \quad y = \frac{8}{x^2+4}, \quad (\text{ا})$$

ج : (ا) 4π sq. un. (ب) $1/4$ sq. un. (ج) 2 sq. un.

١٨- احسب المساحة الواقعة :

$$(ا) \quad \text{تحت } y = \frac{1}{x^2-4} \text{ وإلى اليمين من } x=3. \quad \text{ج : } \frac{1}{4} \ln 5 \text{ sq. un.}$$

$$(ب) \quad \text{تحت } y = \frac{1}{x(x-1)^2} \text{ وإلى اليمين من } x=2. \quad \text{ج : } 1 - \ln 2 \text{ sq. un.}$$

١٩ - بين أنه لا معنى لـ :

(١) المساحة الواقعة تحت $y = \frac{1}{4-x^2}$ من $x=2$ إلى $x=-2$.

(ب) المساحة الواقعة تحت $xy = 9$ وإلى اليمين من $x = 1$.

٢٠ بين أن المساحة الواقعة تحت المنحنى $y = e^{-2x}$ في الربع الأول تساوى $\frac{1}{2}$ sq. un. ، وأن الحجم الناتج عن دوران هذه القطعة حول المحور x يساوى $\frac{1}{4}\pi$ cubic units

٢١ - بين أن الحجم الناتج عن دوران السطح المستوي الواقع تحت المنحنى $xy = 9$ وإلى اليمين من $x = 1$ حول المحور x تساوى 81π cu. un. في حين أن مساحة السطح الناتج لا نهائية .

٢٢ - احسب طول كل من الأقواس التالية :

(١) $9y^2 = x(3-x)^2$ ، المقدة . (ب) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ، المنحنى بأكمله . (ج) $9y^2 = x^2(2x+3)$ ، المقدة .

ج : (١) $4\sqrt{3}$ units (ب) $6a$ units (ج) $2\sqrt{3}$ units

٢٣ - احسب عزم القصور الذاتي لدائرة نصف قطرها r بالنسبة إلى أحد مماساتها . ج : $3r^2s/2$.

٢٤ - بين أن التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ متباعد لجميع قيم p .

٢٥ - (١) بين أن $\int_a^b \frac{N dx}{(x-b)^p}$ موجود عندما $p < 1$ وليس له معنى عندما $p \geq 1$.

(ب) بين أن $\int_a^{+\infty} \frac{N dx}{x^p}$ موجود عندما $p > 1$ وليس له معنى عندما $p \leq 1$.

٢٦ - بفرض أن الدالتين $f(x) \leq g(x)$ معرفتان وليستا سالبتين في كل موضع في الفترة $a \leq x \leq b$ بينا $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$ ومن الشكل ٤٦ - ٤٨ يبدو من المعقول أن نفرض :

(١) إذا كان $\int_a^b g(x) dx$ موجودا فإن $\int_a^b f(x) dx$ موجود .

(٢) إذا كان $\int_a^b f(x) dx$ غير موجود فإن $\int_a^b g(x) dx$ غير موجود كذلك .

بين فيما إذا كان كل تكامل مما يل موجود أم غير موجود .

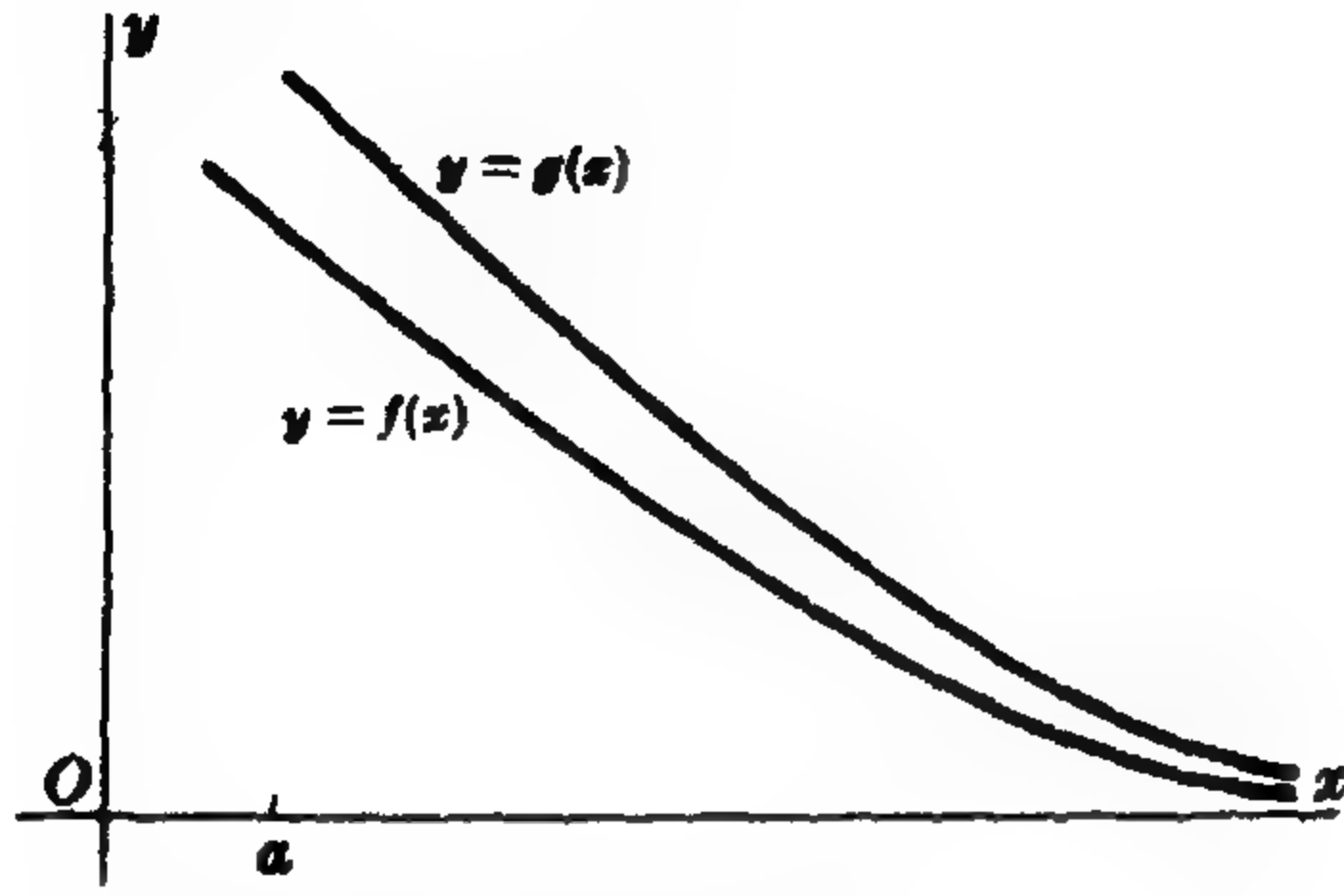
(١) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$ في الفترة $0 \leq x < 1$ إن $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2) < 4(1-x)$ و $\frac{1}{1-x^4} < \frac{1}{1-x}$.

وبما أن التكامل $\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ غير موجود فإن التكامل المفروض غير موجود .

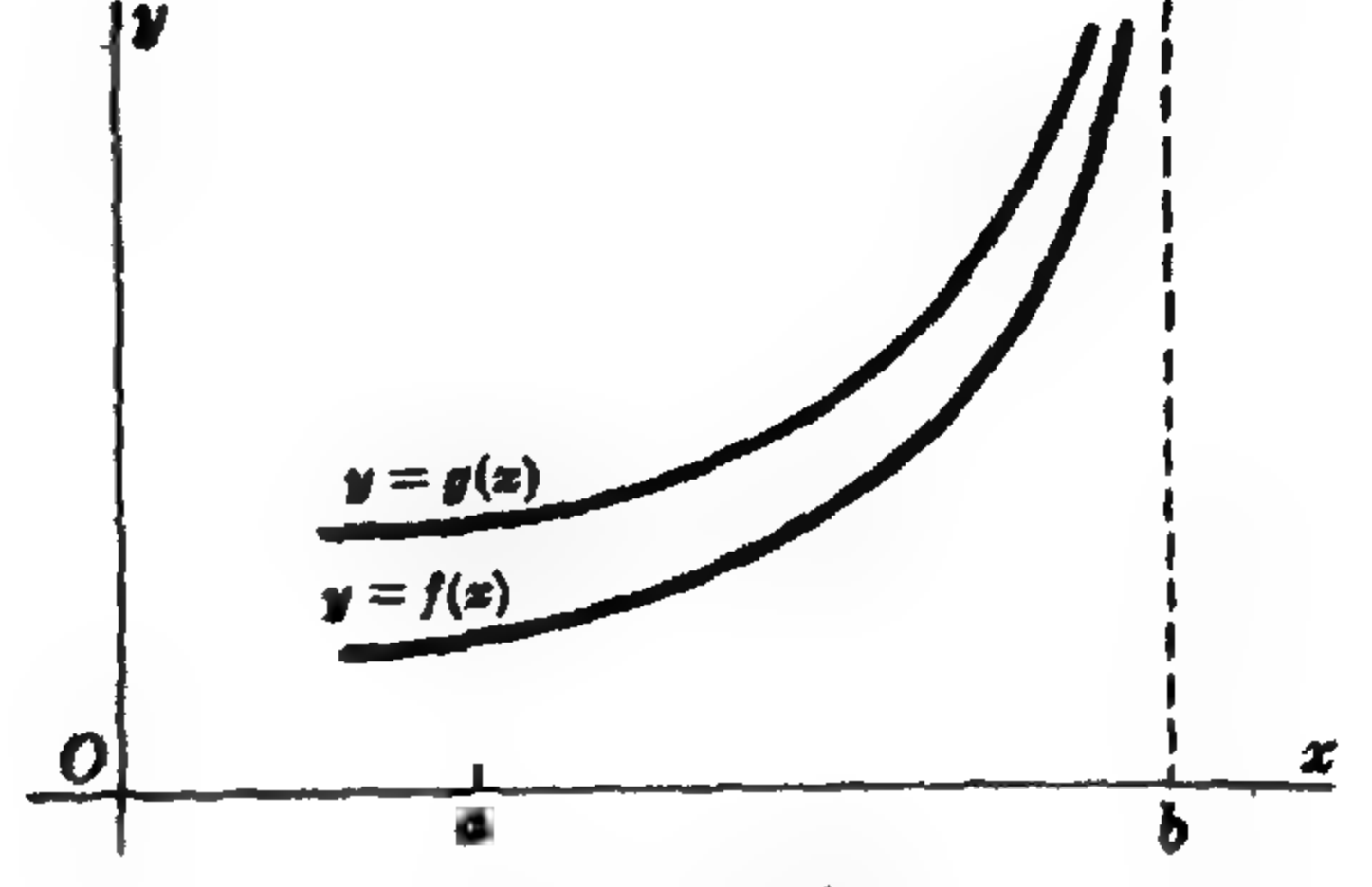
(ب) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ في الفترة $0 < x \leq 1$ إن $\frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ و بما أن التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ موجود فإن

التكامل المفروض موجود كذلك .

(ج) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{x^{1/2}}$ موجود (د) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{x} dx$ غير موجود (هـ) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ موجود .



شكل ٦ - ٥



شكل ٦ - ٦

٢٧ - بفرض الدالتين $f(x) \leq g(x)$ معرفتين وليستا سالبتين في كل موضع في الفترة $x \geq a$ بينا .
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ويبدو من الشكل ٦ - ٥ أنه من المقبول أن نقبل أنه :

(٣) إذا كان $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ موجودا فإن $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ موجود .

(٤) إذا كان $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ غير موجود فإن $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ غير موجود كذلك .

بين فيما إذا كان كل تكامل مما يلي موجوداً أو غير موجود .

(١) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x + 6}}$ في الفترة $x \geq 1$ أن $\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x + 6}} < \frac{1}{x^2}$ وبما أن $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ موجود

فكذلك التكامل المفروض .

(ب) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 2x}}$ موجود (ج) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ موجود (د) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^4}}$ موجود .

الفصل السابع والأربعون

المتواليات والمتسلسلات غير المنتهية (اللانهائية)

المتوالية غير المنتهية : $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ هي دالة في n حيز تعريفها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة - (انظر الفصل الأول) .

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها محدودة إذا وجد عدداً P, Q بحيث يكون $P \leq s_n \leq Q$ لجميع قيم n . فالمتوالية $3/2, 5/4, 7/6, \dots, \frac{2n+1}{2n}, \dots$ مثلاً محدودة لأنه مهما كانت n فإن $1 \leq s_n \leq 2$. أما المتوالية $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ فنثبت محدودة .

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها غير متناقصة إذا كان $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$ ، وإنها غير متزايدة إذا كان $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_n \geq \dots$. فالمتواليتان $1/2, 4/3, 9/4, 16/5, \dots$ و $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$ متناقصتان ، بينما المتواليتان $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ و $\{1/n\}$ متزايدتان .

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها متقاربة إلى عدد منته ، كنهاية لها ، $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \right]$ ، إذا وجد لكل عدد موجب ϵ مهما كان صغيراً عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|s - s_n| < \epsilon$. نقول عن المتوالية التي لها نهاية إنها متوالية متقاربة وإذا لم يكن لها نهاية فهي « متوالية متباعدة » .

انظر المسألتين ١ - ٢

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها متباعدة إلى ∞ ، $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \right]$ ، إذا وجد ، لكل عدد موجب M مهما كان كبيراً ، عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|s_n| > M$. وإذا كان $s_n > M$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ ، وإذا كان $s_n < -M$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$.

نظريات على المتواليات : إن برهان النظرية الأساسية لا يدخل في إطار هذا الكتاب .

I — كل متوالية محدودة غير متناقصة (غير متزايدة) متقاربة .

II — كل متوالية غير محدودة متباعدة . البرهان انظر المسألة ٣

إن عدداً من النظريات المتبقية ليس إلا إعادة لتلك التي مرت في الفصل الثاني .

III — إذا كانت المتوالية متقاربة (متباعدة) فإنها تبقى متقاربة (متباعدة) إذا غيرنا بعض أو جميع حدودها n الأولى .

IV — إن نهاية المتوالية المتقاربة وحيدة .
لبرهان انظر المسألة ٤

إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ وكان $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \cdot s_n) = k \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = ks, \quad \text{— V}$$

حيث k ثابت .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s \pm t. \quad \text{— VI}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n \cdot t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s \cdot t. \quad \text{— VII}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n/t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n / \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s/t, \quad \text{— VIII}$$

بشرط أن $t \neq 0$ وإن $t_n \neq 0$

مهما كانت n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0. \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty, \quad \text{IX}$$

لبرهان انظر المسألة ٥

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty. \quad \text{فإن } a > 1 \quad \text{X}$$

لبرهان انظر المسألة ٦

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0. \quad \text{فإن } |r| < 1 \quad \text{XI}$$

يسمى المجموع المتسار اليه :

$$\sum s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots \quad (1)$$

للتوالية غير منتهية $\{s_n\}$ متسلسلة غير منتهية . يرافق كل متسلسلة متوالية مجاميع جزئية

$$S_1 = s_1, S_2 = s_1 + s_2, S_3 = s_1 + s_2 + s_3, S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n, \dots$$

فإذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ حيث S عدد محدد ، فإننا نقول عن المتسلسلة (١) إنها متقاربة ونقول عن S إنه

مجموعها . أما إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ غير موجودة فإننا نقول عن المتسلسلة (١) إنها متباعدة . فالمتسلسلة تكون متباعدة

إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$ أو إذا كان S_n متزايدا ومتناقصا ، عندما تزداد n دون أن يقترب من نهاية معينة .

ويذكر كثال على النوع الأخير المتسلسلة المتذبذبة $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ فهنا $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$

انظر المسألتين ٧ - ٨

ينتج من النظريات السابقة ما يلي :

XII — إذا كانت المتسلسلة متقاربة (متباعدة) فإنها تبقى متقاربة (متباعدة) إذا أخذنا بعض أو جميع حدودها
إلى n الأول .

XIII — إن مجموع المتسلسلة المتقاربة وحيد .

XIV — إذا كانت $\sum s_n$ متقاربة إلى S فإن $\sum ks_n$ حيث k ثابت ، متقاربة إلى kS . وإذا كانت $\sum s_n$ متباعدة فإن $\sum ks_n$ متباعدة كذلك .

XV — إذا كانت $\sum s_n$ متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$

وإن العكس ليس صحيحا ، ففي المتسلسلة التوافقية (المسألة ٧ ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$ ولكن المتسلسلة متباعدة .

XVI — إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \neq 0$ فإن $\sum s_n$ متباعدة .

انظر المسألة ١١

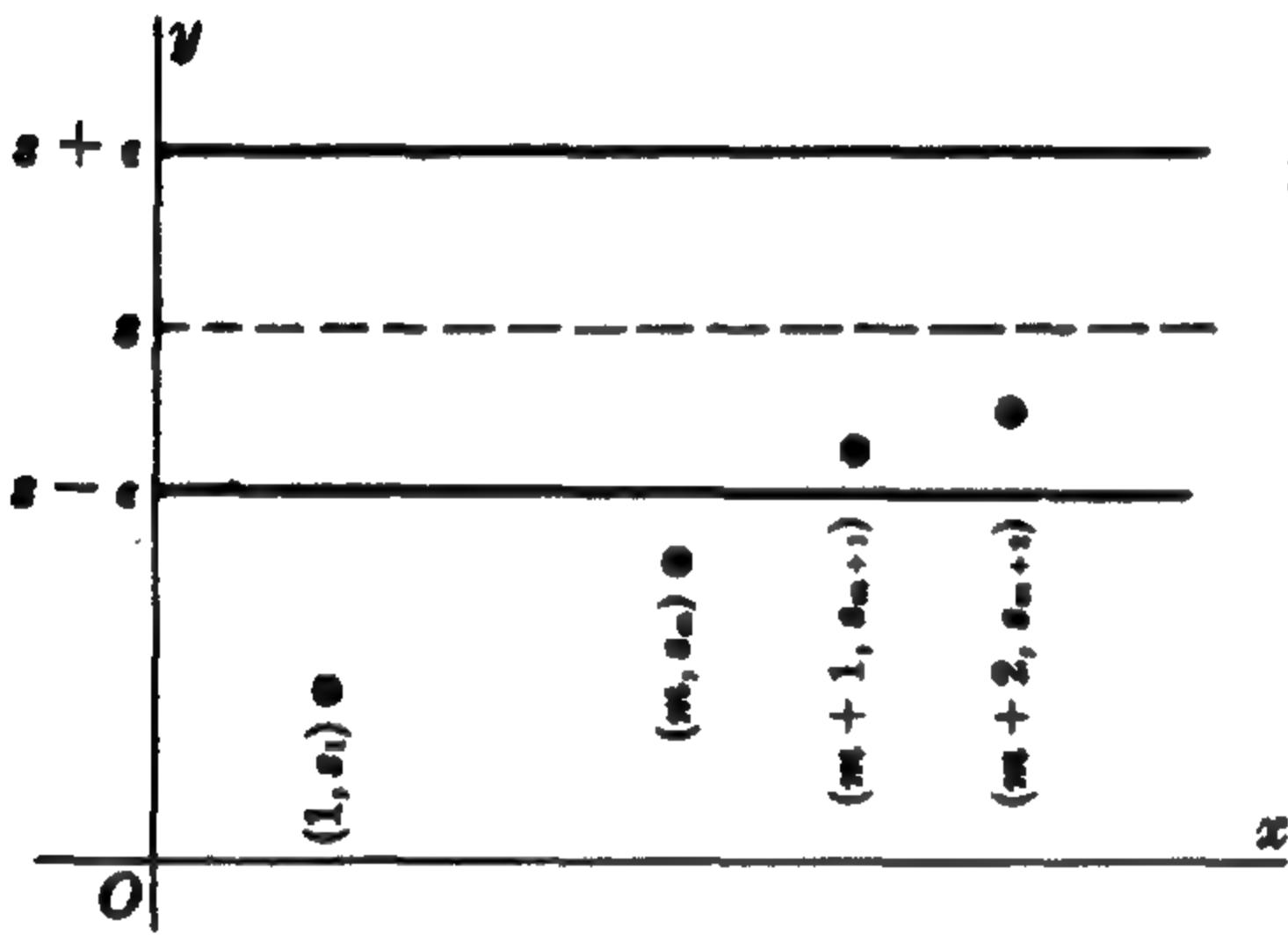
والعكس ليس صحيحا (انظر المسألة ٧ (ج)) .

مسائل محلولة

١ - لتكن لدينا المتوالية $\{s_n\}$ المتقاربة إلى s . لنحدد على المستقيم العددي (شكل ١٧ - ١) النقط $s, s-\epsilon, s+\epsilon$ حيث ϵ أى عدد موجب صغير . لنحدد الآن مواضع النقط s_1, s_2, s_3, \dots على الترتيب . إن تعريف التقارب يؤكد لنا أنه بينما تقع النقط m الأولى خارج الجوار ϵ فإن النقط s_{m+1} وجميع النقط التى تليها تقع داخل هذا الجوار .



شكل ١٧ - ١



شكل ١٧ - ٢

ونجد في الشكل ١٧ - ٢ مجموعة محاور إحداثية قائمة عادية .

لنرسم أولا المستقيمتين $y = s + \epsilon$ و $y = s - \epsilon$ ، و $y = s$.
معينين بذلك منطقة (مظللة) عرضها 2ϵ .

لنحدد بعد ذلك النقط $(1, s_1), (2, s_2), (3, s_3), \dots$ فنجد كما سبق أن النقط $(m+1, s_{m+1})$ وجميع النقط التى تليها واقعة ضمن المنطقة .

إنه من المهم جدا أن نلاحظ أن عددا محددا فقط ، من نقط متوالية متقاربة يمكن أن يقع خارج المجال ϵ أو خارج الفترة ϵ .

٢ - برهن باستخدام النظرية ١ ، أن المتوالتين (أ) $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n)}\right\}$ متقاربتان .

(أ) أن المتوالية محدودة لأن $0 \leq s_n \leq 1$ مهما كانت n .

وبما أن $s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = s_n + \frac{1}{n(n+1)}$ فإن $s_{n+1} \geq s_n$. والمتوالية ليست

متناقصة . وهكذا نجد أن المتوالية متقاربة إلى $s \leq 1$.

(ب) أن المتوالية محدودة لأن $0 \leq s_n \leq 1$ مهما كانت n .

وبما أن $s_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n+2)} = \frac{2n+1}{2n+2} s_n$ فالمتوالية ليست متزايدة وهكذا نجد أن المتوالية متقاربة إلى $s \geq 0$.

٣ - برهن أن كل متوالية غير محدودة $\{s_n\}$ متباعدة .

لنفرض جدلا أن $\{s_n\}$ متقاربة فيوجد عنده ، لكل عدد موجب ϵ مهما كان صغيرا ، عدد صحيح موجب m بحيث $n > m$ إذن $|s_n - s| < \epsilon$. وبما أن جميع حدود المتوالية ، بغض النظر عن عدد محدود منها ، تقع داخل هذه الفترة فإنه ينبغي أن تكون المتوالية محدودة ، وهذا يناقض الفرض إذا فالمتوالية متباعدة .

٤ - برهن أن نهاية المتوالية المتقاربة وحيدة .

لنفرض العكس أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ وأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = t$ ، حيث $|s - t| > 2\epsilon > 0$. عندئذ يكون لهواري $\epsilon \in \mathbb{R}$ ولهواري $\epsilon \in \mathbb{R}$ خواص متناقضة : (i) ليس بينهما أى نقطة مشتركة (ii) يحتوى كل منهما على جميع حدود المتتالية باستثناء عدد محدود من هذه الحدود . إذن $s = t$ والنهية وحيدة .

٥ - برهن أنه إذا كانت $\{s_n\}$ متوالية من الحدود اللاصفريّة . وكان $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0$.

ليكن $\epsilon > 0$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$ ينتج أنه يوجد لكل عدد $M > 1/\epsilon$ ، عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|s_n| > M > 1/\epsilon$. ولهذا العدد m يكون $|1/s_n| < 1/M < \epsilon$ عندما $n > m$ وبالتالى فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0$.

٦ - برهن أنه إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$.

ليكن $M > 0$ ولنفرض $a = 1 + b$ حيث $b > 0$ فيكون عندئذ :

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \dots > 1 + nb > M$$

عندما يكون $n > M/b$. وهكذا فإن m أكبر عدد صحيح فى M/b .

٧ - برهن أن :

(أ) المتسلسلة الحسابية غير المنتهية $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-1)d] + \dots$ تتباعد عندما $a^2 + d^2 > 0$

(ب) المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ حيث $a \neq 0$ متقاربة إلى $\frac{a}{1-r}$ عندما $|r| < 1$ ومتباعدة عندما $|r| \geq 1$.

(ج) المتسلسلة التوافقية $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n + \dots$ متباعدة .

(أ) أن $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$ ما لم يكن $a = d = 0$.

إذن المتسلسلة متباعدة عندما $a^2 + d^2 > 0$.

(ب) هنا يكون : $S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n$ ، $r \neq 1$.

فإذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ فإنه يكون $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$.

وإذا كان $|r| > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \infty$ والمتوالية S_n متباعدة . وفى الحالة $|r| = 1$ تكون المتسلسلة

على الشكل $a + a + a + \dots$ أو على الشكل $a - a + a - a + \dots$ وهما متباعدتان .

(ج) عندما نشكل المجاميع الجزئية نلاحظ أن :

$$S_1 > 2, S_2 > 2.5, S_3 > 3, S_4 > 3.5, S_5 > 4, \dots$$

فتوالية المجاميع الجزئية غير محدودة ومتباعدة والمتسلسلة متباعدة .

٨ - (١) احسب مجموع المتسلسلة $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$

$$S_1 = \frac{1}{5}, S_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^2}\right), S_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^3}\right), \dots, \text{ أن}$$

$$S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \text{ و } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4} \text{ ومنه}$$

(ب) احسب مجموع المتسلسلة $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}, \text{ أن}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}, \dots, S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \text{ ومنه}$$

٩ - المتسلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ متقاربة إلى ٢. ادرس المتسلسلة التي تنتج عندما (١) نحذف حدودها الأربعة الأولى (ب) نضيف لها الحدود $8 + 4 + 2$.

(١) إن المتسلسلة $\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ هندسية لا نهائية بـ $r = \frac{1}{2}$ وهي تتقارب إلى :

$$S = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$$

(ب) إن المتسلسلة $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ هندسية لا نهائية بـ $r = \frac{1}{2}$ وهي تتقارب إلى :

$$2 + (8 + 4 + 2) = 16$$

١٠ - برهن أنه إذا كان $\sum s_n = S$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$.

بما أن $\sum s_n = S$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$ حيث أن $s_n = S_n - S_{n-1}$ فإنه ينتج :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

١١ - بين أن المتسلسلتين (١) $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 + \dots$ (ب) $1/2 + 3/4 + 7/8 + 15/16 + \dots$ متباعدتان .

$$(١) \quad s_n = \frac{n}{2n+1} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$(ب) \quad s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0.$$

١٢ - تتقارب المتسلسلة $\sum s_n$ إلى S إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة إلى S . أي أنه يوجد لكل $\epsilon > 0$ مهما كان صغيراً ، عدداً صحيحاً m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|S - S_n| < \epsilon$. بين أن متسلسلي المسألة (٨) متقاربتان وذلك عن طريق إيجاد عدد m لكل ϵ مفروض .

$$(١) \quad \text{إذا كان } |S - S_n| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \right| = \frac{1}{4 \cdot 5^n} < \epsilon, \text{ فإن } 5^n > \frac{1}{4\epsilon}, n \ln 5 > -\ln(4\epsilon),$$

$$\text{ومنه } n > -\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}. \text{ وهكذا فإن } m \text{ أكبر عدد صحيح في } -\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}.$$

$$(ب) \quad \text{إذا كان } |S - S_n| = \left| 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon, \text{ فإن } n+1 > \frac{1}{\epsilon} \text{ ومنه } n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

وهكذا فإن m أكبر عدد صحيح في $1/\epsilon - 1$.

مسائل إضافية

١٣ - بين فيما إذا كانت كل متوالية مما يلي محدودة أو غير محدودة ، غير متزايدة أو غير متناقصة ، متقاربة أو متباعدة أو فيما إذا كانت متذبذبة .

$$(1) \left\{ n + \frac{2}{n} \right\} \quad (ب) \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad (ج) \left\{ \sin \frac{1}{2} n\pi \right\} \quad (د) \left\{ \sqrt[n]{n^2} \right\} \quad (هـ) \left\{ \frac{n!}{10^n} \right\} \quad (و) \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$$

١٤ - برهن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1/n^p} = 1$ ، عندما يكون $p > 0$ إرشاد : أن $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$

١٥ - المتوالية $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ، تحقق من أن (١) الحوار $|1 - s_n| < 0.01$ يحوى جميع حدود المتوالية باستثناء الحدود التسعة والتسعين الأولى . (ب) المتوالية محدودة . (ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$.

١٦ - برهن أنه إذا كان $|r| < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$.

١٧ - ادرس تقارب كل من المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد مجموع كل متسلسلة متقاربة منها .

$$(1) 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots \quad (ب) 4 - 1 + 1/4 - 1/16 + \dots \quad (ج) 1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 + \dots$$

ج : (١) $S = 2$ ، (ب) $S = 16/5$ ، (ج) متباعدة .

١٨ - احسب مجموع كل من المتسلسلات التالية :

$$(1) \sum 3^{-n} \quad (د) \sum \frac{1}{n(n+2)} \quad (ز) \sum \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$(ب) \sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (هـ) \sum \frac{1}{n(n+3)} \quad (ج) \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(ج) \sum \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right), p > 0 \quad (و) \sum \frac{n}{(n+1)!}$$

$$ج : (1) \frac{1}{2} , (ب) \frac{1}{2} , (ج) 1 , (د) \frac{3}{4} , (هـ) \frac{11}{18} , (و) 1 , (ز) \frac{1}{4} , (ح) \frac{1}{4} .$$

١٩ - برهن أن جميع المتسلسلات التالية متباعدة :

$$(1) 3 + 5/2 + 7/3 + 9/4 + \dots \quad (ج) e + e^2/8 + e^3/27 + e^4/64 + \dots$$

$$(ب) 2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \dots \quad (د) \sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

٢٠ - برهن أنه إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \neq 0$ ، فإن $\sum s_n$ متباعدة .

٢١ - برهن أن متسلسلات المسألة ١٨ (١) - (د) متقاربة وذلك عن طريق إيجاد عدد صحيح m لكل $\epsilon > 0$ بحيث

$$\text{يكون } |S - S_n| < \epsilon \text{ لكل } n > m .$$

$$ج : m \text{ أكبر عدد صحيح في } (1) - \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (ب) \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} \quad (ج) \sqrt[p]{1/\epsilon} - 1 .$$

$$(د) \text{ الجذر الموجب لـ } 2\epsilon m^2 - 2(1-3\epsilon)m - (3-4\epsilon) = 0 .$$

الفصل الثامن والأربعون

اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الموجبة

المتسلسلات ذات الحدود الموجبة : نقول عن المتسلسلات $\sum s_n$ التي جميع حدودها موجبة، إنها متسلسلة موجبة .

I - تكون المتسلسلات الموجبة $\sum s_n$ متقاربة إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ محدودة .

تنتج هذه النظرية من كون متوالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة موجبة ليست متناقصة أبداً .

II - اختبار التكامل . أيكن $f(n)$ الحد العام s_n للمتسلسلة $\sum s_n$ ذات الحدود الموجبة .

إذا كانت $f(x) > 0$ دالة موجبة ولا تزايد أبداً في الفترة $x > x_0$ حيث x_0 عدد صحيح موجب . ، فإن المتسلسلة $\sum s_n$ تكون متقاربة أو متباعدة تبعاً لوجود $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ أو عدم وجوده .

انظر المسائل ١ - ٥

III - اختبار المقارنة للتقارب . تكون المتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ متقاربة إذا كان كل حد من حدودها (ربما بعد عدد محدد من الحدود) أصغر أو يساوي الحد المقابل من متوالية موجبة متقاربة معلومة $\sum c_n$.

IV - اختبار المقارنة للتباعد . تكوى المتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ متباعدة إذا كان كل حد من حدودها (ربما بعد عدد محدد من الحدود) أكبر أو يساوي الحد المقابل من متسلسلة موجبة متباعدة معلومة $\sum d_n$.

انظر المسائل ٦ - ١١

V - اختبار النسبة . تتقارب المتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$ ، وتتباعدها إذا كان

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$. أما إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$ ، فإن هذا الاختبار يفشل في تقرير تقارب المتسلسلة أو تباعدها

انظر المسائل ١٢ - ١٨

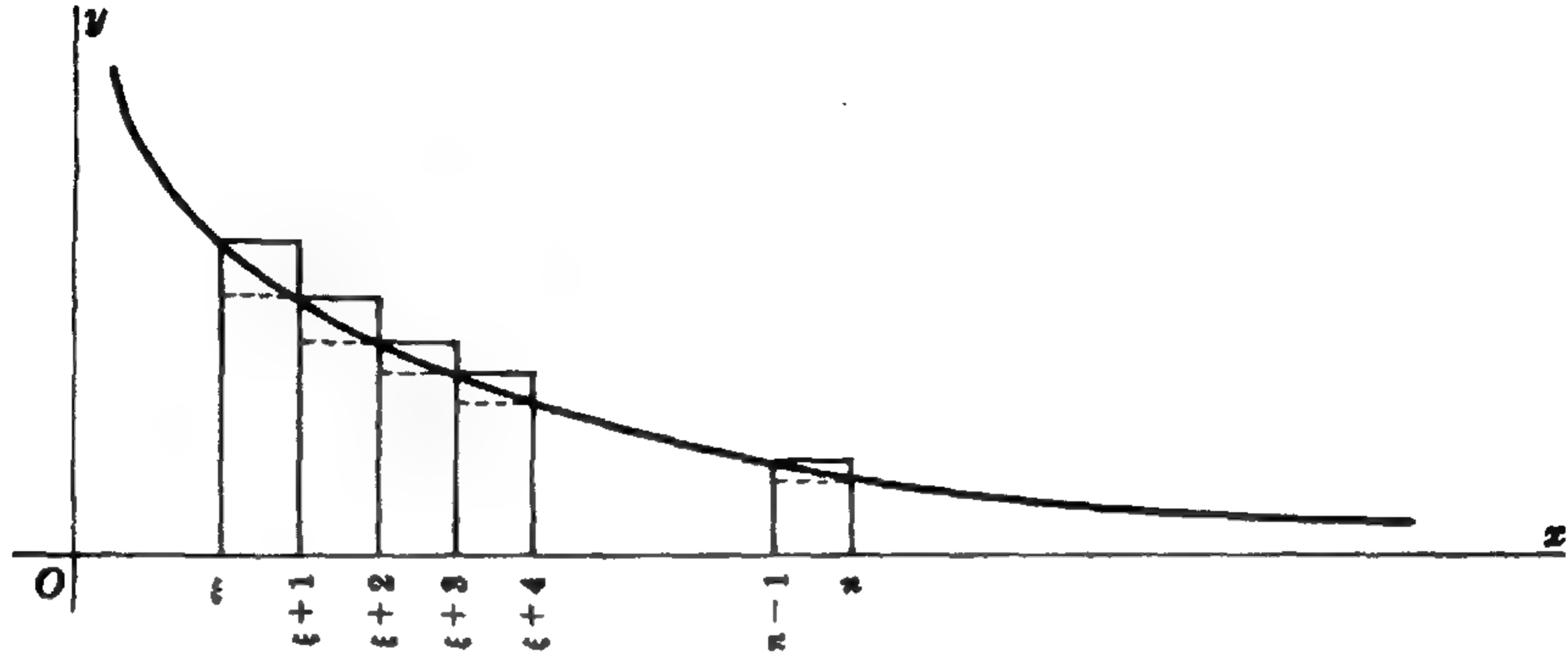
مسائل مطولة

اختبار التكامل :

١ - برهن اختبار التكامل : بفرض أن $f(n)$ تمثل الحد العام s_n للمتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ فإذا كانت $f(x) > 0$ دالة موجبة ولا تزايد أبداً في الفترة $x > x_0$ ، حيث x_0 عدد صحيح موجب ، فإن المتسلسلة $\sum s_n$ تكون متقاربة أو متباعدة تبعاً لوجود $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ أو عدم وجوده .

نرى في الشكل أن مساحة ما تحت المنحنى $y = f(x)$ من $x = \xi$ إلى $x = n$ قد قربت بمجموعتين من المستطيلات المشتركة في قواعدهما . فإذا عبرنا عن كون المساحة المذكورة تنحصر بين مجموع مساحات المستطيلات الصغيرة ومجموع مساحات المستطيلات الكبيرة نجد أن :

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \dots + s_n < \int_{\xi}^n f(x) dx < s_{\xi} + s_{\xi+1} + \dots + s_{n-1}$$



شكل ٨ - ١

(١) لنفرض أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^n f(x) dx = \int_{\xi}^{+\infty} f(x) dx = A$. فيكون عندئذ :

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \dots + s_n < A$$

$$S_n = s_{\xi} + s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \dots + s_n$$

ويكون

محدودا وغير متناقص عندما تزايد n إذن المتسلسلة $\sum s_n$ استنادا إلى النظرية ، متقاربة .

(٢) لنفرض أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^n f(x) dx = \int_{\xi}^{+\infty} f(x) dx$ غير موجود . فيكون عندئذ :

$$S_n = s_{\xi} + s_{\xi+1} + \dots + s_n \text{ غير محدود و } \sum s_n \text{ متباعدة .}$$

ادرس التقارب في المسائل من ٢ الى ٥ مستخدما اختبار التكامل .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \text{ . . . } f(n) = s_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ ; أن } \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots - \text{ ؟}$$

أن $f(x) > 0$ في الفترة $x > 1$ وهي متناقصة عندما تزايد x . فإذا أخذنا $\xi = 1$ ونظرنا في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{2x+1} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{2u+1} - \sqrt{3} = \infty$$

نجد أن التكامل غير موجود والمتسلسلة متباعدة

$$f(x) = \frac{1}{4x^2} \text{ . . . } f(n) = s_n = \frac{1}{4n^2} \text{ ; أن } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots - \text{ ؟}$$

أن $f(x) > 0$ في الفترة $x > 1$ وهي متناقصة عندما تزايد x . لنأخذ $\xi = 1$ ولننظر في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^u = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) = \frac{1}{4}$$

إن التكامل موجود والمتسلسلة متقاربة .

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \pi \text{ لنأخذ } f(n) = s_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} \pi ; \text{ إن } \sin \pi + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{9} \sin \frac{1}{3} \pi + \frac{1}{16} \sin \frac{1}{4} \pi + \dots = \xi$$

أن $f(x) > 0$ في الفترة $x > 2$ ، والدالة $f(x)$ متناقصة بتزايد x . لنأخذ $\xi = 2$ ولننظر في :

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_2^u \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \pi dx = \frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \pi \Big|_2^u = \frac{1}{\pi}$$

والمتسلسلة متقاربة .

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \text{ لنأخذ } f(n) = s_n = \frac{1}{n^p} ; \text{ أن } 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \quad (p > 0)$$

أن $f(x) > 0$ في الفترة $x > 1$ والدالة متناقصة عندما تزايد x .

لنأخذ $\xi = 1$ ولننظر في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^u = \frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1-p} - 1 \right\}, \quad (p \neq 1)$$

والمتسلسلة متقاربة .

فإذا كان $p > 1$ يكون

$$\frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1-p} - 1 \right\} = \frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{p-1}} - 1 \right\} = \frac{1}{p-1}$$

$$\text{وإذا كان } p < 1 \text{ يكون } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \text{ والمتسلسلة متباعدة .}$$

$$\text{أما إذا كان } p < 1 \text{ فيكون } \frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1-p} - 1 \right\} = +\infty \text{ والمتسلسلة متباعدة .}$$

لاحظ البرهان الثاني بأن المتسلسلة التوافقية متباعدة .

اختبار المقارنة . في هذا الاختبار ينبغي مقارنة الحد العام للمتسلسلة المراد دراسة تقاربها مع الحدود العامة لمتسلسلة

معلومة التقارب والتباعد وقد تنفع المتسلسلات التالية كتسلسلات مقارنة .

$$(أ) \text{ المتسلسلة الهندسية } a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots, \quad a \neq 0, \text{ وهي تتقارب عندما } 0 < r < 1$$

وتتباع عند $r \geq 1$.

$$(ب) \text{ المتسلسلات } p, \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \text{ التي تتقارب عندما } p > 1 \text{ وتتباع عندما}$$

$p \leq 1$.

(ج) كل متسلسلة جديدة تم دراسة تقاربها .

ادرس التقارب في كل من المسائل من ٦ - ١١ مستخدما اختبارات المقارنة .

$$6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

إن الحد العام للمتسلسلة $s_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ ، إذن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر من الحد الذي يقابله من المتسلسلة p :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

وبما أن متسلسلة المقارنة متقاربة حيث $p = 2$ ، إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة أيضا (يمكن استخدام اختبار التكامل هنا أيضا) .

$$7 - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

إن الحد العام للمتسلسلة هو $\frac{1}{\sqrt{n}}$. وبما أن $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ فكل حد من المتسلسلة المفروضة أكبر من الحد الذي يقابله من المتسلسلة التوافقية أو يساويه ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متباعدة - (يمكن استخدام اختبار التكامل هنا أيضا) .

$$8 - 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

إن الحد العام لهذه المتسلسلة $\frac{1}{n!}$. وبما أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ، $n! \geq 2^{n-1}$ ،

فإن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي يقابله في المتسلسلة الهندسية المتقاربة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متقاربة (لا يمكن استخدام اختبار التكامل هنا) .

$$9 - 2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \dots$$

وبما أن $\frac{n+1}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$ فكل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي ضمني الحد الذي يقابله من متسلسلة p

المتقاربة $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متقاربة .

$$10 - 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

الحد العام لهذه المتسلسلة $\frac{1}{n^2}$. وبما أن $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ فكل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي

يقابله من المتسلسلة الهندسية المتقاربة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$.

كذلك نلاحظ أن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي يقابله من متسلسلة p المتقاربة حيث

$$p = 2$$

$$1 + \frac{2^2+1}{2^2+1} + \frac{3^2+1}{3^2+1} + \frac{4^2+1}{4^2+1} + \dots - ١١$$

الحـد العام هو $\frac{n^2+1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n}$. وبما أن كل حد من المتسلسلة المفروضة أكبر أو يساوى الحد الذى يقابله من المتسلسلة التوافقية فالمتسلسلة المفروضة متباعدة.

اختبار النسبة :

١٢- برهن اختبار النسبة :

تتقارب المتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$ وتتباعـد إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$.

لنفرض أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L < 1$. عندئذ إذا اخترنا عددا r بحيث $L < r < 1$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب

m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $\frac{s_{n+1}}{s_n} < r$ أى أن .

$$\frac{s_{m+2}}{s_{m+1}} < r \quad \text{أو} \quad s_{m+2} < r \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+3}}{s_{m+2}} < r \quad \text{أو} \quad s_{m+3} < r \cdot s_{m+2} < r^2 \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+4}}{s_{m+3}} < r \quad \text{أو} \quad s_{m+4} < r \cdot s_{m+3} < r^3 \cdot s_{m+1}$$

.....

إذن كل حد من المتسلسلة $s_{m+1} + s_{m+2} + s_{m+3} + \dots$ أصغر أو يساوى الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية $s_{m+1} + r \cdot s_{m+1} + r^2 \cdot s_{m+1} + \dots$ وبهذا نجد أن $\sum s_n$ متقاربة استنادا إلى النظرية III .

لنفرض الآن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L > 1$ حيث L أكبر من الواحد أو أنه يساوى $+\infty$. عندئذ يوجد عدد صحيح

موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$ وبالتالي فإن $s_{n+1} > s_n$ و $\{s_n\}$ ليست متقاربة إلى الصفر وهذا يـؤدى إلى أن $\sum s_n$ متباعدة بالاعتماد على النظرية XVI (الفصل ٤٧) .

لنفرض أخيرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. مثال ذلك المتسلسلة : $\sum \frac{1}{n^p}, p > 0$, التى لها :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+1/n} \right)^p = 1$$

وبما أن هذه المتسلسلة متقاربة عندما $p > 1$ ومتباعدة عندما $p \leq 1$ ، فإن اختبار النسبة يفشل فى تقرير التقارب أو التباعد .

ادرس التقارب فى كل من المسائل ١٣ - ٣٣ مستخدما اختبار النسبة :

$$١٣- \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots \quad \text{إن} \quad s_n = \frac{n}{3^n}, \quad s_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}.$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$ والمتسلسلة متقاربة.

$$s_n = \frac{n!}{3^n}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3}. \quad \text{إن} \quad \frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \dots - ١٤$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} = \infty$ والمتسلسلة متباعدة.

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

-١٥

$$s_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ والمتسلسلة متباعدة.

$$s_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n}{2(n+1)}. \quad \text{إن} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots - ١٦$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ والمتسلسلة متقاربة.

$$s_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}, \quad s_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{4^n}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}. \quad \text{إن} \quad 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots - ١٧$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{1}{4}$ والمتسلسلة متقاربة.

$$1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \dots$$

-١٨

$$s_n = \frac{n^2+1}{n^3+1}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+1}.$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$ واختبار النسبة فاشل هنا. انظر المسألة ١١.

مسائل إضافية

١٩- بين أنه يمكن استخدام اختبار التكامل فيما يلي من المتسلسلات ثم ادرس تقارب وتباعد كل متسلسلة مستخدماً هذا الاختبار.

$$\sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (ج) \quad \sum \frac{n}{n^2+1} \quad (أ) \quad \sum \frac{1}{n \ln n} \quad (ج) \quad \sum \frac{1}{n} \quad (١)$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (ب) \quad \sum \frac{n}{e^n} \quad (د) \quad \sum \frac{n}{(n+1)(n+2)} \quad (د) \quad \sum \frac{50}{n(n+1)} \quad (ب)$$

ج: (١)، (ج)، (د)، (أ) متباعدة.

٢٠ - عين فيما يلي المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة باستخدام اختبار المقارنة :

$$\begin{array}{llll} \sum \frac{n}{3n^2-4} \quad (\text{م}) & \sum \frac{1}{3^n+1} \quad (\text{ط}) & \sum \frac{n+2}{n(n+1)} \quad (\text{س}) & \sum \frac{1}{n^3-1} \quad (\text{ا}) \\ \sum \frac{1}{1+\ln n} \quad (\text{ن}) & \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad (\text{ي}) & \sum \frac{1}{n^{n-1}} \quad (\text{و}) & \sum \frac{n-2}{n^3} \quad (\text{ب}) \\ \sum \frac{n^4+5}{n^5} \quad (\text{س}) & \sum \frac{1}{3^n-1} \quad (\text{ك}) & \sum \frac{1}{3n+1} \quad (\text{ز}) & \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad (\text{ج}) \\ \sum \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}} \quad (\text{ع}) & \sum \frac{\ln n}{n^p} \quad (\text{ل}) & \sum \frac{\ln n}{n} \quad (\text{ح}) & \sum \frac{1}{n^2+5} \quad (\text{د}) \end{array}$$

ج : المتسلسلات (ا)، (ب)، (د)، (و)، (ط)، (ك)، (ل) عندما $p > 2$ جميعها متقاربة .

٢١ - عين مما يلي المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة مستخدما اختبار النسبة :

$$\begin{array}{llll} \sum \frac{n^n}{n!} \quad (\text{ي}) & \sum \frac{n^2}{(\ln 2)^n} \quad (\text{د}) & \sum \frac{3^{2n-1}}{n^2+n} \quad (\text{و}) & \sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \quad (\text{ا}) \\ \sum \frac{2^n}{2n-1} \quad (\text{ك}) & \sum \frac{n^3}{(\ln 3)^n} \quad (\text{ح}) & \sum \frac{(n+1)2^n}{n!} \quad (\text{س}) & \sum \frac{5^n}{n!} \quad (\text{ب}) \\ \sum \frac{n^3}{3^n} \quad (\text{ل}) & \sum \frac{2^n}{n(n+2)} \quad (\text{ط}) & \sum n\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (\text{و}) & \sum \frac{n}{2^{2n}} \quad (\text{ج}) \end{array}$$

ج : المتسلسلات (ا)، (ب)، (ج)، (س)، (و)، (ح) متقاربة .

٢٢ - عين مما يلي المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة .

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \quad (\text{ز}) & \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \dots \quad (\text{ا}) \\ \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \dots \quad (\text{ح}) & 3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \dots \quad (\text{ب}) \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{5^2} + \dots \quad (\text{ط}) & 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots \quad (\text{ج}) \\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{2.2}} + \frac{1}{4^3} + \dots \quad (\text{ي}) & \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \quad (\text{د}) \\ 2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \dots \quad (\text{ك}) & 3 + \frac{3}{4} + \frac{11}{27} + \frac{9}{32} + \dots \quad (\text{س}) \\ \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \dots \quad (\text{ل}) & \frac{2}{3} + \frac{3}{2 \cdot 3^2} + \frac{4}{3 \cdot 3^3} + \frac{5}{4 \cdot 3^4} + \dots \quad (\text{و}) \end{array}$$

ج : المتسلسلات (ا)، (د)، (و)، (ز)، (ط)، (ي)، (ل) متقاربة .

٢٣ - برهن اختبار المقارنة للتقارب . إرشاد : إذا كان $\sum c_n = C$ فإن $\{s_n\}$ محدود .

٢٤ - برهن اختبار المقارنة للتباعد . إرشاد : إن $\sum s_i \geq \sum d_i > M$ عندما $n > m$.

٢٥ - برهن اختبار متعددة الحدود : إذا كان $P(n)$ و $Q(n)$ متعددي حدود من الدرجة p ، q على التوالي فإن

المتسلسلة $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ متقاربة عندما $q > p + 1$ ومتباعدة عندما $q \leq p + 1$ إرشاد : قارن مع $1/n^{q-p}$.

٢٦ - استخدم اختبار متعددة الحدود لتحديد التقارب أو التباعد فيما يلي :

$$\begin{array}{ll}
 (أ) \quad \frac{1}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-2} + \frac{3}{4^2-3} + \frac{4}{5^2-4} + \dots & (ا) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \\
 (و) \quad \frac{1}{2^2-1^2} + \frac{1}{3^2-2^2} + \frac{1}{4^2-3^2} + \frac{1}{5^2-4^2} + \dots & (ب) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \dots \\
 (ز) \quad \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \dots & (ج) \quad \frac{3}{2} + \frac{5}{10} + \frac{7}{30} + \frac{9}{68} + \dots \\
 & (د) \quad \frac{3}{2} + \frac{5}{24} + \frac{7}{108} + \frac{9}{320} + \dots
 \end{array}$$

ج : المتسلسلات (ا) ، (ج) ، (د) ، (و) متقاربة .

٢٧ - برهن اختبار الجذر : تتقارب المتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$ ، وتتباع إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} > 1$.

والاختبار فاشل إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} = 1$.

إرشاد : إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$ ، فإن $\sqrt[n]{s_n} < r < 1$ ، عندما $n > m$ ، ومنه $s_n < r^n$.

٢٨ - عين التقارب أو التباعد فيما يلي باستخدام اختبار الجذر .

$$(ا) \quad \sum \frac{1}{n^n}, \quad (ب) \quad \sum \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad (ج) \quad \sum \frac{2^{n-1}}{n^n}, \quad (د) \quad \sum \left(\frac{n}{n^2+2} \right)^n$$

ج : جميع المتسلسلات متقاربة .

الفصل التاسع والأربعون

المتسلسلات ذات الحدود السالبة

المتسلسلة التي جميع حدودها سالبة يمكن دراستها على أنها السالب للمتسلسلة الموجبة .

المتسلسلة المتناوبة • تسمى المتسلسلة التي تأخذ حدودها بالتناوب إشارة موجبة وسالبة ، مثل :

$$\sum (-1)^{n-1} s_n = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots + (-1)^{n-1} s_n + \dots \quad (1)$$

حيث جميع الـ s_i موجبة ، متسلسلة متناوبة .

١ - تتقارب المتسلسلة المتناوبة (١) عندما (i) $s_n > s_{n+1}$ لكل قيمة لـ n و (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$

انظر المسألتين ١ - ٢

التقارب المطلق • نقول عن متسلسلة $\sum s_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$ ذات الحدود المختلطة (موجبة وسالبة) بأنها متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كانت $\sum |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \dots + |s_n| + \dots$ متقاربة .

- كل متسلسلة موجبة متقاربة هي متقاربة تقارباً مطلقاً .

كل متسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً تكون متقاربة . البرهان انظر المسألة ٣ .

التقارب المشروط • إذا كانت $\sum s_n$ متقاربة في حين $\sum |s_n|$ متباعدة فإننا نقول عن المتسلسلة إنها متقاربة تقارباً مشروطاً .

فالمتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ مثلاً، تقاربها مشروط لأنها متقاربة في حين $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ متباعدة .

اختبار النسبة للتقارب المطلق • تكون المتسلسلة $\sum s_n$ ذات الحدود المختلطة متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| < 1$ ومتباعدة إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| > 1$. أما إذا كانت النهاية تساوي 1 فإن الاختبار يفشل في إعطائنا أية معلومات .

انظر المسائل ٤ - ١٢

مسائل محلولة

١ - برهن أن المتسلسلة المتناوبة $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots$ متقاربة عندما (i) $s_n > s_{n+1}$ لجميع قيم n و (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$

لننظر في المجموع الجزئي :

$$S_{2m} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots + s_{2m-1} - s_{2m}$$

الذي يمكن تجميعه على النحو التالي :

$$S_{2m} = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \dots + (s_{2m-1} - s_{2m}) \quad (1)$$

$$S_{2m} = s_1 - (s_2 - s_3) - \dots - (s_{2m-2} - s_{2m-1}) - s_{2m} \quad (ب)$$

ولكن من الفرض $s_n > s_{n+1}$ و $s_n - s_{n+1} > 0$ إذن من (1) نجد أن $S_{2m} > 0$ ، (ب) نجد أن $S_{2m+1} = S_{2m} + s_{2m+1}$ والمتواليه $\{S_{2m}\}$ محدودة وهي متقاربة إلى نهاية $L < s_1$. لننظر بعد ذلك في المجموع الجزئي

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m+1} = L + 0 = L \quad \text{إذن :}$$

وبهذا نجد أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L$ والمتسلسلة متقاربة.

٢- برهن أن المتسلسلات المتناوبة التالية متقاربة :

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \quad (1)$$

إن $s_n = \frac{1}{n^2}$ و $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ ومنه نجد أن $s_n > s_{n+1}$ وأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$. والمتسلسلة متقاربة.

$$1/2 - 1/5 + 1/10 - 1/17 + \dots \quad (ب)$$

إن $s_n = \frac{1}{n^2+1}$ و $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$ ومنه نجد أن $s_n \geq s_{n+1}$ وأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ والمتسلسلة متقاربة.

$$\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \frac{4}{e^4} + \dots \quad (ج)$$

إن المتسلسلة متقاربة لأن $s_n \geq s_{n+1}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

٣- برهن أن كل متسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً هي متقاربة.

لتكن لدينا المتسلسلة (1) $\sum s_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_n + \dots$

التي لها حدود موجبة وحدود سالبة ، ولتكن .

$$\sum |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \dots + |s_n| + \dots \quad (ب)$$

هي المتسلسلة المقابلة التي جميع حدودها موجبة والتي تقتارب إلى S' . لنفرض أن المجموع الجزئي الـ n هو $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ المتسلسلة (١) المكونة من r حد موجب مجموعته P_r ومن $t = n - r$ حد سالب مجموعته $-Q_r$. عندئذ يكون $S_n = P_r - Q_r$ في حين يكون المجموع الجزئي المقابل في (ب) هو $S'_n = P_r + Q_r$. ولكن بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = S'$ إذن فالجميع الجزئية S'_n محدودة ومنه نرى أنه عندما تزداد n تبقى المتوالياتان $\{P_r\}$ و $\{Q_r\}$ محدودتين وغير متناقصتين. ليكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_r = P$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_r = Q$. فيكون $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_r - \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_r = P - Q$ والمتسلسلة $\sum s_n$ متقاربة.

التقارب المطلق والمشروط :

ادرس التقارب المطلق والمشروط لكل من المتسلسلات التالية :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots - \text{ج}$$

إن المتسلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ التي نحصل عليها بجعل جميع حدود المتسلسلة المفروضة موجبة ، متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$. وعلى هذا فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً .

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots - \text{د}$$

إن المتسلسلة $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots$ التي نحصل عليها بجعل جميع حدود المتسلسلة المفروضة موجبة ، متقاربة استناداً إلى اختبار النسبة ، وبالتالي فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً .

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots - \text{هـ}$$

إن المتسلسلة $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ متباعدة لأنها متسلسلة p حيث $p = \frac{1}{2} < 1$. والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مشروطاً .

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots - \text{و}$$

المتسلسلة $1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots$ متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوي الحد المقابل في متسلسلة p مع $p = 3$ والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً .

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \dots - \text{ز}$$

إن المتسلسلة $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \dots$ متباعدة لأن كل حد من حدودها أكبر من نصف الحد المقابل في المتسلسلة التوافقية والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مشروطاً .

$$2 - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \dots - \text{ح}$$

إن المتسلسلة $2 + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!} + \dots + \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ متقاربة (استناداً إلى اختبار النسبة) والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً .

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{2^2+1} + \frac{9}{3^2+1} - \frac{16}{4^2+1} + \dots - \text{ط}$$

إن المتسلسلة $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} + \frac{16}{4^3+1} + \dots + \frac{n^2}{n^3+1} + \dots$ متباعدة (استنادا إلى اختبار التكامل) والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مشروطا .

$$11 - \frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} - \frac{4}{4^3+1} + \dots$$

إن المتسلسلة $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} + \dots + \frac{n}{n^3+1} + \dots$ متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل في متسلسلة p مع $p=2$ والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

$$12 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

إن المتسلسلة $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$ متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل في المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

مسائل إضافية

١٣ - ادرس تقارب وتباعد كل متسلسلة من المتسلسلات المتناوبة التالية :

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (أ) \quad \sum (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n} \quad (ج) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \quad (١)$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad (و) \quad \sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{3n+2} \quad (د) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n} \quad (ب)$$

ج : المتسلسلات (١) ، (ب) ، (د) ، (و) متقاربة .

١٤ - ادرس التقارب المشروط والمطلق في كل من المتسلسلات التالية :

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \quad (ز) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} \quad (أ) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} \quad (ج) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \quad (١)$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^4+2} \quad (ح) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^2} \quad (و) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2} \quad (د) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (ب)$$

ج : المتسلسلات (١) ، (ج) ، (د) ، (و) ، (ح) تقاربها مطلق .

الفصل الخمس

الحسابات بالمتسلسلات

عمليات على المتسلسلات . لتكن لدينا المتسلسلة

$$\sum s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots \quad (1)$$

ولنفرض $\sum t_n$ متسلسلة نحصل عليها من السابقة بإدخال الأقواس ، أى بتجميع حدودها مثل :

$$\sum t_n :- (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4 + s_5) + (s_6 + s_7) + (s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11}) + \dots$$

I — إن كل متسلسلة نحصل عليها بإدخال الأقواس في متسلسلة متقاربة ، تتقارب هي أيضا إلى مجموع المتسلسلة الأصلية ذاته .

II — إن كل متسلسلة نحصل عليها بإدخال الأقواس في متسلسلة موجبة متباعدة ، هي متباعدة كذلك . أما إذا كانت المتسلسلة الأصلية ذات حدود مختلفة فإن المتسلسلة الناتجة قد تتباعد وقد تتقارب .

انظر المسألتين ١ - ٢

لتكن الآن المتسلسلة $\sum u_n$ التى نحصل عليها من (١) بتغيير ترتيب حدودها . مثلا :

$$\sum u_n = s_1 + s_3 + s_2 + s_4 + s_6 + s_5 + \dots$$

III — إن كل متسلسلة نحصل عليها بتغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا ، هي كذلك متسلسلة تقاربها مطلق ، ومجموعها يساوى مجموع المتسلسلة الأصلية .

IV — يمكن تغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة تقاربا مشروطا لنحصل إما على متسلسلة متباعدة أو على متسلسلة متقاربة مجموعها يساوى عدداً نختاره مبقا .

انظر المسألة ٣

الجمع والطرح والضرب . إذا كانت $\sum s_n$ و $\sum t_n$ متسلسلتين فإننا نعرف مجموعهما $\sum u_n$ وناتج طرحهما $\sum v_n$ وحاصل ضربهما $\sum w_n$ على النحو التالى :

$$\sum u_n = \sum (s_n + t_n)$$

$$\sum v_n = \sum (s_n - t_n)$$

$$\sum w_n = s_1 t_1 + (s_1 t_2 + s_2 t_1) + (s_1 t_3 + s_2 t_2 + s_3 t_1) + \dots$$

V — إذا كانت $\sum s_n$ متقاربة إلى S و $\sum t_n$ متقاربة إلى T ، فإن $\sum (s_n + t_n)$ تتقارب إلى $S + T$ و $\sum (s_n - t_n)$ تتقارب إلى $S - T$. وإذا كانت $\sum s_n$ و $\sum t_n$ متقاربتين تقارباً مطلقاً فإن $\sum (s_n \pm t_n)$ تقاربها مطلق أيضاً .

VI — إذا تقاربت كل من $\sum s_n$ و $\sum t_n$ فإن متسلسلة حاصل ضربهما $\sum w_n$ قد تتقارب وقد تتباعد . وإذا تقاربت كل من $\sum s_n$ و $\sum t_n$ وكانت واحدة منهما متقاربة تقارباً مطلقاً فإن $\sum w_n$ تتقارب إلى ST . وإذا كان تقارب $\sum s_n$ و $\sum t_n$ مطلقاً فإن تقارب $\sum w_n$ يكون مطلقاً أيضاً .

انظر المسائلين ٤ - ٥

الحساب بالمتسلسلات يمكن الحصول على مجموع متسلسلة متقاربة بسهولة إذا أمكن التمييز عن مجموعها الجزئي n كدالة في n . مثال ذلك أية متسلسلة هندسية متقاربة . ويمكن من جهة أخرى اعتبار أى مجموع جزئي لمتسلسلة متقاربة كمجموع تقريبي للمتسلسلة ، ولكي يكون التقريب s_n لـ S مفيداً فإنه ينبغي أن تكون معلومة لدينا درجة كبر $|s_n - S|$.

ولمتسلسلة متقاربة $\sum s_n$ مجموعها S ؛ نكتب :

$$S = s_n + R_n$$

حيث تعطينا R_n ، والتي نسميها الباقي بعد n حداً ، مقدار الخطأ الناتج عن استعمال s_n ، المجموع الجزئي n ، بدلا من المجموع الحقيقي S . وتعطينا النظريات التالية تقريبا لهذا الخطأ من الشكل $R_n < \alpha$ في حالة المتسلسلات الموجبة ومن الشكل $|R_n| \leq \alpha$ في حالة المتسلسلات ذات الحدود المختلطة .

ولقد رأينا في المسألة ١ من الفصل ٤٩ إن المتسلسلة المتناوبة $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots$ يكون :

$$R_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + \dots < s_{2m+1}$$

$$R_{2m+1} = -s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + s_{2m+5} - \dots > -s_{2m+2}$$

لذلك :

VII — للمتسلسلة المتناوبة يكون $|R_n| < s_{n+1}$ ويكون R_n بالإضافة إلى ذلك موجبا إذا كانت n زوجية . وسالبا إذا كانت n فردية .

انظر المسألة ٦

VIII — للمتسلسلة الهندسية المتقاربة $\sum ar^{n-1}$ يكون :

$$|R_n| = \left| \frac{ar^n}{1-r} \right|$$

IX — إذا كانت متسلسلة موجبة $\sum s_n$ متقاربة استنادا إلى اختبار التكامل فإن :

انظر المسائل ٧ - ٩

$$R_n < \int_n^{+\infty} f(x) dx . n > \xi$$

وإذا كانت $\sum c_n$ متسلسلة موجبة متقاربة معروفة وإذا صح بالنسبة لمتسلسلة موجبة $\sum s_n$ إن $s_n \leq c_n$ لكل قيمة n تحقق الشرط $n > n_1$ فإن :

انظر المسائل ١٠ - ١٢

$$R_n \leq \sum_{n+1}^{+\infty} c_j . n > n_1$$

مسائل مطولة

١ - لتكن المتسلسلة الموجبة $\sum s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots$ ولتكن $\sum t_n = (s_1 + s_2) + s_3 + (s_4 + s_5) + s_6 + \dots$

المتسلسلة التي نحصل عليها منها بإدخال الأقواس وفق النموذج $2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$

فيكون بالنسبة للمجموع الجزئية $\sum t_n$: $T_1 = S_2, T_2 = S_3, T_3 = S_5, T_4 = S_6, \dots$ فإذا كانت $\sum s_n$

متقاربة إلى S فإن $\sum t_n$ تكون كذلك أيضاً لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ أما إذا كانت $\sum s_n$ متباعدة فإن

$\{S_n\}$ غير محدودة وبالتالي $\{T_n\}$ غير محدودة والمتسلسلة $\sum t_n$ متباعدة .

٢ - إن المتسلسلة $\sum (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{n} \right)$ متباعدة (لماذا ؟) ، ولكن إذا جمعنا حدودها وفق

$$\left(3 - \frac{5}{2} \right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{9}{4} \right) + \left(\frac{11}{5} - \frac{13}{6} \right) + \dots + \left(\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m} \right) + \dots$$

فإن المتسلسلة الناتجة متقاربة لأن حدها العام يحقق العلاقة $\left(\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m} \right) = \frac{1}{4m^2-2m} < \frac{1}{m^2}$.

٣ - إن المتسلسلة (١) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$ متقاربة ويمكن تجميع حدودها على الشكل

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots = A. \text{ المتسلسلة المتقاربة. } \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) + \dots$$

أما إذا غيرنا ترتيب حدودها وفق النموذج $+, -, -, +, -, -, \dots$ فإننا نحصل على

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots = \frac{1}{2}A. \text{ أو } \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) + \dots$$

٤ - برهن أن $\frac{3^n + 1}{3 \cdot 1} + \frac{3^2 + 2^2}{3^2 \cdot 2^2} + \frac{3^3 + 3^2}{3^3 \cdot 3^2} + \dots + \frac{3^n + n^2}{3^n \cdot n^2} + \dots$ متقاربة .

بما أن $\frac{3^n + n^2}{3^n \cdot n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3^n}$ فالمتسلسلة المفروضة تتكون من مجموع المتسلسلتين $\sum \frac{1}{n^2}$ ، $\sum \frac{1}{3^n}$ وحيث

أن كل واحدة منهما متقاربة فالمتسلسلة المفروضة ، استناداً إلى النظرية V متقاربة .

٥ - بين أن المتسلسلة $\frac{3^n + n}{n \cdot 3^n}$ متباعدة .

لنفرض أن $\sum \frac{3^n + n}{n \cdot 3^n} = \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3^n} \right)$ متقاربة . فسنجد ينتج من ذلك (استناداً إلى النظرية V) أن $\sum \frac{1}{n}$

متقاربة لأن $\sum \frac{1}{3^n}$ متقاربة ولكن هذه النتيجة خاطئة والمتسلسلة المفروضة متباعدة .

٦ - (١) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum s_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$ إلى حدودها العشرة الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها للحصول على قيمة المتسلسلة بخطأ لا يتجاوز 0.05 ؟

(١) إن المتسلسلة المفروضة متسلسلة متناوبة متقاربة والخطأ يساوي R_{10} حيث $R_{10} < s_{11} = 1/11^2 = 0.0083$.

(ب) بما أن $|R_n| < s_{n+1}$ نضع $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = 0.05$ فيكون $(n+1)^2 = 20$ ومنه $n=3.5$ والحدود

المطلوبة هي أربعة .

٧ - استنتج $R_n < \int_n^{+\infty} f(x) dx$ كما هو مذكور في النظرية IX .

نمد التقريب (بالمستطيلات الصغيرة) للمساحة الواقعة تحت المنحنى الموضح في شكل المسألة ١ من الفصل ٤٨ وإلى يمين $x = n$ فنجد عندئذ :

$$R_n = s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + \dots < \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

٨ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum \frac{1}{4n^2}$ إلى حدودها العشرة الأولى .

إن هذه المتسلسلة بالاعتماد على اختبار التكامل ، متقاربة (انظر المسألة ٣ من الفصل ٤٨) إذن :

$$R_{10} < \frac{1}{4} \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{10}^u \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{40} = 0.025$$

٩ - كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها للحصول على قيمة المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^3+1}$ بخطأ لا يتجاوز 0.000 01

هذه المتسلسلة متقاربة وذلك بالمقارنة مع المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^3}$ التي هي بدورها متقاربة بالاستناد إلى اختبار

التكامل . إذن . $R_n < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4n^2}$. فإذا وضعنا $\frac{1}{4n^2} = 0.000 01$ نجد $n^2 = 25,000$ ومنه

$n = 12,6$ ، لذلك فإن عدد الحدود المطلوبة 13 حداً .

١٠ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum \frac{1}{n!}$ إلى حدودها الاثني عشر الأولى .

لقد وجدنا (المسألة ٨ من الفصل ٤٨) أن هذه المتسلسلة متقاربة وذلك عن طريق مقارنتها بالمتسلسلة الهندسية

$\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ ولذلك فإن الخطأ R_{12} للمتسلسلة المفروضة أقل من الخطأ R'_{12} للمتسلسلة الهندسية ، إذن

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{4^{n-1}} ; \text{ إن } R_{12} < R'_{12} = \frac{(\frac{1}{4})^{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{11}} = 0.0005.$$

$$R_{12} < \frac{(\frac{1}{4})^{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{11}} = 0.000 000 08. \text{ وبالتالي فإن } n > 6$$

١١ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب $\sum s_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4 + \dots$ إلى حدودها العشرة الأولى .

بتطبيق اختبار النسبة $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)$ نجد أن $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2}{3}$. ونلاحظ أن

$\frac{s_{n+1}}{s_n} < \frac{2}{3}$ ، لجميع قيم n ، وبالتالي فإن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد المقابل من المتسلسلة

الهندسية $\sum s_1 r^{n-1}$ لذلك فإن :

$$\sum s_{11} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \sum \frac{1}{11} \left(\frac{2}{3} \right)^{11} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{2^{11}}{11 \cdot 3^{10}} = 0.004.$$

ويمكن الحصول على تقريب أفضل إذا لاحظنا أن كل حد من المتسلسلة المفروضة بعد الحد العاشر أصغر من :

$$R_{10} < \left(\frac{2}{3} \right)^{11} + \left(\frac{2}{3} \right)^{12} + \left(\frac{2}{3} \right)^{13} + \dots = \frac{(2/3)^{11}}{1 - 2/3} = \frac{2^{11}}{3^{10}} = 0.04.$$

١٢ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب $\sum s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$ إلى حدودها العشرة الأولى .

بتطبيق اختبار النسبة $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)$ نجد أن $r = 1/3$ ، والمتسلسلة متقاربة ولكننا نلاحظ أن $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \frac{1}{3}$ ،

لجميع قيم n ، وبالتالي لا يمكن استخدام المتسلسلة الهندسية $\sum (1/3)^n$ كتسلسلة مقارنة . ولكن من جهة أخرى

نجد أن المتوالية $\left\{ \frac{s_{n+1}}{s_n} \right\}$ غير متزايدة وأن $\frac{s_{12}}{s_{11}} = \frac{4}{11}$ وعلى هذا فإن كل حد من حدود المتسلسلة بعد

الحد العاشر أصغر أو يساوي الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية $\sum s_{11} \left(\frac{4}{11} \right)^{n-1} = \frac{11}{3^{11}} \left(\frac{4}{11} \right)^{n-1}$.

إذن $R_{10} < \sum \frac{11}{3^{11}} \left(\frac{4}{11} \right)^{n-1} = \frac{121}{7 \cdot 3^{11}} = 0.000\ 097\ 58 < 0.0001$.

مسائل إضافية

١٣ - غير ترتيب الحدود $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ لتحصل على متسلسلة متقاربة مجموعها (أ) 1 . (ب) 2 -

إرشاد (أ) ضع أولا الحدود إلى n_1 الموجبة الأولى حتى يزيد مجموعها عن 1 . اتبع ذلك بالحد n_2 سالباً الأولي كي يقل المجموع عن 1 وهكذا .

١٤ - هل يمكن لمجموع متسلسلتين متباعدتين أن يتقاربا ؟ اعط مثالا على ذلك .

١٥ - (أ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ إلى حدودها الخمسين الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها كي لا يتجاوز الخطأ 0.000 005 ؟

ج : (أ) 0.01 (ب) 100,000

١٦ - (أ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ إلى حدودها الثمانية الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها كي لا يتجاوز الخطأ 0.000 05 ؟

ج : (أ) 0.0002 (ب) 11

١٧ - (أ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة الهندسية $\sum \frac{3}{2^n}$ إلى حدودها الستة الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها كي لا يتجاوز الخطأ 0.000 05 ؟

ج : (أ) 0.05 (ب) 16

١٨ - برهن أنه إذا ثبت لنا تقارب المتسلسلة الموجبة $\sum s_n$ عن طريق مقارنتها بالمتسلسلة الهندسية $\sum r^n$ حيث $0 < r < 1$

فإن $R_n < \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

١٩ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل من المتسلسلتين التاليتين إلى حدودها الستة الأولى :

(أ) $\sum \frac{1}{3^n + 1} \left(< \sum \frac{1}{3^n} \right)$

$$(ب) \sum \frac{1}{3+4^n} \left(< \sum \frac{1}{4^n} \right)$$

ج : (أ) 0.0007 . (ب) 0.0009 .

٢٠- إن المتسلسلتين (أ) $\sum \frac{n+1}{n \cdot 3^n}$ و (ب) $\sum \frac{n}{(n+1)3^n}$ متقاربتان استنادا إلى اختبار النسبة . قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل منها إلى حدودها الثمانية الأولى .

ج : (أ) 0.0009 . (ب) 0.0007 .

٢١- برهن أن ، بالنسبة للمتسلسلة p المتقاربة $R_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$. إرشاد : انظر المسألة ٩ .

٢٢- إن المتسلسلتين (أ) $\sum \frac{1}{n^2+2}$ و (ب) $\sum \frac{n-1}{n^3}$ متقاربتان اعتمادا على مقارنتهما بالمتسلسلة p . قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل منها إلى حدودها الستة الأولى .

وكم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها في كل منهما كي لا يتجاوز الخطأ 0.005 .

ج : (أ) 0.014 ، عشرة حدود ، (ب) 0.002 ، خمسة حدود .

الفصل الحادى والخمسون

متسلسلات القوى

تسمى المتسلسلة غير المنتهية من الشكل

$$\sum c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (1)$$

حيث c_i ثوابت ، متسلسلة قوى فى x . وبشكل مماثل تسمى المتسلسلة المنتهية من الشكل

$$\sum c_i (x-a)^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x-a)^i = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots \quad (2)$$

متسلسلة قوى فى $(x-a)$.

لأى قيمة لـ x فإن كلا من المتسلسلتين (١) و (٢) تصبح متسلسلة غير منتهية بحدود ثابتة (أنظر الفصلين ٤٨ ، ٤٩) وإما أن تكون متقاربة أو متباعدة .

فترة التقارب . فترة التقارب . نسمى مجموعة قيم x التى تكون عندها متسلسلة القوى متقاربة بفترة التقارب .

ومن الواضح أن (١) متقاربة عندما $x = 0$ وأن (٢) متقاربة عندما $x = a$. فإذا وجدت قيم أخرى لـ x تتقارب عندها (١) أو (٢) فعندئذ إما أن تتقارب لجميع قيم x أو لجميع قيم x فى فترة زمنية منتهية (فترة مغلقة أو مفتوحة أو نصف مفتوحة) مركزها عند النقطة $x = 0$ للمتسلسلة (١) و $x = a$ للمتسلسلة (٢) .

ولإيجاد فترة التقارب نستخدم اختبار النسبة للتقارب المطلق أما فيما يتعلق بطرق الفترة فنستخدم الاختبارات الأخرى التى وردت فى الفصلين ٤٨ و ٤٩ .

أنظر المسائل ١ - ٩

التقارب والتقارب المنتظم . إن الدراسة التى سنوردها فيما يلى مع النظريات خاصة للمتسلسلات من النمط (١) ولكن يمكن تطبيقها على النمط (٢) بعد تغيير بسيط .

لننظر فى متسلسل القوى (١) ولنرمز بـ :

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

للمجموع الجزئى الـ n حدود

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k = c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \dots$$

للمجموع الباقى بعد n حدا . فيكون عندئذ

$$\sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x) \quad (2)$$

إذا تقاربت $\sum c_i x^i$ عندما $x = x_0$ إلى عدد محدود $S(x_0)$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$. لأن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |S(x_0) - S_n(x_0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x_0)| = 0. \text{ و } |S(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)|,$$

هكذا يتقارب $\sum c_i x^i$ عندما $x = x_0$ إذا وجد لكل عدد موجب ϵ مهما كان صغيرا، عددا صحيحا موجبا m بحيث يكون

$$|R_n(x_0)| < \epsilon \text{ عندما } n > m.$$

يلاحظ أن m لا تعتمد فقط على ϵ (أنظر المسألة ١٢ من الفصل ٤٧) بل تعتمد كذلك على اختيار القيمة x_0 لـ x .
أنظر المسألة ١٠.

سنبرهن في المسألة ١١.

I — إذا كانت $\sum c_i x^i$ متقاربة عندما $x = x_1$ وكان $|x_2| < |x_1|$ فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا عندما $x = x_2$.

لنفرض الآن أن (١) تقاربها مطلق، أى أن $\sum |c_i x^i|$ متقاربة لجميع قيم x التى تحقق العلاقة $|x| < P$ ،
لنأخذ قيمة لـ x أما $x = p$ أو $x = -p$ بحيث يكون $|x| = p < P$ فبما أن (١) متقاربة عندما $|x| = p$ فإنه
يوجد لـ $\epsilon > 0$ مهما كان صغيرا عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|R_n(p)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k p^k| < \epsilon$.
لنجعل الآن x تتغير في الفترة $|x| \leq p$ عندئذ يأخذ كل حد من $|R_n(x)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k x^k|$ قيمته العظمى عند
 $|x| = p$ ، وبالتالي فإن $|R_n(x)|$ يبلغ قيمته العظمى في الفترة $|x| \leq p$ عندما $|x| = p$.

لنفرض أننا اخترنا ϵ ووجدنا m عندما $|x| = p$ عندئذ يكون لهذه القيم لـ ϵ و m $|R_n(x)| < \epsilon$ لجميع
قيم x التى تحقق الشرط $|x| \leq p$ أى أن m تعتمد على ϵ و p ولا تعتمد على x_0 التى نختارها لـ x في الفترة
 $|x| \leq p$ كفاي التقارب العادى. لذلك فإننا نقول (١) متقاربة تقاربا منتظما في الفترة $|x| \leq p$ وهذا نكون
قد برهنا المطلوب.

II — إذا كانت $\sum c_i x^i$ متقاربة تقاربا مطلقا عندما $|x| < P$ فهى متقاربة تقاربا منتظما عندما $|x| \leq p < P$.
(المتسلسلة $\sum (1-x)^i$ على سبيل المثال، متقاربة عندما $|x| < 1$. واستنادا إلى النظرية I فإن هذه المتسلسلة متقاربة
تقاربا مطلقا عندما $|x| \leq 0.99$ واستنادا إلى النظرية II فإنها متقاربة تقاربا منتظما عندما $|x| \leq 0.9$).

III — تمثل متسلسلة القوى دالة متصلة $f(x)$ داخل فترة تقارب المتسلسلة.

لبرهان أنظر المسألة ١٢

IV — إذا تقاربت $\sum c_i x^i$ إلى الدالة $f(x)$ في الفترة I وإذا كان a و b داخل هذه الفترة فنعد:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_a^b c_i x^i dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \int_a^b c_2 x^2 dx + \dots \\ &+ \int_a^b c_{n-1} x^{n-1} dx + \dots \end{aligned}$$

لبرهان أنظر المسألة ١٣

V — إذا تقاربت $\sum c_i x^i$ إلى $f(x)$ في الفترة I فإن التكامل غير المحدد $\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^x c_i x^i dx$ يتقارب إلى $g(x) = \int_0^x f(x) dx$ لجميع قيم x داخل الفترة I .

VI — إذا تقاربت $\sum c_i x^i$ إلى الدالة $f(x)$ في الفترة I فمندئذ تتقارب مشتقة المتسلسلة $\frac{d}{dx} (c_i x^i)$ إلى $f'(x)$ لجميع قيم x داخل الفترة I .

VII — إن تمثيل الدالة $f(x)$ في متسلسلة قوى في x وحيد .

مسائل محلولة

١ — عين فترة تقارب $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \dots$.

باستخدام اختبار النسبة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

المتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً عندما $|x| < 1$ ومتباعدة عندما $|x| > 1$.

أما بخصوص طرق الفترة $x = 1$ و $x = -1$ فينبغي اختبار المتسلسلة بشكل مستقل .

عندما $x = 1$ تصبح المتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ متقاربة تقارباً مشروطاً .

وعندما $x = -1$ تصبح المتسلسلة $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)$ متباعدة .

وهكذا فإن المتسلسلة المفروضة تتقارب في الفترة $-1 < x \leq 1$.

٢ — عين فترة تقارب المتسلسلة $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

المتسلسلة المفروضة متقاربة لجميع قيم x .

٣ — عين تقارب المتسلسلة $\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n} + \dots$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = |x-2|$$

إن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً عندما $|x-2| < 1$ أو $1 < x < 3$ ، وتتباعدها عندما $|x-2| > 1$ أي عندما $x < 1$ و $x > 3$.

وعندما $x = 1$ فتأخذ المتسلسلة الشكل $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ وعندما $x = 3$ تأخذ الشكل $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$.

وتتقارب الأولى في حين تتباعده الثانية . وهكذا نرى أن المتسلسلة المفروضة تتقارب في الفترة $1 \leq x < 3$ وتتباعدها فيما عدا ذلك .

٤ — أوجد فترة تقارب $1 + \frac{x-3}{1^2} + \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} + \dots + \frac{(x-3)^{n-1}}{(n-1)^2} + \dots$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-3)^n}{n^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}} \right| = |x-3| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 = |x-3|$$

إن تقارب المتسلسلة مطلق عندما $|x-3| < 1$ أو $2 < x < 4$ ، وتتباعد عندما $|x-3| > 1$ أو عندما $x < 2$ و $x > 4$

وعندما $x = 2$ تأخذ المتسلسلة الشكل $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots$ وعندما $x = 4$ تأخذ الشكل $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ ربما أن هاتين المتسلسلتين متقاربتان تقارباً مطلقاً فإن المتسلسلة المفروضة تتقارب تقارباً مطلقاً في الفترة $2 \leq x \leq 4$ وتتباعد فيما عدا ذلك. ويلاحظ أن الحد الأول للمتسلسلة لم يعط بالحد العام عندما $n = 0$.

$$\begin{aligned} & \text{هـ - عين فترة تقارب المتسلسلة } \frac{x+1}{\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \dots \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+1| \end{aligned}$$

والمتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً عندما $|x+1| < 1$ أو عندما $-2 < x < 0$ ومتباعدة عندما $x < -2$ و $x > 0$.

أما عندما $x = -2$ فتأخذ المتسلسلة الشكل $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$ وعندما $x = 0$ تأخذ الشكل $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ أن الأولى من هاتين المتسلسلتين متقاربة في حين نجد أن المتسلسلة الثانية متباعدة (لماذا ؟). إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة في الفترة $-2 \leq x < 0$ ومتباعدة فيما عدا ذلك.

$$\text{و - عين فترة تقارب المتسلسلة } 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة ذات الحدين وهي منتهية عندما تكون m صحيحة موجبة وغير منتهية لجميع القيم الأخرى لـ m وإن :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)x^{n-1}} \right| \\ & = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| = |x| \end{aligned}$$

المتسلسلة غير المنتهية متقاربة تقارباً مطلقاً عندما $|x| < 1$ ومتباعدة عندما $|x| > 1$. وأما عند طرفي الفترة $x = \pm 1$ فإن المتسلسلة تتقارب إذا كان $m \geq 0$ وتتباعد إذا كان $m \leq -1$. أما عندما $-1 < m < 0$ فإن المتسلسلة تتقارب عندما $x = 1$ وتتباعد عندما $x = -1$ ولبرهان هذه الحقائق نحتاج إلى اختبارات أكثر دقة من التي وردت في الفصل ٤٨.

$$\text{٧ - أوجد مجال تقارب } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

والمتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً في الفترة $x^2 < 1$ أو $-1 < x < 1$ وعندما $x = -1$ تأخذ المتسلسلة الشكل $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$ وعندما $x = 1$ تأخذ الشكل $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ والمتسلسلتان متقاربتان. إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة عندما $-1 \leq x \leq 1$ ومتباعدة فيما عدا ذلك.

$$\text{٨ - عين فترة تقارب } (x-1) + 2!(x-1)^2 + 3!(x-1)^3 + \dots + n!(x-1)^n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{n!(x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = \infty$$

المتسلسلة متقاربة عند $x = 1$ فقط .

٩- أوجد فترة تقارب $\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \dots + \frac{n}{2^n x^n} + \dots$. إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة قوى في $1/x$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{2^{n+1} x^{n+1}} \cdot \frac{2^n x^n}{n} \right| = \frac{1}{2|x|} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2|x|}$$

والمتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً عندما $\frac{1}{2|x|} < 1$ أو عندما $|x| > \frac{1}{2}$.

وعندما $x = 1/2$ تأخذ المتسلسلة الشكل $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$. وعندما $x = -1/2$ تأخذ الشكل $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ وكل من المتسلسلتين متباعدة . إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة في الفترتين $x < -1/2$ و $x > 1/2$ ومتباعدة في الفترة $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

١٠- المتسلسلة $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$ متقاربة عندما $|x| < 1$. فإذا فرضنا $\epsilon = 0.000\,001$ فأوجد قيمة m بحيث يكون $|R_n(x)| < \epsilon$ عندما $n > m$ وذلك عندما .

(١) $x = 1/2$ و (ب) $x = 1/4$.

إن $R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{n+k}$ وبالتالي :

$$|R_n(1/2)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (1/2)^{n+k} \right| = \frac{1}{2} (1/2)^{n-1} , \quad |R_n(1/4)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (1/4)^{n+k} \right| = \frac{1}{4} (1/4)^{n-1}$$

(١) لنبحث عن m بحيث يكون عندما $n > m$ فإن $\frac{1}{2} (1/2)^{n-1} < 0.000\,001$ أو $1/2^{n-1} < 0.000\,003$. وبما أن $1/2^{19} = 0.000\,002$ و $1/2^{18} = 0.000\,004$ فإن $m = 19$.

(ب) لنبحث عن m بحيث يكون عندما $n > m$ فإن $\frac{1}{4} (1/4)^{n-1} < 0.000\,001$ أو $1/4^{n-1} < 0.000\,005$. هنا $1/4^9 = 0.000\,001$ و $1/4^{10} = 0.000\,00025$.

١١- برهن أنه إذا كانت متسلسلة القوى $\sum c_i x^i$ متقاربة عندما $x = x_1$ وإذا كان $|x_2| < |x_1|$ فإن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً عندما $x = x_2$. بما أن $\sum c_i x_1^i$ متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$ استناداً إلى النظرية XV من الفصل ٤٧ وحيث أن $\{ |c_i x_1^i| \}$ متقاربة فهي محدودة ، لنكتب $0 < |c_n x_1^n| < k$ لجميع قيم n .

نفرض $|x_2/x_1| = r$ حيث $0 < r < 1$ عندئذ :

$$|c_n x_2^n| = |c_n x_1^n| \cdot |x_2^n/x_1^n| = |c_n x_1^n| \cdot |x_2/x_1|^n < K r^n$$

وكل حد من المتسلسلة $\sum |c_n x_2^n|$ أصغر أو يساوى الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\sum k r^n$ لذلك فهي متقاربة وفي الحقيقة متقاربة تقارباً مطلقاً .

١٢- برهن أن متسلسلة القوى تمثل دالة متصلة $f(x)$ داخل فترة تقارب المتسلسلة .

لنفرض $f(x) = \sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x)$ ولتكن $x = x_0$ داخل فترة التقارب للمتسلسلة $\sum c_i x^i$ عندئذ توجد ، استناداً إلى النظرية ١ فترة حول x_0 تكون المتسلسلة فيها متقاربة تقارباً منتظماً . لكي نبرهن اتصال $f(x)$ عند $x = x_0$

يلزم أن نبرهن أن $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = 0$ عندما تكون $x_0 + \Delta x$ من الفترة I . أى أنه من الضرورى أن نبرهن أنه إذا كان ϵ عددا موجبا، مهما كان صغيرا، فإنه يمكن اختيار Δx بحيث يكون $x_0 + \Delta x$ فى I ويكون $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \epsilon$ والآن لأى Δx التى يكون عندها $x_0 + \Delta x$ فى الفترة I ، يكون

$$\begin{aligned} |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| &= |S_n(x_0 + \Delta x) + R_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| \\ &\leq |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |R_n(x_0 + \Delta x)| + |R_n(x_0)| \end{aligned} \quad (i)$$

لنفرض أننا اخترنا ϵ وبما أن $x_0 + \Delta x$ من فترة تقارب المتسلسلة فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|R_n(x_0 + \Delta x)| < \epsilon/3$ و $|R_n(x_0)| < \epsilon/3$. وبما أن $S_n(x)$ متعددة حدود فإنه من الممكن اختيار $|\Delta x|$ صغيرا بقدر كاف بحيث يكون $|S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3$ ولهذا الاختيار الجديد Δx تبقى $|R_n(x_0 + \Delta x)|$ أصغر من $\epsilon/3$ لأن المتسلسلة متقاربة تقاربا منتظما فى I . أما $|R_n(x_0)|$ فتبقى غير متغيرة. وهكذا نجد من (i) أن :

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

إذن الدالة $f(x)$ متصلة لجميع قيم x داخل فترة تقارب المتسلسلة.

١٣ - برهن أنه إذا كانت $\sum c_i x^i$ متقاربة إلى الدالة $f(x)$ فى فترة ما وكان $x = a$ و $x = b$ ضمن هذه الفترة فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \int_a^b c_2 x^2 dx + \dots + \int_a^b c_{n-1} x^{n-1} dx + \dots$$

لنفرض $b > a$ ولنكتب $f(x) = \sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x)$ فيكون عندئذ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b R_n(x) dx \right| \end{aligned}$$

وبما أن $\sum c_i x^i$ متقاربة فى فترة ما ولتكن $|x| < P$ فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا منتظما فى الفترة $|x| \leq p < P$ التى تحتوى $x = a$ و $x = b$. إذن لأى قيمة ϵ أكبر من الصفر مهما كانت صغيرة يمكن اختيار عدد n كبيرا بقدر كاف بحيث يكون $|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ لجميع قيم x التى تحقق الشرط $|x| \leq p$ ، إذن :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| &< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| &= 0, \quad \text{and} \quad \int_a^b f(x) dx = \sum \int_a^b c_i x^i dx \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مسائل إضافية

١٤ - أوجد فترة تقارب كل متسلسلات القوى التالية :

$$\begin{aligned} (أ) \quad & x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots & (ب) \quad & \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots \\ (ب) \quad & \frac{x}{5} - \frac{x^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{x^4}{4 \cdot 5^4} + \dots & (ج) \quad & x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots \\ (د) \quad & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots & (هـ) \quad & x - \frac{x^2}{(\ln 2)^2} + \frac{x^3}{(\ln 3)^2} - \frac{x^4}{(\ln 4)^2} + \dots \end{aligned}$$

(ز) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ا) حذا حذا .

(ح) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ب) حذا حذا .

$$(ط) \quad x + \frac{x^2}{1+2^2} + \frac{x^3}{1+3^2} + \frac{x^4}{1+4^2} + \dots$$

(ي) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ط) حذا حذا .

(ك) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ي) حذا حذا .

(ل) المتسلسلة التي نحصل عليها من تكامل (ا) حذا حذا .

(م) المتسلسلة التي نحصل عليها من تكامل (ج) حذا حذا .

$$(ن) \quad (x-2) + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x-2)^3}{9} + \frac{(x-2)^4}{16} + \dots$$

$$(س) \quad 1 - \frac{3x-2}{5} + \frac{(3x-2)^2}{5^2} - \frac{(3x-2)^3}{5^3} + \dots \quad (غ) \quad \frac{x-3}{1 \cdot 3} + \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{(x-3)^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$$

(ف) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ن) حذا حذا .

(ص) المتسلسلة التي نحصل عليها من تكامل (ن) حذا حذا .

$$(ر) \quad 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \dots$$

$$(ق) \quad 1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 + \dots$$

$$(ش) \quad \frac{1}{2} + \frac{x^2+6x+7}{2^2} + \frac{(x^2+6x+7)^2}{2^3} + \frac{(x^2+6x+7)^3}{2^4} + \dots$$

ج : (ا) $-1 < x < 1$ (و) جميع قيم x (ك) $-1 \leq x < 1$ (غ) $-1 < x < 7/3$ (ر) $x < -1$
 (ب) $-1 \leq x \leq 1$ (ز) $-1 < x < 1$ (ل) $-1 < x < 1$ (ف) $1 \leq x < 3$ (ش) $x > 1$
 (ج) جميع قيم x (ح) $-1 \leq x < 1$ (م) جميع قيم x (ص) $1 \leq x \leq 3$ (ت) $-5 < x < -3$
 (د) $-5 < x \leq 5$ (ط) $-1 \leq x \leq 1$ (ن) $1 \leq x \leq 3$ (ق) $x < \frac{1}{2}$ (س) $0 \leq x < 6$

١٥ - برهن أنه يمكن اشتقاق متسلسلة القوى حذا حذا داخل فترة تقاربها .

إرشاد : إن كلا من $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j x^{j-1}$ و $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (c_j x^j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j c_j x^{j-1}$ يتقاربان عندما $|x| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.

استخدم النظريات I و II و V لتبين أن $\int_0^x f'(x) dx = f(x)$.

١٦ - برهن أن تمثيل الدالة $f(x)$ في متسلسلة قوى في x تمثيل وحيد ..

إرشاد : ليكن $f(x) = \sum s_n x^n$ و $f(x) = \sum t_n x^n$ في الفترة $|x| < a$ حيث $a \neq 0$. لنضع $x = 0$

و $s_j = t_j$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ لنحصل على $\frac{d}{dx} \sum (s_n - t_n) x^n = 0$, $\frac{d^2}{dx^2} \sum (s_n - t_n) x^n = 0$, \dots و $\sum (s_n - t_n) x^n = 0$.

الفصل الثاني والخمسون

فك الدوال في متسلسلات

يمكن توليد متسلسلة قوى في x بطرق شتى . لتصور ، على سبيل المثال استمرار عملية القسمة التالية إلى ما لا نهاية . فنجد أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots \quad (1)$$

(يلاحظ أن هذه العلاقة باطلة تماما عندما $x = 5$ مثلا) . سنبين في المسألة ١ أن المتسلسلة (١) تمثل $\frac{1}{1-x}$ في الفترة $|x| < 1$ فقط ، أي أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots, -1 < x < 1$$

وسنرى في المسألتين ٢ - ٣ طرقا أخرى لتوليد متسلسلات قوى .

الطريقة العامة لفك دالة في متسلسلة قوى في x وفي $(x-a)$ سنوردها فيما يلي :

نلاحظ أنه يشترط في فك دالة أن توجد الدالة مع مشتقاتها من جميع الرتب عند $x = 0$ أو عند $x = a$ ، فالدوال $\ln x$ و $\cot x$ لا يمكن أن تفك في متسلسلة قوى .

متسلسلة ماكلورين • إذا افترضنا أنه يمكن تمثيل الدالة المفروضة في متسلسلة قوى في x فإن هذه المتسلسلة يجب أن تكون بالضرورة من شكل متسلسلة ماكلورين .

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

متسلسلة تايلور : إذا افترضنا أنه يمكن تمثيل الدالة المفروضة في متسلسلة قوى في $(x-a)$ فإن هذه المتسلسلة يجب أن تكون بالضرورة من شكل متسلسلة تايلور :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

أنظر المسألة ٤

أما السؤال عن الفترة التي تتمثل فيها $f(x)$ بمتسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور فننظر فيها في الفصل التالي . غير أنه فيما يتعلق بالدوال التي تمر معنا في هذا الكتاب فإن الفترة التي تتمثل فيها المتسلسلة الدالة المفروضة تنطبق مع فترة تقارب المتسلسلة .

أنظر المسائل ٥ - ١١

يمكن الحصول على شكل آخر مفيد جدا لمتسلسلة تايلور بتبديل x بـ $a + h$ في (٢) :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \dots$$

مسائل محلولة

١ - إن متسلسلة القوى $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots$ هي متسلسلة هندسية لانهاية فيها $a = 1$ و $r = x$.
لذلك فإن هذه المتسلسلة تتقارب إلى $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ ؛ عندما $|r| = |x| < 1$. أما إذا كان $|x| \geq 1$ فإن المتسلسلة متباعدة.

٢ - نحصل باشتقاق المتسلسلة التي مرت في المسألة (١) مرتين متتاليتين على متسلسلي القوى :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad (i)$$

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots \quad (ii)$$

ونحصل بتكاملهما بين حدى التكامل 0 و x مرتين متتاليتين على متسلسلي القوى :

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots \quad (iii)$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} + \dots \quad (iv)$$

٣ - أوجد متسلسلة القوى $y = \sum c_n x^n$ التي تحقق الشروط التالية :

$$(i) \quad y = 2 \text{ عندما } x = 0, \quad (ii) \quad y' = 1 \text{ عندما } x = 0, \quad (iii) \quad y'' + 2y' = 0$$

لننظر في :

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad (a)$$

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots \quad (b)$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \dots \quad (c)$$

وإذا عوضنا $x = 0$ في (a) نجد $c_0 = 2$. وإذا عوضنا $x = 0$ في (b) نجد $c_1 = 1$.
وبما أن $y'' = -2y'$ فإن :

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \dots = -2c_1 - 4c_2x - 6c_3x^2 - 8c_4x^3 - \dots$$

ومنها ينتج أن $c_2 = -c_1 = -1$, $c_3 = -\frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3}$, $c_4 = -\frac{1}{2}c_3 = -\frac{1}{3}$, ...
وعلى هذا فالمتسلسلة المطلوبة هي :

$$y = 2 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \dots$$

٤ - بفرض أن (i) $f(x)$ موجودة مع مشتقاتها من جميع الرتب عند $x = a$ وأن (ii) $f(x)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى في $(x - a)$ فبين أن هذه المتسلسلة هي :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

لنفرض أن المتسلسلة هي :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (a)$$

وبالاشتقاق المتتالي نجد :

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} + \dots \quad (\text{ب}) \\ f''(x) &= 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \dots + (n+1)nc_{n+1}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (\text{ج}) \\ f'''(x) &= 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + \dots + (n+2)(n+1)nc_{n+2}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (\text{د}) \end{aligned}$$

.....
.....

لنضع $x = a$ في (أ) ، (ب) ، (ج) . . . فنجد :

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(a), \quad \dots, \quad c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a), \quad \dots$$

وبالعودة إلى (أ) والتمويض بهذه النتائج نجد متسلسلة تايلور المطلوبة .

أوجد مفكوك الدالة المعطاة في كل من المسائل من ٥ إلى ١٠ في متسلسلة قوى في x أو في $x-a$ حسبما يطلب .
وذلك تحت الشروط الواردة في هذا الباب وعين فترة تقارب المتسلسلة .

٥ - e^{-2x} في متسلسلة قوى في x .

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-2x} & f(0) = 1 \\ f'(x) = -2e^{-2x} & f'(0) = -2 \\ f''(x) = 2^2 e^{-2x} & f''(0) = 2^2 \\ f'''(x) = -2^3 e^{-2x} & f'''(0) = -2^3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \quad \text{إن}$$

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{3!} x^3 + \frac{2^4}{4!} x^4 - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n + \dots \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \quad \text{ربما أن}$$

إذن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

٦ - $\sin x$ في متسلسلة قوى في x .

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \quad \text{إن}$$

ومنه نجد أن قيم المشتقات عند $x = 0$ هي $0, 1, 0, -1, \dots$ إلخ وبالتالي :

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + 1x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 \quad \text{ربما أن}$$

إذن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

٦. $\ln(1+x)$ في متسلسلة قوى في x .

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} & f'''(0) &= 2! \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) &= -3! \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

إن

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + 2! \frac{x^3}{3!} - 3! \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ومنه

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \dots$$

واستنادا إلى المسألة ١ من الفصل ١٥ نرى أن فترة تقارب المتسلسلة هي $-1 < x \leq 1$

٨. $\arctan x$ في متسلسلة قوى في x

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -2 + 12x^2 - 30x^4 + \dots & f'''(0) &= -2! \\ f^{(4)}(x) &= 24x - 120x^3 + \dots & f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(x) &= 24 - 360x^2 + \dots & f^{(5)}(0) &= 4! \\ f^{(6)}(x) &= -720x + \dots & f^{(6)}(0) &= 0 \\ f^{(7)}(x) &= -720 + \dots & f^{(7)}(0) &= -6! \end{aligned}$$

إن

$$\begin{aligned} x &= x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 - \frac{6!}{7!}x^7 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

و فترة التقارب ، استنادا إلى المسألة ٧ من الفصل ١٥ هي $-1 \leq x \leq 1$

٩. $e^{x/2}$ في متسلسلة قوى في $(x-2)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x/2} & f(2) &= e \\ f'(x) &= \frac{1}{2}e^{x/2} & f'(2) &= \frac{1}{2}e \\ f''(x) &= \frac{1}{4}e^{x/2} & f''(2) &= \frac{1}{4}e \end{aligned}$$

إن

$$e^{x/2} = e \left\{ 1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{(x-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^n \cdot 2^{n-1} (n-1)!}{2^n n!} \right| = \frac{1}{2} |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

و المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \ln x & f(2) = \ln 2 \quad \text{في متسلسلة قوى في } (x-2) \\
 f'(x) = x^{-1} & f'(2) = \frac{1}{2} \\
 f''(x) = -x^{-2} & f''(2) = -\frac{1}{4} \\
 f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(2) = \frac{1}{4} \\
 f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & f^{(4)}(2) = -\frac{3}{8} \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

إن

$$\begin{aligned}
 \ln x &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8} \frac{(x-2)^4}{4!} + \dots \\
 &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{2^n n}{(x-2)^n} \right| = \frac{1}{2} |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} |x-2|$$

إذن المتسلسلة متقاربة عندما $|x-2| < 2$ أو $0 < x < 4$.

وإذا عوضنا بـ $x=0$ نجد أن المتسلسلة تساوي $\ln 2$ مطروح منها المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة. أما إذا عوضنا بـ $x=4$ فإننا نجد أن المتسلسلة هي $\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ وهي متقاربة. إذن المتسلسلة متقاربة في الفترة $0 < x \leq 4$.

$$١١ - \text{أوجد مفكوك ماكلورين لـ } \sqrt{1 + \sin x} = \sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x.$$

لنضع $x/2$ بدلا من x في مفكوك $\sin x$ (المسألة ٦) فنحصل على :

$$\sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots$$

اشتق هذا المفكوك ، بعد ذلك ، لنحصل على :

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2}x &= 2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7 \cdot 6!} + \dots \right\} \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7 \cdot 6!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 + \sin x} = \sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \dots, \quad \text{إذن :}$$

لجميع قيم x .

$$١٢ - \text{أوجد مفكوك ماكلورين لـ } e^{\cos x} = e \cdot e^{(\cos x - 1)}$$

باستخدام $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$ و $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ نجد :

$$\begin{aligned}
 e^{\cos x} &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{2x^6}{2! \cdot 4!} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{x^6}{(2!)^3} + \dots \right) + \dots \right\} \\
 &= e \left\{ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720}x^6 + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

١٣ - برهن ، بفرض أن جميع شروط العمليات الضرورية محقة ، إن (أ) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ، (ب)

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2, \quad (د) \quad \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i, \quad (ج) \quad e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha,$$

حيث $i = \sqrt{-1}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots (1)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} \sin x &= (e^{ix} - e^{-ix})/2i & \text{وبالتالي} & & e^{ix} - e^{-ix} &= 2i \sin x; & (ج) \\ \cos x &= (e^{ix} + e^{-ix})/2 & \text{وبالتالي} & & e^{ix} + e^{-ix} &= 2 \cos x; & (د) \end{aligned}$$

مسائل إضافية

١٤- تحقق من أن (١) المتسلسلة (١) والمتسلسلة (ii) من المسألة ٢ متقاربتان عندما $|x| < 1$ ؛ وأن (ب) المتسلسلة (iii) متقاربة عندما $-1 \leq x < 1$ ؛ وأن (ج) المتسلسلة (iv) متقاربة عندما $-1 \leq x \leq 1$

١٥- تحقق من أن (١) المتسلسلة التي نحصل عليها بجمع المتسلسلتين (١) و (ii) من المسألة ٢ متقاربة عندما $|x| < 1$ ؛ وأن (ب) المتسلسلة التي نحصل عليها بجمع المتسلسلتين (iii) و (iv) متقاربة عندما $-1 \leq x < 1$.

١٦- عين متسلسلة القوى $y = \sum c_n x^n$ التي تحقق الشروط (١) $y = 2$ عندما $x = 0$ ، (ii) $y' = 0$ ،

$$y'' - y = 0. \quad (iii) \quad x = 0 \quad \text{عندما} \quad y = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \dots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{ج}$$

١٧- عين متسلسلة القوى $y = \sum c_n x^n$ التي تحقق الشروط (١) $y = 1$ عندما $x = 0$ ، (ii) $y' = 1$ عندما

$$y'' + y = 0. \quad (iii) \quad x = 0 \quad \text{عندما} \quad y = 1 + x - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{5!} - \dots \quad \text{ج}$$

١٨- أوجد المفكوك في متسلسل ماكلورين :

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots, \quad (1) \quad \text{لجميع قيم } x$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \dots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (ب)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (ج)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (د)$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots, \quad (هـ) \quad \text{لجميع قيم } x$$

١٩- أوجد المفكوك في متسلسلة تايلور :

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right], \quad (1) \quad \text{لجميع قيم } x$$

$$\sin x = \sin a + (x-a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \dots, \quad (ب) \quad \text{لجميع قيم } x$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - (x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} + \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \dots \right], \quad (ج) \quad \text{لجميع قيم } x$$

٢٠- اشتق مفكوك $\sin x$ (المسألة ٦) لتحصل على مفكوك $\cos x$. تحقق بعد ذلك من أن حل المسألة ١٧ هو :
 $y = \sin x + \cos x$

٢١- ضع في مفكوك e^{-2x} (المسألة ٥) $\frac{1}{2}x$ بدلا من x لتحصل على مفكوك e^{-x} . وضع في هذه المتسلسلة الأخيرة $-x$ بدلا من x لتحصل على مفكوك e^x . ثم تحقق من أن حل المسألة ١٦ هو $y = e^x + e^{-x}$

٢٢- أوجد مفكوك ماكلورين : $\sin^3 x = (\sin x)^3 = x^3 - \frac{2x^5}{3!} + \frac{32x^7}{3!5!} - \frac{96x^9}{3!7!} + \dots$ ، لجميع قيم x .

٢٣- برهن أن $\int_0^x e^{-y^2} dy = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$ ، لجميع قيم x .

٢٤- أوجد ، بالتقسيم ، مفكوك $\frac{1}{1+x^2}$ ثم احصل على :

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

وقارن بالمسألة ٨ .

٢٥- برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$ ، ثم احصل على :

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

٢٦- اضرب مفكوك المتسلسلات المتتالية لتحصل على :

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \dots \quad (\text{ب}) \quad e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{30} - \frac{x^5}{90} + \dots \quad (\text{أ})$$

٢٧- أكتب $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ تخلص من

الكسور في المساواة الأخيرة ثم ساوى بين معاملات قوى x المتساوية لتحصل على مفكوك $\sec x$.

الفصل الثالث والخمسون

صيغ ماكورين وتايلور مع البواقي

صيغة ماكورين • إذا كانت الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الـ n الأولى متصلة في فترة تحوى $x = 0$ ، فنحن نوجد عدداً x_0 ، x^*_0 بين 0 ، x بحيث يكون :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n, \text{ (شكل لاجرانج)}$$

أو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x-x_0^*)^{n-1}x, \text{ (شكل كوشى)}$$

صيغة تايلور : إذا كانت الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الـ n الأولى متصلة في فترة تحوى $x = a$ فيوجد عندئذ عدداً x_0 ، x^*_0 بين a ، x بحيث يكون :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \text{ (شكل لاجرانج)}$$

أو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x-x_0^*)^{n-1}(x-a), \text{ (شكل كوشى)}$$

إن صيغة ماكورين هي حالة خاصة ($a = 0$) من صيغة تايلور ، وإن صيغة تايلور مع الباقى على شكل لاجرانج هي قانون القيمة المتوسطة الموسع مع تحويل بسيط (أنظر الفصل ٢١) . لاستنتاج الصيغة مع الباقى على شكل كوشى أنظر المسألة ١٠ .

ونلاحظ أن مفكوك الدالة $f(x)$ على شكل متسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور الذي حصلنا عليه في الفصل ٥٢ يمثل دالة القيم x التي فقط تحقق الشرط :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

متسلسلات كمراجع : نذكر فيما يلي بعض المتسلسلات مع الفترات التي تمثل عليها الدوال وذلك للرجوع إليها عند الحاجة .

$$\begin{aligned} e^{ax} &= 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \dots + \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x) \\ \sin ax &= ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(ax)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x) \\ \cos ax &= 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(ax)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x) \\ \ln(a+x) &= \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{na^n} + \dots \quad -a < x \leq a. \\ \arcsin x &= x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)(2n-1)} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x &= \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \dots + \frac{(-1)^n}{(n-1)a^{n-1}}(x-a)^{n-1} + \dots \\ &\quad 0 < x \leq 2a \\ e^x &= e^a \left\{ 1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right\} \quad (\text{لجميع قيم } x) \\ \sin x &= \sin a + (x-a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x) \\ \cos x &= \cos a - (x-a) \sin a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cos a + \frac{(x-a)^3}{3!} \sin a + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x) \end{aligned}$$

مسائل محلولة

١ - أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل e^x بمتسلسلة ماكلورين .
 أن $f^{(n)}(x) = e^x$ والباقي على شكل لايرانج هو $|R_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right| = \frac{|x^n|}{n!} e^{x_0}$ ، حيث x_0 بين 0 و x .
 إن العامل $\frac{x^n}{n!}$ هو الحد العام للمتسلسلة $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ التي نعلم أنها متقاربة لجميع قيم x .

وعلى هذا فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0$ ، أما العامل e^{x_0} فهو محدد لجميع قيم x .

وعلى هذا فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ يساوى حاصل ضرب صفر في عدد محدد وهو يساوى الصفر ، وبالتالي فإن المتسلسلة تمثل e^x لجميع قيم x .

٢ - أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل $\sin x$ بمتسلسلة ماكلورين .

إن $f^{(n)}(x)$ بغض النظر عن الإشارة ، تساوى $\sin x$ أو $\cos x$ ، وعلى هذا فإن $|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{n!} |\sin x_0|$ أو

أو $\frac{|x^n|}{n!} |\cos x_0|$ حيث x_0 بين x ، 0 .

ثم إن $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow +\infty$ استنادا إلى المسألة ١ ، وبما أنه لا يمكن لـ $|\sin x_0|$ أو $|\cos x_0|$ أن يتجاوز الواحد فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ والمتسلسلة تمثل $\sin x$ لجميع قيم x .

٣- أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل $\cos x$ بمتسلسلة تايلور في $(x - a)$.

باستخدام الباقي على شكل لاجرانج نجد أن $|R_n(x)|$ تساوى $\frac{|(x-a)^n|}{n!} |\sin x_0|$ أو $\frac{|(x-a)^n|}{n!} |\cos x_0|$ حيث x_0 بين x ، a .

وبما أن $\frac{|(x-a)^n|}{n!} \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow +\infty$ في حين لا يمكن لـ $|\sin x_0|$ و $|\cos x_0|$ أن تتجاوز الواحد فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ والمتسلسلة تمثل $\cos x$ لجميع قيم x .

٤- أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل $\ln(1+x)$ بمتسلسلة مكلورين .

أن $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ فإذا كانت x_0 و x_0^* بين x ، 0 فإن

(١) الباقي على شكل لاجرانج هو

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1+x_0} \right)^n$$

(ب) الباقي على شكل كوشى هو

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0^*)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x_0^*)^n} x = (-1)^{n-1} \frac{x(x-x_0^*)^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}$$

وعندما $0 < x_0 < x \leq 1$ يكون $0 < x < 1+x_0$ و $\frac{x}{1+x_0} < 1$ ، وباستخدام (١) يكون :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{و} \quad |R_n(x)| = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x_0} \right)^n < \frac{1}{n}$$

وعندما $-1 < x < x_0^* < 0$ فإن $0 < 1+x < 1+x_0^*$ ومنه $\frac{1}{1+x_0^*} < \frac{1}{1+x}$ وباستخدام (ب) نجد

$$|R_n(x)| = \frac{|x-x_0^*|^{n-1}}{(1+x_0^*)^n} |x| = \left| \frac{x_0^*-x}{1+x_0^*} \right|^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x_0^*} = \left(\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*} \right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x_0^*} < \left(\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*} \right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x}$$

وبما أن $|x| > 1$ فإن $x_0^* < x_0^*|x|$ و $x_0^*+|x| < |x|+x_0^*|x|$ ومنه $\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*} < |x|$. وهكذا فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{و} \quad |R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1+x}$$

وبالتالى فإنه يمكن تمثيل $\ln(1+x)$ في متسلسلة مكلورين في الفترة $-1 < x \leq 1$.

٥- لمتسلسلة مكلورين الممثلة لـ e^x برهن أن :

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n!} \text{ عندما } x < 0 \text{ و } R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!} \text{ عندما } x > 0.$$

استنادا إلى المسألة (١) نجد أن $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{x_0}$ حيث x_0 بين 0 ، x وعندما $x < 0$ يكون $e^{x_0} < 1$ ، وبالتالي فإن $|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n!}$ وعندما $x > 0$ يكون $e^{x_0} < e^x$ ومنه $R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!}$.

٦ - متسلسلة مكلورين المثلثة لـ $\ln(1+x)$ برهن أن :

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n} \text{ عندما } 0 < x \leq 1 \text{ و } |R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n(1+x)^n} \text{ عندما } -1 < x < 0$$

استنادا إلى المسألة (١) نجد أن $|R_n(x)| = \frac{1}{n} \left| \frac{x}{1+x_0} \right|^n$ حيث x_0 بين 0 ، x وعندما $0 < x_0 < x \leq 1$ يكون $\frac{1}{1+x_0} < 1$ ومنه $|R_n(x)| < \frac{x^n}{n}$ وعندما $-1 < x < x_0 < 0$ و $1+x_0 > 1+x$

$$\frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x} \text{ إذن } |R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n(1+x)^n}$$

مسائل إضافية

٧ - عين الفترة التي يمكن فيها تمثيل $\cos x$ بمتسلسلة مكلورين

ج : جميع قيم x

٨ - عين الفترة التي يمكن فيها تمثيل (١) e^x و (ب) $\sin x$ بمتسلسلة تايلور في $(x-a)$

ج : جميع قيم x

٩ - بين أنه يمكن تمثيل $\ln x$ بمتسلسلة تايلور في $(x-a)$ في الفترة $0 < x \leq 2a$

$$\text{إرشاد : إن } |R_n(x)| = \left| \frac{(x-a)(x-x_0)^{n-1}}{(x_0)^n} \right| \text{ وعندما } 0 < x < a \text{ و } a < x \leq 2a \text{ يكون } \left| \frac{x-x_0}{x_0} \right| < 1.$$

١٠ - لتكن T معرفة بـ

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + T(b-a)$$

ولنعرف

$$F(x) = -f(b) + f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + T(b-x)$$

اتبع خطوات المسألة ١٥ في الفصل ٢١ لتحصل على صيغة تايلور بباقي على شكل كوشي .

١١ - (١) ضع $x_0^* = a + \theta(x-a)$ حيث $0 < \theta < 1$ في باقي متسلسلة تايلور على شكل كوشي .

لتبرهن أن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} (x-a)^n$$

(ب) برهن أن $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} x^n$ في صيغة مكلورين .

١٢ - برهن أنه يمكن تمثيل $\frac{1}{1-x}$ بمتسلسلة مكلورين في الفترة $-1 \leq x < 1$

إرشاد : استنادا إلى المسألة (١١) (ب) $R_n(x) = \frac{n(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$ حيث $0 < \theta < 1$ وعندما $|x| < 1$

يكون $\frac{1-\theta}{1-\theta x} < 1$ و $1 - \theta x > 1 - |x|$.

١٣ - (١) برهن أن $xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$ لجميع قيم x وأن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = e$. برهن أيضا أن $(x^2+x)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$. (ب) برهن أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 15e$.

الفصل الرابع والخمسون

حسابات عددية باستخدام متسلسلات قوى

جداول اللوغاريتمات . لقد تم حساب الدوال المثلثية وغيرها بالإستعانة بمتسلسلات قوى ، وسنقترح استخدامات أخرى لهذه المتسلسلات في المسائل التالية .

وينبغي بإستمرار أن يكون لدينا تقدير عن مدى صلاحية مجموع الحدود الـ n الأولى من المتسلسلة في تمثيل الدالة المفروضة لقيمة مفروضة للمتغير . وسنذكر لهذا الغرض نظريتين من فصل سابق .

١- إذا كانت الدالة $f(x)$ ممثلة بمتسلسلة متناوبة وكان $x = \xi$ في فترة تقارب المتسلسلة ، فإن الخطأ الذي ينتج من استخدام مجموع قيم الحدود الـ n الأولى كقيمة تقريبية لـ $f(\xi)$ لا يتجاوز القيمة العددية لأول حد مهملة .

٢- أما إذا كانت الدالة $f(x)$ ممثلة بمتسلسلة تايلور وكان $x = \xi$ في فترة تقارب المتسلسلة . فإن الخطأ الذي ينتج من استخدام مجموع قيم الحدود الـ n الأولى كقيمة تقريبية لـ $f(\xi)$ لا يتجاوز القيمة العددية $\frac{M}{n!} |x - a|^n$ ، حيث M أكبر من القيمة العظمى لـ $|f^{(n)}(x)|$ في الفترة من a إلى ξ . أو مساو لها .

ويكون في حالة متسلسلة ماكلاورين $a = 0$.

مسائل محلولة

١- أوجد قيمة $1/e$ خمسة أرقام عشرية صحيحة .

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \\ e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 1 - 1 + 0.500\,000 - 0.166\,667 + 0.041\,667 - 0.008\,333 + 0.001\,389 \\ &\quad - 0.000\,198 + 0.000\,025 - 0.000\,003 + \dots \\ &= 0.367\,88 \end{aligned}$$

٢- أوجد قيمة $\sin 62^\circ$ خمسة أرقام صحيحة .

إن متسلسلة تايلور لـ $\sin u$ في قوى $(x - a)$ هي :

$$\sin x = \sin a + (x - a) \cos a - \frac{(x - a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x - a)^3}{3!} \cos a + \dots$$

فإذا أخذنا $a = 60^\circ$ ، حيث أنها قريبة من 62° ودوالها المثلثية معروفة ، فإننا نجد :

$$x - a = 62^\circ - 60^\circ = 2^\circ = \pi/90 = 0.034907$$

$$\begin{aligned} \sin 62^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(0.034907) - \frac{1}{4}\sqrt{3}(0.034907)^2 - \frac{1}{12}(0.034907)^3 + \dots \\ &= 0.866025 + 0.017454 - 0.000528 - 0.000004 + \dots = 0.88295 \end{aligned}$$

٣- أوجد قيمة $\ln 0.97$ لسبعة أرقام عشرية صحيحة :

$$\ln(a-x) = \ln a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \dots - \frac{x^n}{na^n} - \dots$$

لنأخذ $a = 1$ و $x = 0.03$ فنجد :

$$\ln 0.97 = -0.03 - \frac{1}{2}(0.03)^2 - \frac{1}{3}(0.03)^3 - \frac{1}{4}(0.03)^4 - \frac{1}{5}(0.03)^5 - \dots = -0.0304592$$

٤- كم عدد الحدود التي ينبغي أن نستخدمها من مفكوك $\ln(1+x)$ كي نتأكد من الحصول على $\ln 1.02$ بخطأ لا يتجاوز 0.00000005 ؟

$$\ln 1.02 = 0.02 - \frac{(0.02)^2}{2} + \frac{(0.02)^3}{3} - \frac{(0.02)^4}{4} + \dots \quad \text{إن :}$$

وبما أن هذه المتسلسلة متقاربة فإن الخطأ الناتج عن إهمال جميع الحدود التي تلي الحدود الـ n الأولى لا يتجاوز القيمة العددية لأول حد نهمله . والمسألة هنا إذن تنحصر في إيجاد أول حد تكون قيمته العددية أقل من 0.00000005 ، وهذا الأمر يتم بالتجريب :

$$\frac{(0.02)^4}{4} = 0.00000004 \quad , \quad \frac{(0.02)^3}{3} = 0.0000027$$

ونحصل على الدقة المطلوبة إذا اقتصرنا على الحدود الثلاثة الأولى .

٥- لأية قيمة لـ x يمكن التعمييض عن $\sin x$ بـ x إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟

بما أن $\sin x = x - x^3/3! + \dots$ متسلسلة متناوبة . إذن الخطأ الناتج عن استخدام الحد الأول فقط لا يتجاوز $|x^3|/3!$.

وهنا يجب أن يكون $|x^3|/3! = 0.0005$ ومنه $|x^3| = 0.003$.

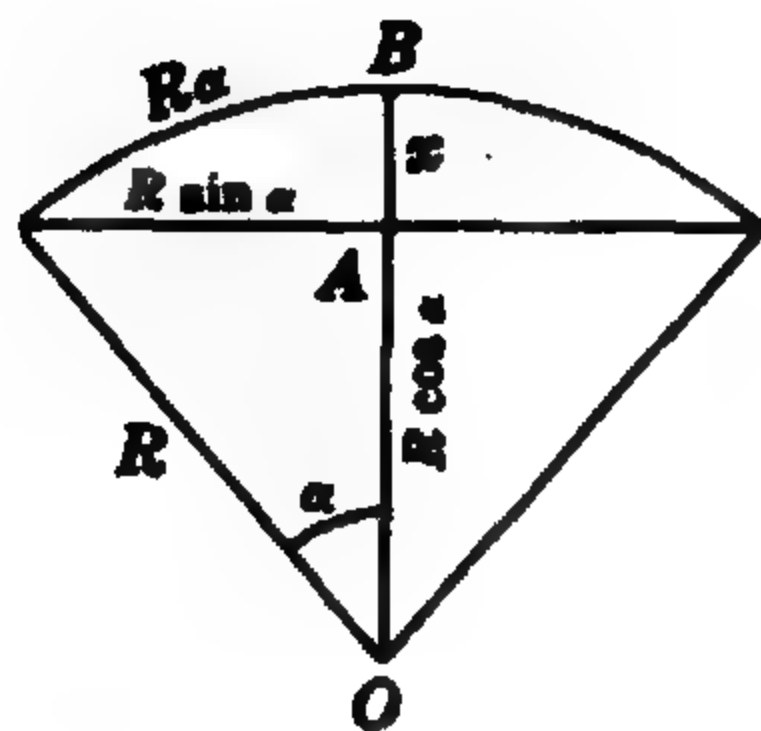
$$\text{أو } |x| = 0.1442 \text{ أى } |x| < 8^\circ 15'$$

٦- ما قيمة الزاوية التي يجب استخدامها لحساب قيمة $\cos x$ من ثلاثة حدود من متسلسلة تايلور في قوى $(x - \pi/3)$ ، بشرط ألا يزيد الخطأ عن 0.00005 ؟

بما أن $f'''(x) = \sin x$, $|R_3| = \frac{|\sin x_0|}{3!} |x - \pi/3|^3$, حيث x_0 بين $\pi/3$ و x .

وبما أن $|\sin x_0| \leq 1$ و $|R_3| \leq \frac{1}{6} |x - \pi/3|^3 = 0.00005$.

فإن $|x - \pi/3| \leq \sqrt[3]{0.0003} = 0.0669 = 3^\circ 50'$. فإن $56^\circ 16'$ و $63^\circ 50'$.



شكل ٥٤ - ١

٧ - احسب بالتقريب أقصى بعد لقوس دائرة عظمى على الكرة الأرضية طوله

160 km عن وتره.

نفرض x البعد المطلوب. فيتضح من الشكل ٥٤ - ١ أن $x = OB - OA = R - R \cos \alpha$.

حيث R نصف قطر الأرض. وبما أن الزاوية α صغيرة فإن $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$

تقريباً، وبالتالي :

$$x = R\{1 - (1 - \frac{1}{2} \alpha^2)\} = \frac{1}{2} R \alpha^2 = (R \alpha)^2 / 2R = (80)^2 / 2R$$

وإذا أخذنا : $R = 6400$ km نجد : $x = 0.5$ km

٨ - استنتج الصيغة التقريبية $\sin(\frac{1}{4}\pi + x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$ ثم استخدمها في حساب $\sin 43^\circ$.

باستخدام الحدين الأولين من مفكوك تايلور نجد :

$$\sin(\frac{1}{4}\pi + x) = \sin \frac{1}{4}\pi + x \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$$

$$\sin 43^\circ = \sin[\frac{1}{4}\pi + (-\pi/90)] = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - 0.0349) = 0.6824$$

٩ - حل المعادلة $\cos x - 2x^2 = 0$

لنستبدل بـ $\cos x$ الحدين الأولين $1 - \frac{1}{2}x^2$ من مفكوك ماكلورين لـ $\cos x$ فيكون :

$$2 - 5x^2 = 0 \quad \text{أو} \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2x^2 = 0$$

والجذران ± 0.632 . $\pm \sqrt{10}/5 = \pm 0.632$. أما إذا استخدمنا طريقة نيوتن فإنها تعطينا الجذران ± 0.635

١٠ - استخدم مفكوك متسلسلات القوى لتحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2x^3/3! + \dots}{x - x^3/3! + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x^2/3 + \dots}{1 - x^2/6 + \dots} = 2$$

١١ - أوجد مفكوك $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ في متسلسلة قوى في $(x - 3)$ ثم احسب $\int_3^{3.3} f(x) dx$.

إن : $f(3) = 5, f'(3) = 9, f''(3) = -4, f'''(3) = 6, f^{(4)}(3) = 24$.

وبالتالي : $f(x) = 5 + 9(x-3) - 2(x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4$
 $\int_3^{3.3} f(x) dx = 5x + \frac{9}{2}(x-3)^2 - \frac{2}{3}(x-3)^3 + \frac{1}{4}(x-3)^4 + \frac{1}{5}(x-3)^5 \Big|_3^{3.3} = 1.185$

١٢ - احسب قيمة $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

إن الصعوبة هنا تكمن في عدم إمكان التعبير عن $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ بدوال ابتدائية . ومع هذا فإن :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \Big|_0^1 = 0.946083$$

والخطأ الناتج عن استخدام الحدود الأربعة الأولى أقل من $\frac{1}{9 \cdot 9!}$ أى أقل من 0.0000003.

مسائل إضافية

١٣ - احسب لأربعة أرقام عشرية : (أ) $e^{-1} = 0.1353$ ، (ب) $\sin 32^\circ = 0.5299$ ،
 (ج) $\cos 36^\circ = 0.8090$ ، (د) $\tan 31^\circ = 0.6009$.

١٤ - إلى أى مدى لـ x يمكن :

(أ) استبدال e^x بـ $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟

(ب) استبدال $\cos x$ بـ $1 - \frac{1}{2}x^2$ إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟

(ج) استبدال $\sin x$ بـ $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ إذا كان الخطأ المسموح به 0.00005 ؟

ج : (أ) $|x| < 0.1$ ، (ب) $|x| < 18.57^\circ$ ، (ج) $|x| < 47^\circ$.

١٥ - استخدم مفكوك متسلسلات القوى لتحسب قيمة :

(أ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2}e$ ، (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{6}$ ، (ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\sinh x - \sin x} = \infty$.

١٦ - احسب القيم

(أ) $\int_0^{\pi/2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi = 1.854$ ، (ب) $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = 0.76355$ ، (ج) $\int_0^{0.1} \frac{dx}{1+x^2} = 0.4940$.

١٧ - أوجد طول المنحنى $y = x^3/3$ من $x = 0$ إلى $x = 0.5$ ج : 0.5031

١٨ - أوجد المساحة الواقعة تحت المنحنى $y = \sin x^2$ من $x = 0$ إلى $x = 1$ ج : 0.3103

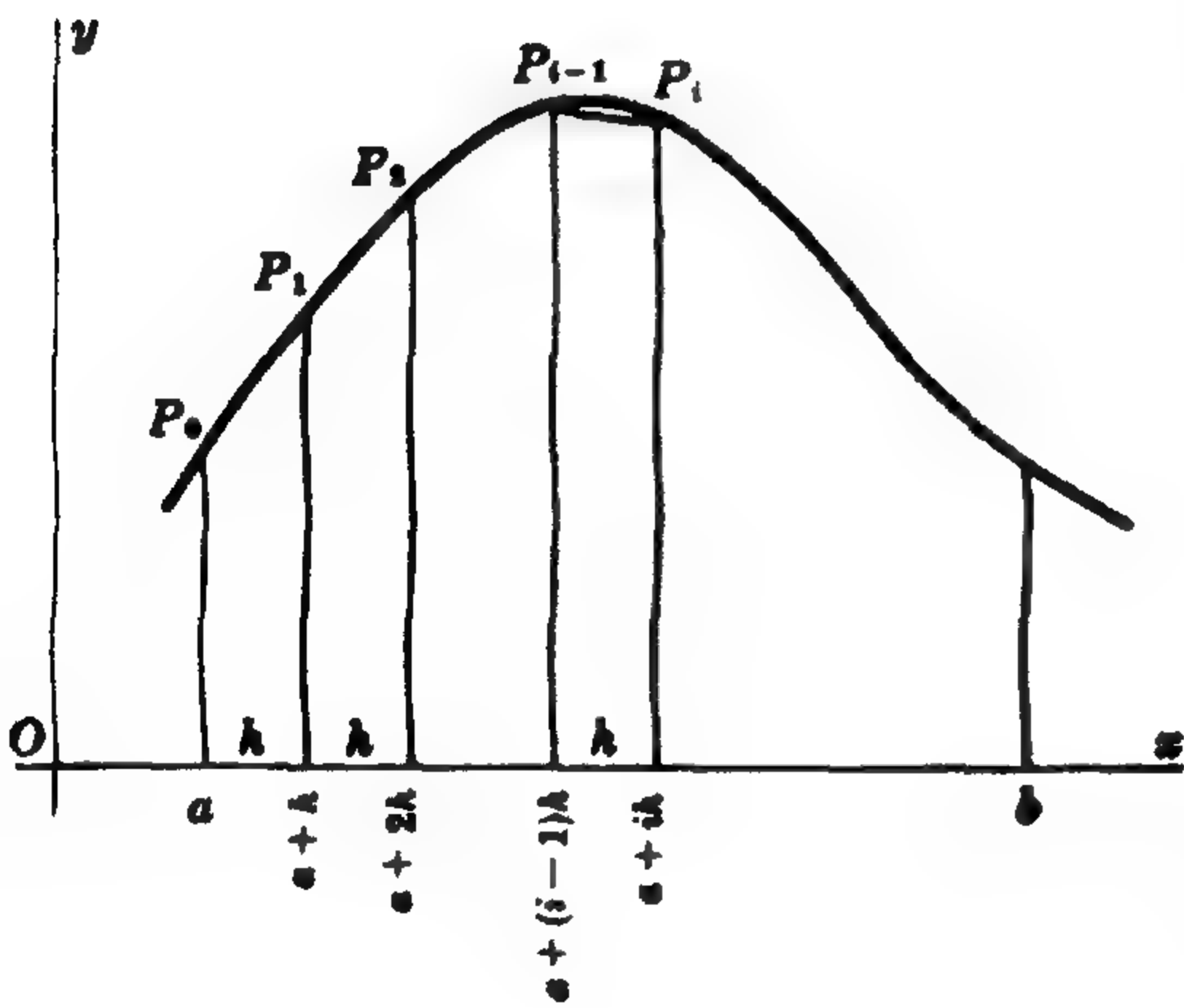
الفصل الخامس والخمسون

القيمة التقريبية للتكامل

يمكن الحصول على القيمة التقريبية لـ $\int_a^b f(x) dx$ باستخدام صيغ معينة أوبالتكاملات الميكانيكية . وتبرز ضرورة حساب قيمة التكامل التقريبية عندما يكون من الصعب إجراء التكامل بالطرق العادية ، أو عندما يتعذر التعبير عن التكامل غير المحدد بدوال ابتدائية أو عندما تعرف دالة التكامل بمجدول لقيم عددية .

ولقد حصلنا في الفصل ٣٤ على تقريب لـ $\int_a^b f(x) dx$ بالمجموع $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$ والحصول على S_n فسرنا التكامل المحدود على أنه مساحة سطح وقسمنا هذا السطح إلى n شريحة وقربنا كل شريحة بمستطيل ثم جمعنا مساحات المستطيلات المقربة . وفيما يلي سنذكر بعض الصيغ التي لا تختلف عن بعضها إلا بطريقة تقريب مساحات الشرائح .

قاعدة شبه المنحرف . لتكن المساحة محددة من أعلى بالمنحنى $y = f(x)$ ومن أسفل بالمحور x ، ومن الجانبين بالمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ ولنقسم هذه المساحة إلى n شريحة عرض كل منها $h = (b - a) / n$ كما هو موضح في الشكل ١ - ٥٥ . لنظر في الشريحة الـ i المحددة من أعلى بالقوس $P_{i-1} P_i$ من المنحنى $y = f(x)$ ، وكتقريب لمساحة هذه الشريحة نأخذ .



شكل ١ - ٥٥

$$\frac{h}{2} \{f[a + (i-1)h] + f(a + ih)\}$$

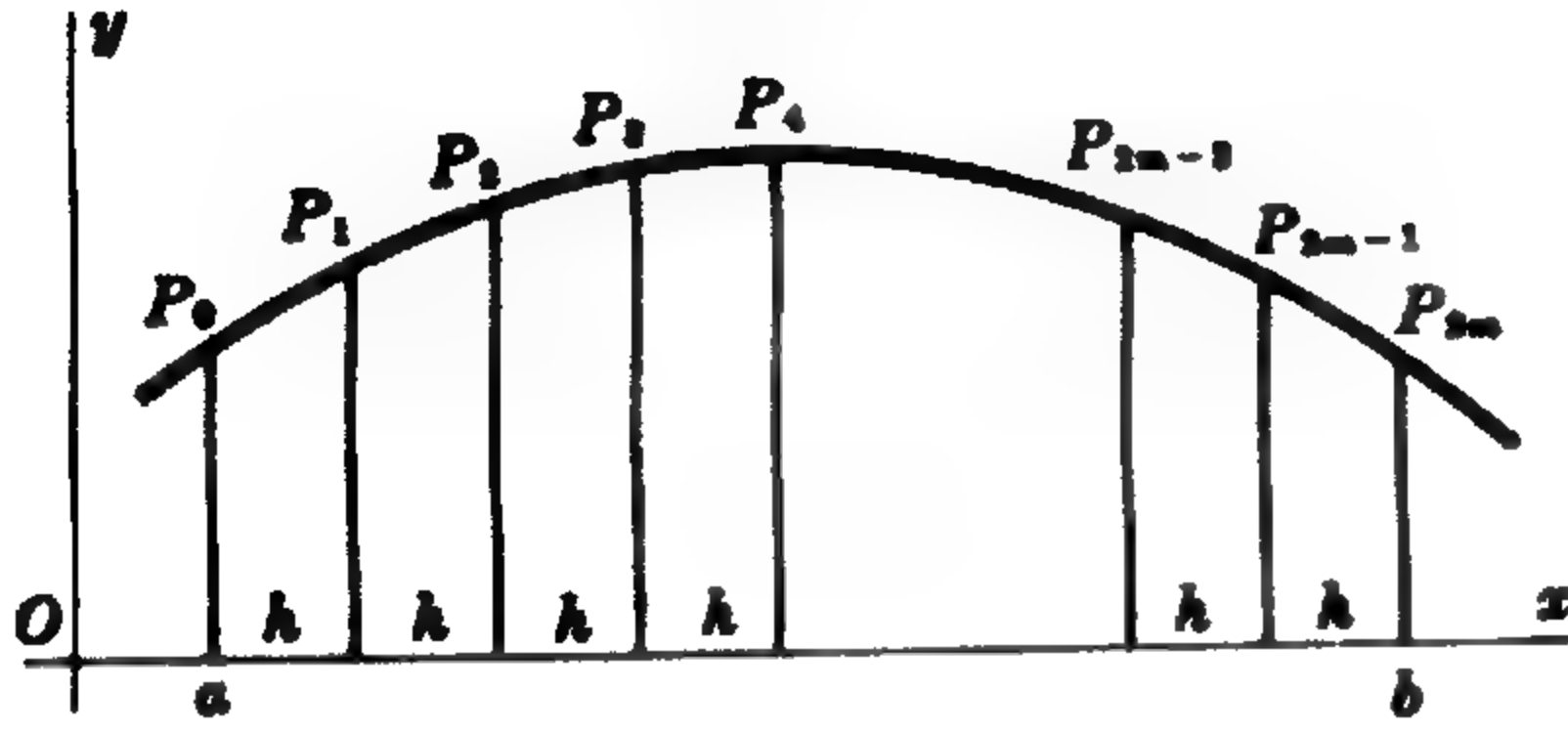
ومساحة شبه المنحرف نحصل عليها باعتبار الخط المستقيم $P_{i-1} P_i$ بدلا من القوس $P_{i-1} P_i$. وإذا قربنا كل شريحة بنفس الطريقة فإننا نجد (حيث يقرأ الرمز \approx يساوي تقريبا) .

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{2} \{f(a) + f(a+h)\} + \frac{h}{2} \{f(a+h) + f(a+2h)\} + \dots + \frac{h}{2} \{f[a + (n-1)h] + f(b)\}$$

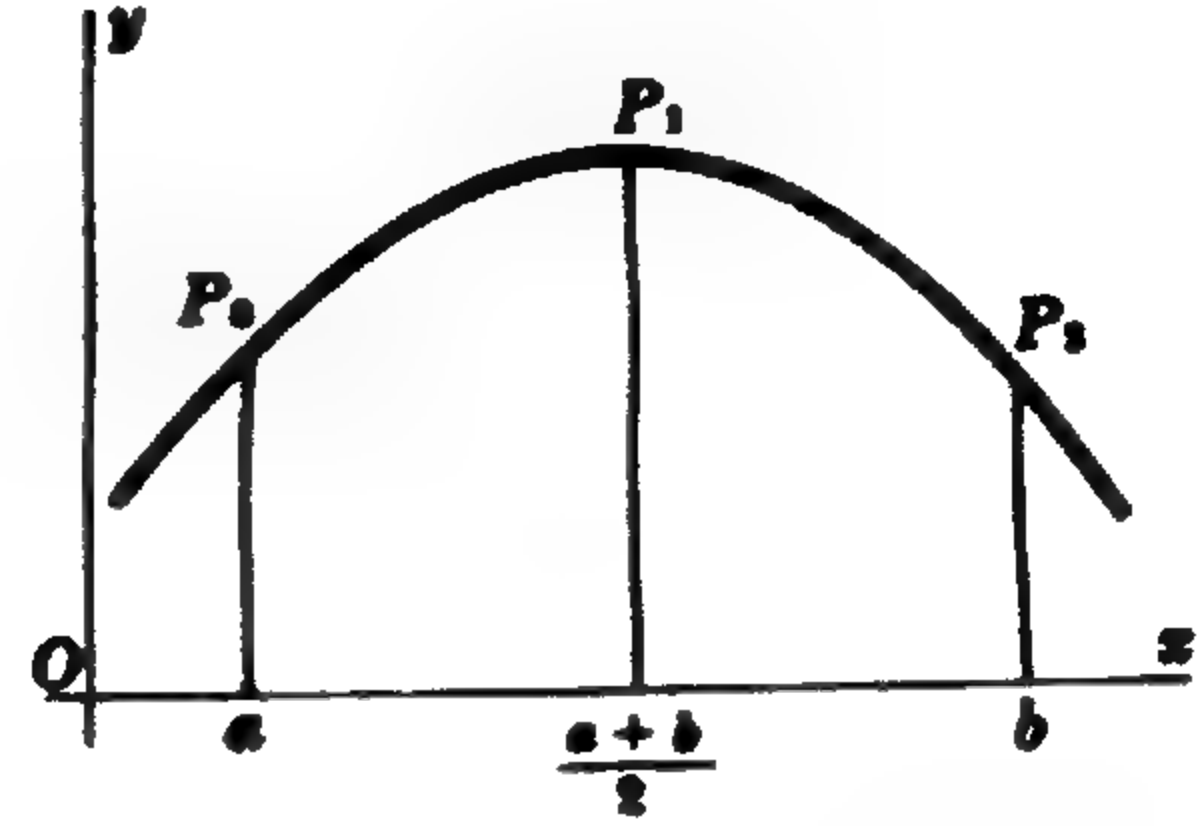
$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{2} \{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f[a + (n-1)h] + f(b)\} \quad (1) \text{ أو}$$

قاعدة شبه المنشور . إذا فصلت المساحة المعرفه بـ $\int_a^b f(x)dx$ إلى شريحتين عموديتين عرض كل منهما $h = 1/2(b-a)$. وإذا استبدلنا القوس $P_0 P_1 P_2$ لمنحنى $y = f(x)$ بقوس القطع المكافئ $y = Ax^2 + Bx + C$ الذى يمر بالنقط P_0, P_1, P_2 كما فى الشكل ٢ - ٥٥ . فإننا نحصل بعد إجراء بعض التغيرات فى رموز نتيجة المسألة (١) على :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} \quad (٢)$$



شكل ٣ - ٥٥



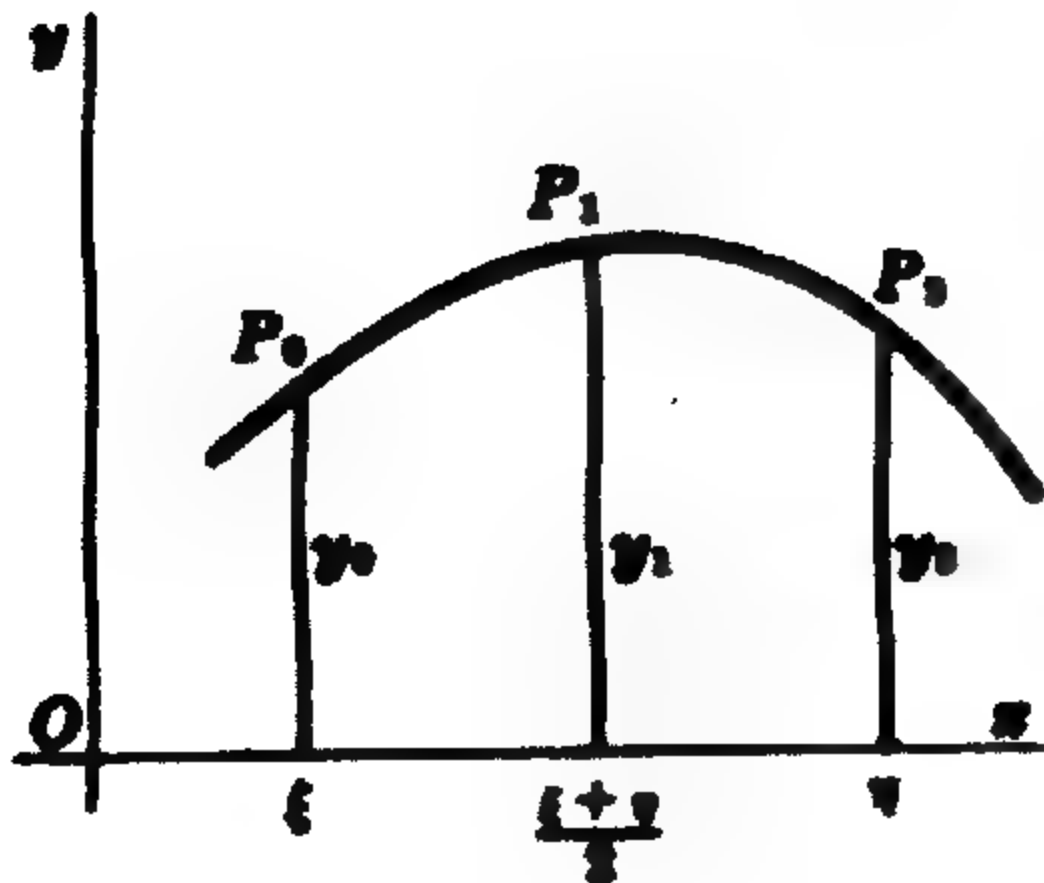
شكل ٢ - ٥٥

قاعدة سمبسون . لنفرض أن السطح المراد حساب مساحته قد قسم إلى $n = 2m$ شريحة عرض كل منها $h = (b-a)/n$ كما هو مبين بالشكل ٣ - ٥٥ . وباستخدام قاعدة شبه المنشور لتقريب المساحة الواقعة تحت كل قوس من الأقواس : $P_0 P_1 P_2, P_2 P_3 P_4, \dots, P_{2m-2} P_{2m-1} P_{2m}$ نجد :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \{ f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + 2f[a+(2m-2)h] + 4f[a+(2m-1)h] + f(b) \} \quad (٣)$$

طريقة مفكوك متسلسلات القوى . وتتلخص هذه الطريقة فى أن نستبدل بدالة التكامل $f(x)$ الحدود الـ n الأول من متسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور الموافقة لها . وتكون هذه الطريقة ناجحة إذا أمكن فك دالة التكامل وكان حدا التكامل ضمن فترة تقارب المتسلسلة (أنظر الفصل ٥٤) .

مسائل محلولة



شكل ٤ - ٥٥

١ - للقطع المكافئ $y = Ax^2 + Bx + C$ الذى يمر بالنقط :

$P_0(\xi, y_0), P_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, y_1\right), P_2(\eta, y_2)$, كما هو مبين فى

الشكل ٤ - ٥٥ برهن أن :

$$\int_{\xi}^{\eta} y dx = \frac{\eta-\xi}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$\int_{\xi}^{\eta} y dx = \int_{\xi}^{\eta} (Ax^2 + Bx + C) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{\eta-\xi}{3} [A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \frac{3}{2}B(\xi + \eta) + 3C].$$

ولكن بما أن $y = Ax^2 + Bx + c$ يمر بالنقط P_0, P_1, P_2 فإنه يكون :

$$y_0 = A\xi^2 + B\xi + C$$

$$y_1 = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2 + B\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + C$$

$$y_2 = A\eta^2 + B\eta + C$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \frac{3}{2}B(\xi + \eta) + 3C] \quad \text{و}$$

$$\int_{\xi}^{\eta} y dx = \frac{\eta - \xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{إذن :}$$

٢- احسب القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$ بكل من الطرق الأربع ثم تحقق من الأجوبة بالتكامل .

قاعدة شبه المنحرف : بأخذ $n = 5$

فإن : $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{5} = 0.1$ ، ومنه $a = 0, a + h = 0.1, a + 2h = 0.2, a + 3h = 0.3, a + 4h = 0.4, b = 0.5$.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{0.1}{2} [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + 2f(0.4) + f(0.5)] \\ &\approx \frac{1}{20} \left(1 + \frac{2}{1.01} + \frac{2}{1.04} + \frac{2}{1.09} + \frac{2}{1.16} + \frac{1}{1.25} \right) = 0.4631 \end{aligned}$$

قاعدة شبه المنحرف :

إن : $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{2} = \frac{1}{4}$ ، ومنه $f(a) = f(0) = 1, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17}, f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{12} (1 + 3.76471 + 0.8) = 0.4637$$

قاعدة سمبسون : بأخذ $n = 4$

فإن : $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4} = \frac{1}{8}$ ، ومنه $a = 0, a + h = \frac{1}{8}, a + 2h = \frac{1}{4}, a + 3h = \frac{3}{8}, b = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{24} \left(1 + 4 \frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2 \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4 \frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{24} \left(1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{5} \right) = 0.4637 \end{aligned}$$

طريقة متسلسلات القوى : باستخدام سبعة حدود

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\approx \int_0^{1/2} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12}) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} \right]_0^{1/2} \\ &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{13}} \end{aligned}$$

نجد أن :

$$\approx 0.50000 - 0.04167 + 0.00625 - 0.00112 + 0.00022 - 0.00004 + 0.00001 = 0.4636$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{1/2} = \arctan \frac{1}{2} = 0.4636 \quad \text{وبالتكامل}$$

٣ - احسب مساحة السطح الواقعة تحت المنحنى $y = e^{-x^2}$ وفوق المحور x وبين المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$ مستخدماً :

(أ) قاعدة سمبسون وأخذ $n = 4$ ؛ (ب) طريقة متسلسلات القوى .

(أ) أن $h = \frac{1}{4}$; $a = 0$, $a + h = \frac{1}{4}$, $a + 2h = \frac{1}{2}$, $a + 3h = \frac{3}{4}$, $b = 1$.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} (1 + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1})$$

$$\approx \frac{1}{12} \{1 + 4(0.9399) + 2(0.7788) + 4(0.5701) + 0.3679\} = 0.747 \text{ square units}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right) dx \quad (\text{ب})$$

$$\approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right]_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!}$$

$$\approx 1 - 0.3333 + 0.1 - 0.0238 + 0.0046 - 0.0008 + 0.0001 = 0.747 \text{ square units}$$

٤ - تقع قطعة أرض بين نهر من جهة وسياج (حاجز) مستقيم من جهة أخرى . فإذا فرضنا أن عرض قطعة الأرض m على بعد x من أحد طرفي السياج يعطى بالجدول التالي :

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

أوجد القيمة التقريبية لمساحة قطعة الأرض باستخدام قاعدة سمبسون .

$$\int_0^{120} f(x) dx \approx \frac{20}{3} (0 + 4 \cdot 22 + 2 \cdot 41 + 4 \cdot 53 + 2 \cdot 38 + 4 \cdot 17 + 0) \text{ و } h = 20$$

$$\approx 3507 \text{ m}^2$$

٥ - يعطى منحنى بالأزواج التالية من الإحداثيات القائمة .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.6	0.9	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2

(أ) احسب القيمة التقريبية لمساحة السطح الواقع تحت المنحنى وفوق المحور x وبين المستقيمين $x = 1$ و $x = 9$ مستخدماً قاعدة سمبسون .

(ب) احسب القيمة التقريبية للحجم الناشئ عن دوران السطح السابق حول المحور x باستخدام قاعدة سمبسون .

(أ) هنا $h = 1$ و

$$\int_1^9 y dx \approx \frac{1}{3} \{0 + 4(0.6) + 2(0.9) + 4(1.2) + 2(1.4) + 4(1.5) + 2(1.7) + 4(1.8) + 2\}$$

$$\approx 10.13 \text{ square units}$$

$$\pi \int_1^9 y^2 dx \approx \frac{\pi}{3} \{0 + 4(0.6)^2 + 2(0.9)^2 + 4(1.2)^2 + 2(1.4)^2 + 4(1.5)^2 + 2(1.7)^2 + 4(1.8)^2 + 4\} \quad (\text{ب})$$

$$\approx 46.58 \text{ cubic units}$$

مسائل إضافية

٦ — استنتج قاعدة سمبسون

٧ — احسب القيمة التقريبية لـ $\int_2^{16} \frac{dx}{x}$ مستخدماً (أ) قاعدة شبه المنحرف حيث $n = 4$ (ب) قاعدة المنشور .
(ج) قاعدة سمبسون حيث $n = 4$. تحقق من النتائج عن طريق التكامل .

ج : (أ) 1.117, (ب) 1.111, (ج) 1.099; 1.100

٨ — احسب القيمة التقريبية لـ $\int_1^3 \sqrt{35+x} dx$ كافي المسألة ٧ .

ج : (أ) 24.654, (ب) 24.655, (ج) 24.655; 24.655

٩ — احسب القيمة التقريبية لـ $\int_1^3 \ln x dx$ مستخدماً (أ) قاعدة شبه المنحرف حيث $n = 5$ و (ب) قاعدة سمبسون حيث $n = 8$ ، تحقق من النتائج عن طريق التكامل .

ج : (أ) 1.2870, (ب) 1.2958; 1.2958

١٠ — احسب القيمة التقريبية لـ $\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$ مستخدماً (أ) قاعدة شبه المنحرف حيث $n = 5$ و (ب) قاعدة سمبسون حيث $n = 4$.

ج : (أ) 1.115, (ب) 1.111

١١ — احسب القيمة التقريبية لـ $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ باستخدام قاعدة سمبسون حيث $n = 6$.
ج : 1.852

١٢ — استخدم قاعدة سمبسون لحساب (أ) مساحة السطح الواقع تحت المنحنى .

(ب) الحجم الناشئ عن دوران السطح حول المحور مستخدماً البيانات الآتية :

x	1	2	3	4	5
y	1.8	4.2	7.8	9.2	12.3

ج : (أ) 27.8, (ب) 228.44π

الفصل السادس والخمسون

المشتقات الجزئية

الدوال متعددة المتغيرات : إذا ألحقنا بكل نقطة (x, y) من جزء (منطقة) من المستوى xy عدداً حقيقياً z ، فإننا نقول عن z إنها دالة $z = f(x, y)$ للمتغيرين المستقلين x, y ، والمحل الهندسي لجميع النقاط (x, y, z) التي تحقق العلاقة $z = f(x, y)$ هو سطح في الفراغ العادي . ويمكن بشكل مماثل تعريف دوال $w = f(x, y, z, \dots)$ بعدة متغيرات وإن لم تكن هناك صورة هندسية متوفرة .

وفيما يتعلق بحساب التفاضل والتكامل فإن هناك عدة فروق بين حالة متغير واحد وحالة متغيرين ، في الوقت الذي لا يختلف فيه حساب التفاضل والتكامل للدوال في ثلاثة متغيرات أو أكثر عن الدوال لمتغيرين إلا بقدر يسير . ولذا فإننا سنقصر الدراسة هنا ، بشكل رئيسي على الدوال في متغيرين اثنين .

نقول عن دالة $f(x, y)$ إنها ذات نهاية A عندما $x \rightarrow x_0$ و $y \rightarrow y_0$ إذا وجد لكل عدد موجب مفروض ϵ ، مهما كان صغيراً ، عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق لجميع قيم (x, y) الشرط :

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad (i)$$

إذن $|f(x, y) - A| < \epsilon$. تعرف (i) هنا جواراً محفولاً لـ (x_0, y_0) . أي أنها جميع النقاط الواقعة داخل دائرة نصف قطرها δ ومركزها (x_0, y_0) باستثناء المركز نفسه .

نقول عن دالة $f(x, y)$ إنها متصلة عند (x_0, y_0) إذا كانت الدالة $f(x_0, y_0)$ معرفة وكان $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

أنظر المسألتين ١ - ٢

المشتقات الجزئية : لتكن $z = f(x, y)$ دالة في المتغيرين المستقلين x, y . وبما أن x و y مستقلان فإنه يمكننا أن (i) نسمح لـ x أن تتغير ونترك y ثابتة أو أن (ii) نسمح لـ y أن تتغير ونترك x ثابتة أو أن (iii) نسمح لـ x و y أن تتغيرا في آن واحد . وفي كل من الحالتين الأولى والثانية تكون z في الواقع دالة لمتغير واحد ويمكن اشتقاقها استناداً إلى القواعد المعتادة .

وإذا تغير x مع بقاء y ثابتة فعندئذ تكون z دالة في x ومشتقتها بالنسبة لـ x هي :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وتسمى المشتقة الجزئية (الأولى) لـ $z = f(x, y)$ بالنسبة لـ x .

أما إذا تغيرت y مع بقاء x ثابتة فإن z دالة في y . ومشتقتها بالنسبة لـ y هي :

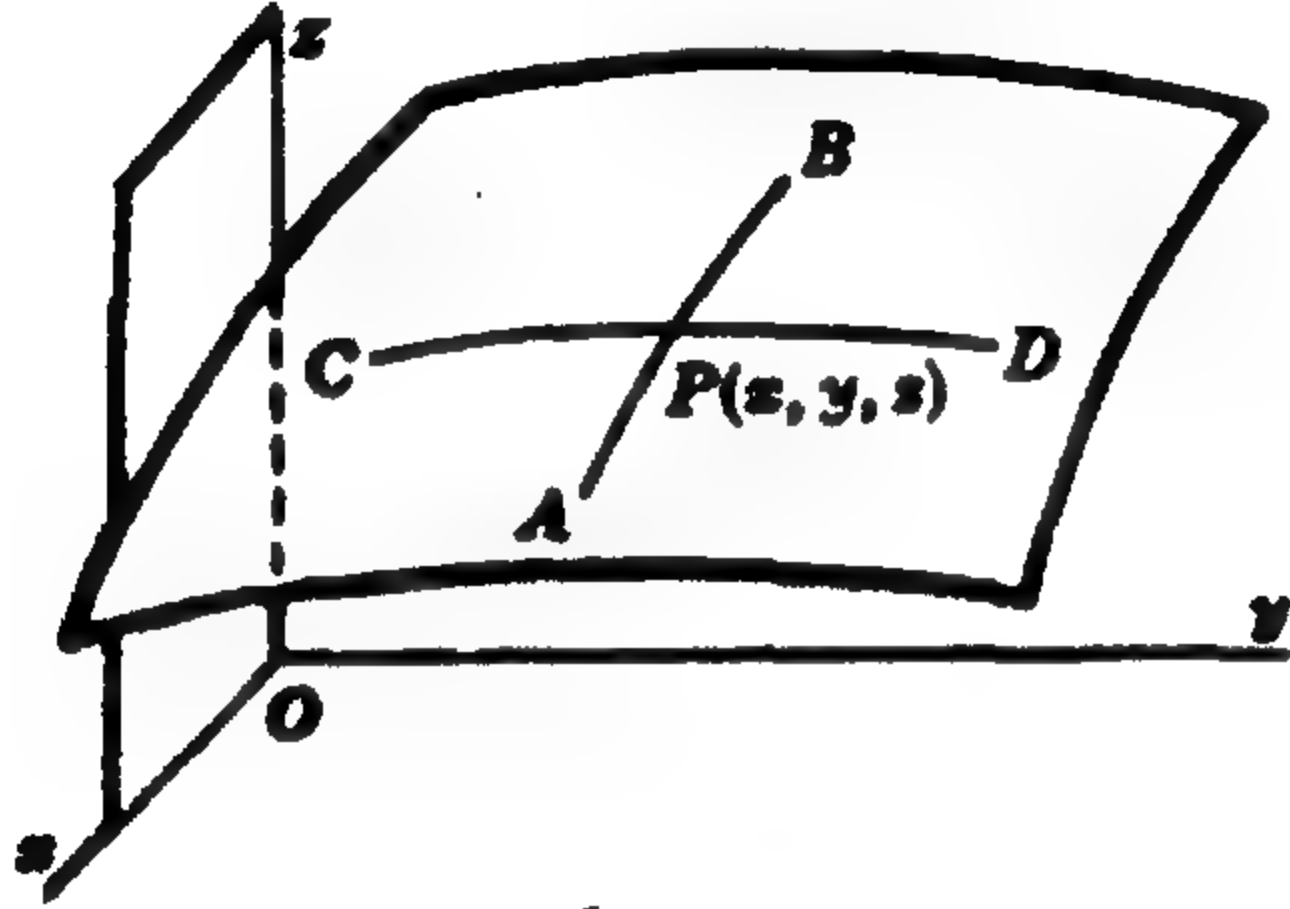
$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وتسمى المشتقة الجزئية (الأولى) لـ $z = f(x, y)$ بالنسبة لـ y

أنظر المائل ٢ - ٨

وإذا كانت z معرفة بشكل ضمني (غير ظاهر) كدالة في x و y ، بالعلاقة $F(x, y, z) = 0$ فإنه يمكن إيجاد المشتقتين الجزئيتين $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ باستخدام قاعدة الاشتقاق الضمني التي مرت في الفصل السادس .

أنظر المائل ٩ - ١٢



والمشتقة الجزئية التي عرفناها توضيح هنسي بسيط . باعتبار السطح $z = f(x, y)$ المبين بالشكل ٥٦ - ١ وبفرض APB و CPD مقطعي السطح بالمستويين المارين بـ P والموازيين لـ yOz و xOz على الترتيب . فإذا جعلنا x تتغير وتركنا y ثابتة فإن P تتحرك على المنحنى APB وتكون قيمة $\frac{\partial z}{\partial x}$ عند P ميل المنحنى APB عند P .

شكل ٥٦ - ١

وبشكل مماثل إذا جعلنا y تتغير وتركنا x ثابتة فإن P تتحرك على المنحنى CPD وتكون قيمة $\frac{\partial z}{\partial y}$ عند P ميل المنحنى CPD عند P .

أنظر المسألة ١٣

التفاضلات الجزئية ذات الرتب العليا . يمكن أيضاً اشتقاق $\frac{\partial z}{\partial x}$ المشتقة الجزئية لـ $z = f(x, y)$ جزئياً بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y فنحصل على المشتقات الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ ويمكن ، بشكل مماثل ، الحصول من $\frac{\partial z}{\partial y}$ على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

إذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ ومشتقاتها الجزئية متصلة فإن ترتيب عملية الاشتقاق ليس بنى بال ، لى أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

أنظر المسألتين ١٤ - ١٥

مسائل محلولة

١ - ناقش اتصال $z = x^2 + y^2$.

لأى فئة محددة القيمة $(x, y) = (a, b)$ يكون $z = a^2 + b^2$.

وعندما $x \rightarrow a$ و $y \rightarrow b$ فإن $x^2 + y^2 \rightarrow a^2 + b^2$.

والدالة متصلة في كل موضع.

٢ - إن الدالتين التاليتين متصلتان في كل موضع باستثناء نقطة الأصل $(0, 0)$. حيث أنهما غير معرفتين هناك. فهل يمكن جعلهما متصلتين هناك.

$$z = \frac{\sin(x+y)}{x+y}. \quad (1)$$

لنجعل $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ على المستقيم $y = mx$ فنجد $z = \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \frac{\sin(1+m)x}{(1+m)x} \rightarrow 1$. لذا يمكن جعل الدالة متصلة في كل موضع إذا عدلنا تعريفها على النحو التالي. $z = 1, (x, y) = (0, 0); z = \frac{\sin(x+y)}{x+y}, (x, y) \neq (0, 0)$.

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \quad (ب)$$

لنجعل $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ على المستقيم $y = mx$ فنجد أن $z = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{m}{1+m^2}$ تعتمد على المستقيم الذي نختاره ولذا لا يمكن جعل الدالة المفروضة متصلة عند $(0, 0)$.

أوجد في كل من المسائل ٣ - ٧ المشتقة الجزئية الأولى :

$$z = 2x^2 - 3xy + 4y^3. \quad - ٣$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y. \quad \text{لنعتبر } y \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } x \text{ فنجد :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y. \quad \text{لنعتبر } x \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } y \text{ فنجد :}$$

$$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}. \quad - ٤$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}. \quad \text{لنعتبر } y \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } x \text{ فنجد :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}. \quad \text{لنعتبر } x \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } y \text{ فنجد :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos(2x + 3y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cos(2x + 3y) \quad z = \sin(2x + 3y). \quad - ٥$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^4y^3} + \frac{y^3}{1+x^3y^4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{1+x^4y^3} + \frac{2xy}{1+x^3y^4} \quad z = \arctan x^2y + \arctan xy^2. \quad - ٦$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+xy}(2x+y) = z(2x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+xy}(x) = xz \quad z = e^{x^2+xy}. \quad - ٧$$

٨ - تعطى مساحة مثلث بـ $K = \frac{1}{2}ab \sin C$. فإذا كان $a = 20, b = 30, C = 30^\circ$ فأوجد :

(أ) معدل تغير K بالنسبة إلى a باعتبار b و C ثابتين .

(ب) معدل تغير K بالنسبة إلى C باعتبار a و b ثابتين .

(ج) معدل تغير b بالنسبة إلى a باعتبار K و C ثابتين .

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b \sin C = \frac{1}{2}(30)(\sin 30^\circ) = \frac{15}{2} \quad (أ)$$

$$\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab \cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30^\circ) = 150\sqrt{3} \quad (ب)$$

$$b = \frac{2K}{a \sin C}; \quad \frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{2K}{a^2 \sin C} = -\frac{2(\frac{1}{2}ab \sin C)}{a^2 \sin C} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad (ج)$$

أوجد في المسائل ٩ - ١١ المشتقة الجزئية الأولى z بالنسبة إلى كل من المتغيرين المستقلين

x و y .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25. \quad - ٩$$

حل أول : لنحل المعادلة بالنسبة لـ z فنجد $z = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}$. إذن :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}$$

حل ثان : لنشتق ضمناً بالنسبة لـ x معتبرين y ثابتاً فنجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{ومنه} \quad 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ثم نشتق ضمناً بالنسبة لـ y معتبرين x ثابتاً فنجد :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \quad \text{ومنه} \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz. \quad - ١٠$$

إن طريقة الحل الأولى في المسألة ٩ غير مناسبة هنا :

لذلك نشتق ضمناً بالنسبة إلى x فنجد :

$$2x(2y + 3z) + 3x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2x(x - 2y) \frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy} \quad \text{ومنه}$$

ثم نشتق ضمناً بالنسبة إلى y فنجد :

$$2x^2 + 3x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x - 4z) - 4y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2x(x - 2y) \frac{\partial z}{\partial y} - 2x^2 = xz + xy \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2x^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy} \quad \text{ومنه}$$

$$xy + yz + zx = 1. \quad - ١١$$

نشتق ضمناً بالنسبة إلى x فنجد $y + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$ ومنه $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$.

ثم نشتق ضمناً بالنسبة إلى y فنجد $z + y \frac{\partial z}{\partial y} + x + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ومنه $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$.

١٢ - إذا كان $x = e^{2r} \cos \theta, y = e^{3r} \sin \theta$ أوجد باعتبار x و y متغيرين مستقلين كلا من $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$

لنشتق العلاقتين جزئياً بالنسبة إلى x فنجد :

$$0 = 3e^{3r} \sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + e^{2r} \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \quad 1 = 2e^{2r} \cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} - e^{3r} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نجد $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos \theta}{e^{2r}(2 + \sin^2 \theta)}$ ، $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{3 \sin \theta}{e^{3r}(2 + \sin^2 \theta)}$ ،

ثم نشتق العلاقتين المفروضتين ضمناً بالنسبة إلى y فنجد :

$$1 = 3e^{3r} \sin \theta \frac{\partial r}{\partial y} + e^{2r} \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad , \quad 0 = 2e^{2r} \cos \theta \frac{\partial r}{\partial y} - e^{3r} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نحصل على $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\sin \theta}{e^{3r}(2 + \sin^2 \theta)}$ ، $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2 \cos \theta}{e^{2r}(2 + \sin^2 \theta)}$.

١٣ - أوجد ميل كل من المنحنيين اللذين نحصل عليهما من تقاطع السطح $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ مع المستويين المارين بالنقطة $(1, 1, 1)$ والموازيين للمستويين xOz و yOz .

إن المستوى $x=1$ الموازي للمستوى yOz يقطع السطح في المنحنى $z = 4y^2 - 3, x=1$ ، وعلى هذا فإن $\frac{\partial z}{\partial y} = 8y = 8 \cdot 1 = 8$ هو الميل المطلوب .

إن المستوى $y=1$ الموازي للمستوى xOz يقطع السطح في المنحنى $z = 3x^2 - 2, y=1$ ، وعلى هذا فإن $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x = 6$ هو الميل المطلوب الآخر .

أوجد في كل من المسألتين ١٤ - ١٥ جميع المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لـ z .

$$z = x^2 + 3xy + y^2. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 3 \quad - ١٤$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2$$

$$z = x \cos y - y \cos x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y \sin x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin y - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = y \cos x \quad - ١٥$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\sin y + \sin x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = -x \cos y$$

مسائل إضافية

١٦ — ادرس كلا من الدوال التالية لتبين فيما إذا كان من الممكن جعلها متصلة عند $(0,0)$.

$$(1) \quad \frac{y^2}{x^2+y^2}, (ب) \quad \frac{x-y}{x+y}, (ج) \quad \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, (د) \quad \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

ج : (١) لا ، (ب) لا ، (ج) نعم ، (د) لا .

١٧ — أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad z &= x^2 + 3xy + y^2 & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y \\ (ب) \quad z &= \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2} \\ (ج) \quad z &= \sin 3x \cos 4y & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= 3 \cos 3x \cos 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4 \sin 3x \sin 4y \\ (د) \quad z &= \arctan \frac{y}{x} & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ (هـ) \quad x^2 - 4y^2 + 9z^2 &= 36 & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{x}{9z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{9z} \\ (و) \quad x^2 - 3x^2y + 6xyz &= 0 & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2y(x-z)}{x^2+2xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-2z)}{x^2+2xy} \\ (ز) \quad yz + xz + xy &= 0 & ج \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{y+z}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y} \end{aligned}$$

$$١٨ - (١) \quad \text{إذا كان } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{فبين أن } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

$$(ب) \quad \text{إذا كان } z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{فبين أن } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

$$(ج) \quad \text{إذا كان } z = e^{x/y} \sin \frac{x}{y} + e^{x/y} \cos \frac{y}{x}, \quad \text{فبين أن } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$(د) \quad \text{إذا كان } z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \sin(ax + by), \quad \text{فبين أن } b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}.$$

١٩ — أوجد معادلة المستقيم المماس :

$$(١) \quad \text{للقطع المكافئ } z = 2x^2 - 3y^2, \quad y = 1 \quad \text{عند النقطة } (-2, 1, 5) \quad ج : 8x + z + 11 = 0, \quad y = 1$$

$$(ب) \quad \text{للقطع المكافئ } z = 2x^2 - 3y^2, \quad x = -2 \quad \text{عند النقطة } (-2, 1, 5) \quad ج : 6y + z - 11 = 0, \quad x = -2$$

$$(ج) \quad \text{للقطع الزائد } z = 2x^2 - 3y^2, \quad z = 5 \quad \text{عند النقطة } (-2, 1, 5) \quad ج : 4x + 3y + 5 = 0, \quad z = 5$$

برهن أن هذه المستقيمات الثلاثة تقع في المستوى $8x + 6y + z + 5 = 0$.

٢٠- أوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ لكل من التوال التالية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 : \quad \text{ج} \quad z = 2x^2 - 5xy + y^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4} : \quad \text{ح} \quad z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \quad (ب)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12 \cos 3x \sin 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z : \quad \text{ز} \quad z = \sin 3x \cos 4y \quad (ج)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} : \quad \text{ح} \quad z = \arctan \frac{y}{x} \quad (د)$$

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad \text{فبين أن} \quad z = \frac{xy}{x-y}, \quad \text{إذا كان} \quad (1) - ٢١$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad \text{فبين أن} \quad z = e^{\alpha x} \cos \beta y \quad \text{و} \quad \beta = \pm \alpha, \quad \text{إذا كان} \quad (ب)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad \text{فبين أن} \quad z = e^{-t} (\sin x + \cos y), \quad \text{إذا كان} \quad (ج)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\} \quad \text{فبين أن} \quad z = \sin ax \sin by \sin kt\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{إذا كان} \quad (د)$$

$$٢٢ - \text{لقانون الغازات} \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = ct, \quad \text{حيث } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ ثوابت.}$$

أثبت أن :

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v-b) - (p + a/v^2)v^3}{v^3(v-b)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^3}{(p + a/v^2)v^3 - 2a(v-b)}, \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v-b}{c}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right) = -1$$

الفصل السابع والخمسون

التفاضلات الكلية والمشتقات الكلية

التفاضلات الكلية • لقد سبق أن عرفنا في الفصل ٢٣ التفاضلين dx و dy للدالة $y = f(x)$ في المتغير المستقل الوحيد x بالشكل .

$$dx = \Delta x, \quad dy = f'(x) dx = \frac{dy}{dx} dx$$

لنعتبر الدالة $z = f(x, y)$ في المتغيرين المستقلين x و y . ولنعرف $dx = \Delta x$ و $dy = \Delta y$ فإذا جعلنا x تتغير وتركنا y ثابتة فإن z دالة في x فقط ، والتفاضل الجزئي لـ z بالنسبة لـ x يعرف بـ $d_x z = f_x(x, y) dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx$. وبشكل مماثل نعرف التفاضل الجزئي لـ z بالنسبة لـ y على أنه $d_y z = f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial y} dy$. ويعرف التفاضل الكلي dz على أنه مجموع التفاضلين الجزئيين أى :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (١)$$

ويعرف التفاضل الكلي dw لدالة $w = F(x, y, z, \dots, t)$ بـ :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad (١-)$$

أنظر المسائل ١ - ٢

وكما في حالة دالة لمتغير واحد فإن التفاضل الكلي لدالة لعدة متغيرات تعطي تقريبا جيدا للتزايد الكلي الذى يطرأ على الدالة عندما تكون تزايدات المتغيرات المستقلة المتعددة صغيرة .

مثال :

Δz	$x \cdot \Delta y$	$\Delta x \cdot y$
y	$x \cdot y$	$y \cdot \Delta x$
	x	Δx

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy; \quad \text{إذا كان } z = xy \text{ فإن}$$

ولكن إذا أعطينا لـ x و y التزايدين $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ فإن التزايد Δz يكون :

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \\ &= x \Delta y + y \Delta x + \Delta x \Delta y \\ &= x dy + y dx + dx dy \end{aligned}$$

والشكل ٥٧ - ١ يوضح تمثيلا هندسيا لذلك . ويتضح أن dz و Δz

تختلفان عن بعضهما بالمستطيل الذى مساحته $\Delta x \Delta y = dx dy$.

شكل ٥٧ - ١

أنظر المسائل ٣ - ٩

قاعدة السلسلة لحوال الدوال : إذا كانت $z = f(x, y)$ دالة متصلة في المتغيرين x و y ولها مشتقتان جزئيتان متصلتان $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ ، وإذا كانت x و y دالتين قابلتين للاشتقاق في المتغير t ، فنحن نذكر أن z دالة في t ويعطى dz/dt بالنسبة لـ t بـ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (٢)$$

وبشكل مماثل إذا كانت $w = f(x, y, z, \dots)$ دالة متصلة في المتغيرات x, y, z, \dots وكانت مشتقاتها الجزئية متصلة ، وإذا كانت x, y, z, \dots دالة قابلة للاشتقاق في المتغير t فإن المشتقة الكلية لـ w بالنسبة لـ t تعطى بـ :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \dots \quad (٢')$$

انظر المسائل ١٠-١٦

وإذا كانت $z = f(x, y)$ دالة متصلة في المتغيرين x, y وكانت مشتقاتها الجزئية $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ متصلة ، وإذا كانت x و y دالتين متصلتين في المتغيرين المستقلين r و s ، أى أن $x = g(r, s)$ ، $y = h(r, s)$ فإن z دالة في r و s وإن :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (٣)$$

وبشكل مماثل إذا كانت $w = f(x, y, z, \dots)$ دالة متصلة في n متغيرا x, y, z, \dots وكانت مشتقاتها الجزئية $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \partial w / \partial z, \dots$ متصلة ، وإذا كانت x, y, z, \dots دوال متصلة في m متغيرا مستقلا r, s, t, \dots فإن :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \dots \quad (٣')$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} + \dots \quad \dots \dots \dots \text{ الخ}$$

انظر المسائل ١٧ - ١٩

مسائل محلولة

أوجد في كل من المسألتين ١ - ٢ التفاضل الكلي.

$$z = x^2y + x^2y^2 + xy^3. \quad - ١$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 2xy^2 + y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2x^2y + 3xy^2$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2xy + 2xy^2 + y^3) dx + (x^2 + 2x^2y + 3xy^2) dy \quad \text{ومنه}$$

$$z = x \sin y - y \sin x. \quad - ٢$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y - y \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y - \sin x$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (\sin y - y \cos x) dx + (x \cos y - \sin x) dy \quad \text{ومنه}$$

٣ - قارن بين dz و Δz بفرض أن $z = x^2 + 2xy - 3y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \quad dz = 2(x+y)dx + 2(x-3y)dy$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x+dx)^2 + 2(x+dx)(y+dy) - 3(y+dy)^2] - (x^2 + 2xy - 3y^2) \\ &= 2(x+y)dx + 2(x-3y)dy + (dx)^2 + 2dx dy - 3(dy)^2 \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن dz و Δz يختلفان بـ $(dx)^2 + 2dx dy - 3(dy)^2$.

٤ - احسب القيمة التقريبية لمساحة مستطيل بمدا 24.97 units, 35.02 units

أن مساحة مستطيل ، بمدا x و y هي $A = xy$ وبالتالي فإن $dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = y dx + x dy$.

فإذا أخذنا $x = 35, dx = 0.02, y = 25, dy = -0.03$ فإننا نجد $A = 35 \times 25 = 875$

و $dA = 25(0.02) + 35(-0.03) = -0.55$. والمساحة التقريبية : $A + dA = 874.47 \text{ sq. un.}$

٥ - احسب القيمة التقريبية للتغير الذي يطرأ على وتر مثلث قائم الزاوية طولاه ضلعي القائمة 15 cm و 20 cm إذا أطلنا

الضلع القصير بمقدار 5/8 cm وقصرنا الضلع الطويل بمقدار 5/16 cm.

ليكن x, y, z أطوال الضلع القائم القصير والضلع القائم الطويل والوتر على الترتيب فيكون.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

وعندما يكون $x = 15, y = 20, dx = 5/8, dy = -5/16$ فإن $dz = \frac{15(5/8) + 20(-5/16)}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 1/8 \text{ cm.}$

ولذلك فإن الوتر يزداد طولاً بـ $1/8 \text{ cm}$ تقريباً.

٦ - تعطى القدرة الكهربائية التي يستهلكها جهاز كهربائي بـ $P = E^2/R \text{ watts}$. فإذا كانت E تساوى 200 volts

و R تساوى 8 ohms فاحسب التغير الذي يطرأ على القدرة عندما تزداد E بمقدار 5 volts وتزداد R

بمقدار 0.2 ohms ؟

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R} dE - \frac{E^2}{R^2} dR \quad \text{أن}$$

وعندما $E = 200, R = 8, dE = -5, dR = -0.2$ يكون :

$$dP = \frac{2 \cdot 200}{8} (-5) - \left(\frac{200}{8} \right)^2 (-0.2) = -250 + 125 = -125$$

وبذلك تكون القدرة قد نقصت 125 watts تقريباً.

٧ - لدينا قطعة خشب على شكل متوازي مستطيلات ، قيست أبعادها فوجدت 25 cm و 30 و 50 مع احتمال خطأ قدره

0.125 cm في كل من هذه القياسات الثلاثة . أوجد تقريباً أكبر خطأ في حساب مساحة سطح قطعة الخشب والنسبة

المتوية للخطأ في المساحة الناتج عن الأخطاء في القياسات المفردة .

بما أن مساحة السطح تعطى بـ $S = 2(xy + yz + zx)$ فإن :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = 2(y+z)dx + 2(x+z)dy + 2(y+x)dz$$

ونحصل على أكبر خطأ في S عندما تكون الأخطاء في الأطوال لها نفس الإشارة ، لنفرض هذه الإشارة موجبة مثلاً فيكون عندئذ :

$$dS = 2(30 + 50)(0.125) + 2(25 + 50)(0.125) + 2(30 + 25)(0.125) = 52.5 \text{ cm}^2.$$

والنسبة المئوية للخطأ تساوى (الخطأ / المساحة) (100) وهذا يساوى $5250/7000$ أى % 0.75 .

٨ - أوجد أكبر خطأ الناتج عن استخدام الصيغة $R = E/C$. وأوجد الخطأ النسبى ، وذلك بفرض أن $C = 20$ خطأ 0.1 وأن $E = 120$ خطأ 0.05 .

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E} dE + \frac{\partial R}{\partial C} dC = \frac{1}{C} dE - \frac{E}{C^2} dC$$

ويحدث أكبر خطأ عندما $dC = -0.1, dE = 0.05$. إذن :

$$dR = \frac{0.05}{20} - \frac{120}{400}(-0.1) = 0.0325$$

$$\frac{dR}{R}(100) = \frac{0.0325}{8}(100) = 0.40625 = 0.41\%.$$

٩ - قيس ضلعا مثلث والزاوية المحصورة بينهما فكانت النتائج 50 m ، 65 m ، 60° ، فإذا كانت الأخطاء المحتملة 0.06 m في قياس الأطوال و 1° في قياس الزاوية فما هو الخطأ الأعظم في حساب المساحة ؟

$$A = \frac{1}{2}xy \sin \theta, \quad \partial A/\partial x = \frac{1}{2}y \sin \theta, \quad \partial A/\partial y = \frac{1}{2}x \sin \theta, \quad \partial A/\partial \theta = \frac{1}{2}xy \cos \theta$$

$$dA = \frac{1}{2}y \sin \theta dx + \frac{1}{2}x \sin \theta dy + \frac{1}{2}xy \cos \theta d\theta \quad \text{إذن}$$

$$x = 50, y = 65, \theta = 60^\circ, dx = 0.06, dy = 0.06 \text{ و } d\theta = 1^\circ = \pi/180, \text{ فإذا كان}$$

$$dA = \frac{1}{2}(65)(\sin 60^\circ)(0.06) + \frac{1}{2}(50)(\sin 60^\circ)(0.06) + \frac{1}{2}(50)(65)(\cos 60^\circ)(\pi/180) = 17.169 \text{ m}^2 \text{ فإن}$$

١٠ - إذا كان $z = x^2 + 3xy + 5y^2; x = \sin t, y = \cos t$. فأوجد dz/dt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x + 3y) \cos t - (3x + 10y) \sin t \quad \text{إذن}$$

١١ - إذا كان $z = \ln(x^2 + y^2); x = e^{-t}, y = e^t$. فأوجد dz/dt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2 + y^2}(e^t) = 2 \frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2 + y^2} \quad \text{إذن}$$

١٢ - لتكن $z = f(x, y)$ دالة متصلة في x و y ولتكن مشتقتها الجزئيتين $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ متصلتين . لتكن بعد ذلك y دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ تكون z دالة قابلة للاشتقاق في x ويكون استنادا إلى (٢) :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

يلاحظ أننا استخدمنا الرمز z بدلا من x منعا للالتباس الذي يمكن أن يحدث من استخدام $\partial z/\partial x$ و dz/dx في نفس العلاقة.

١٣ - إذا كان $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $y = e^{ax}$ فأوجد dz/dx

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = (2x + 2y) + (2x + 8y)ae^{ax} = 2(x + y) + 2a(x + 4y)e^{ax}$$

١٤ - إذا كان $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y$, $y = \ln x$ فأوجد (أ) dz/dx و (ب) dz/dy

(أ) إن x هنا هو المتغير المستقل ولذلك .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = (y^2 + 2xy) + (2xy + x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 + 2xy + 2y + x$$

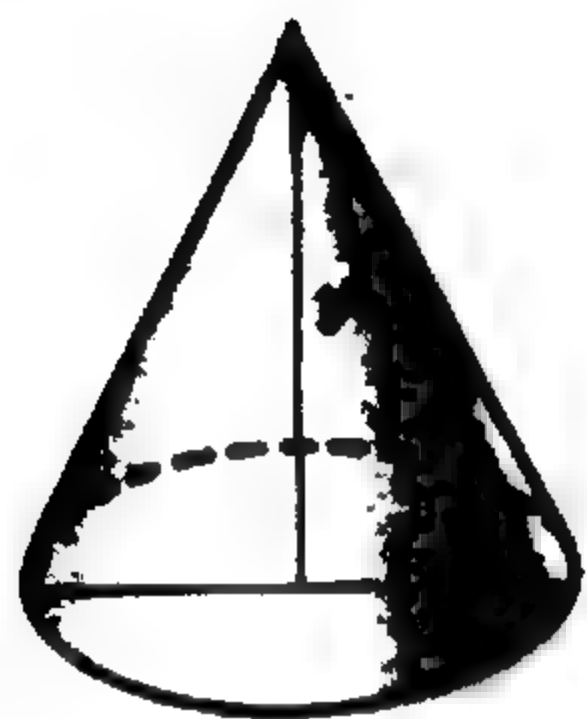
(ب) إن y هنا هو المتغير المستقل ولذلك .

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2 + 2xy)x + (2xy + x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$

١٥ - إذا كان ارتفاع مخروط دائري قائم 15 cm ونصف قطر قاعدته 10 cm فبأي معدل

يتغير الحجم إذا كان ازدياد ارتفاع المخروط 0.2 cm s^{-1} ومعدل نقصان نصف قطر

القاعدة 0.3 cm s^{-1} .



شكل ٥٧ - ٢

ليكن x نصف قطر المخروط و y ارتفاعه . أن $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ لمتغير x و y دالتين في t فيكون .

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi \left(2xy \frac{dx}{dt} + x^2 \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi [2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot (-0.3) + 10^2 \cdot (0.2)] = -70\pi/3 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

١٦ - تتحرك نقطة على منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 5$ حيث تقاس x و y

و z بـ cm . فإذا كانت x تزداد بمعدل 0.2 cm s^{-1} ، فما هو معدل تغير z عندما $x = 2$ ؟

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{x}{8} \frac{dx}{dt} - \frac{2y}{9} \frac{dy}{dt} . \text{ ينتج } z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} ,$$

وبما أن $x^2 + y^2 = 5$ فإن $y = \pm 1$ عندما $x = 2$ ويكون كذلك . $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$.

$$\text{وعندما } y = 1 \text{ يكون } \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1}(0.2) = -0.4 \text{ و } \frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-0.4) = \frac{5}{36} \text{ cms}^{-1}$$

$$\text{وعندما } y = -1 \text{ يكون } \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = 0.4 \text{ و } \frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-1)(0.4) = \frac{5}{36} \text{ cms}^{-1}$$

١٧ - إذا كان $z = x^2 + xy + y^2$; $x = 2r + s$, $y = r - 2s$. فأوجد $\partial z/\partial r$ و $\partial z/\partial s$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (2x + y)(2) + (x + 2y)(1) = 5x + 4y \quad \text{إذن}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (2x + y)(1) + (x + 2y)(-2) = -3y \quad \text{ومن}$$

١٨ - أوجد $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ إذا كان $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2, x = \rho \sin \beta \cos \theta, y = \rho \sin \beta \sin \theta, z = \rho \cos \beta$.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x \sin \beta \cos \theta + 4y \sin \beta \sin \theta + 4z \cos \beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x \rho \cos \beta \cos \theta + 4y \rho \cos \beta \sin \theta - 4z \rho \sin \beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x \rho \sin \beta \sin \theta + 4y \rho \sin \beta \cos \theta$$

١٩ - إذا كان $u = f(x, y, z) = xy + yz + zx, y = 1/x, z = x^2$ فأوجد $\partial u / \partial x$.

باستخدام (٢) نجد أن

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = (y + z) + (x + z) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + (y + x) 2x = y + z + 2x(x + y) - \frac{x + z}{x^2}$$

٢٠ - إذا كانت $z = f(x, y)$ دالة متصلة في x و y وكانت مشتقتها الجزئيتين $\partial z / \partial y$ و $\partial z / \partial x$ متصلتين فاستنتج الصيغة الأساسية :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (1)$$

حيث يتول كل من ϵ_1 و ϵ_2 إلى الصفر عندما Δx و Δy يتولان إلى الصفر.

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \end{aligned} \quad (i)$$

حيث تتغير x وحدها في العبارة الأولى بين القوسين الكبيرين وتتغير y وحدها في العبارة الثانية. وعلى هذا يمكن تطبيق قانون القيمة المتوسطة [(V) من الفصل ٢١] على كل من هاتين العبارتين.

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \quad (ii)$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \quad (iii)$$

حيث $0 < \theta < 1$ و $0 < \theta_2 < 1$ وحيث المشتقات هنا هي مشتقات جزئية.وما أن $\partial z / \partial x = f_x(x, y)$ و $\partial z / \partial y = f_y(x, y)$ دالتان متصلتان في x و y حسب الفرض فإن :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f_x(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_x(x, y) \quad , \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y)$$

$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \epsilon_1, \quad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \epsilon_2 \quad \text{وبالتالي}$$

حيث ϵ_1, ϵ_2 يتولان إلى الصفر عندما تتول كل من Δx و Δy إلى الصفر.

لنموض في (ii) و (iii) ثم في (i) فنجد العلاقة المطلوبة :

$$\begin{aligned} \Delta z &= \{f_x(x, y) + \epsilon_1\} \Delta x + \{f_y(x, y) + \epsilon_2\} \Delta y \\ &= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

لاحظ أن التفاضل التام dz هو تقريب جيد جداً للتزايد الكلي Δz عندما تكون $|\Delta x|, |\Delta y|$ صغيرتين

مسائل إضافية

٢١ - أوجد التفاضل الكلي لكل من الدوال التالية :

$$z = x^3y + 2xy^2 \quad (أ) \quad dz = (3x^2 + 2y^2)y dx + (x^2 + 6y^2)x dy \quad : ج$$

$$\theta = \arctan y/x \quad (ب) \quad d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad : ج$$

$$z = e^{x^2 - y^2} \quad (ج) \quad dz = 2z(x dx - y dy) \quad : ج$$

$$z = x(x^2 + y^2)^{-1/2} \quad (د) \quad dz = \frac{y(y dx - x dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad : ج$$

٢٢ - إذا كان التردد الأساسي لاهتزاز خيط أو سلك ذا مقطع دائري تحت شد مقدار T هو $n = \frac{1}{2\pi l} \sqrt{\frac{T}{\pi d}}$ ، حيث l طول الخيط و r نصف قطره و d كثافته . أوجد القيمة التقريبية لتغير n بسبب (أ) تغير l بالكمية الصغيرة dl ، (ب) تغير T بالكمية الصغيرة dT ، (ج) تغير l و T في آن واحد .

$$ج : (أ) -\frac{n}{l} dl, \quad (ب) \frac{n}{2T} dT, \quad (ج) n \left(-\frac{dl}{l} + \frac{dT}{2T} \right)$$

٢٣ - احسب - باستخدام التفاضلات -

(أ) حجم صندوق قاعدته مربعة وطول ضلعه 8.005 cm وارتفاعه 9.996 cm : ج 640.544 cm^3

(ب) قطر صندوق على شكل متوزي مستطيلات أبعاده 0.924 m و 2.824 m و 1.833 m : ج 2.747 m

٢٤ - احسب القيمة التقريبية للخطأ الأعظم المحتمل والنسبة المئوية للخطأ إذا كانت z تعطى بالصيغ التالية :

$$z = \pi r^2 h; \quad r = 5 \pm 0.05, \quad h = 12 \pm 0.1. \quad (أ) \quad 8.5\pi; 2.8\% \quad : ج$$

$$1/z = 1/f + 1/g; \quad f = 4 \pm 0.01, \quad g = 8 \pm 0.02. \quad (ب) \quad 0.0067; 0.25\% \quad : ج$$

$$z = y/x; \quad x = 1.8 \pm 0.1, \quad y = 2.4 \pm 0.1. \quad (ج) \quad 0.13; 10\% \quad : ج$$

٢٥ - احسب القيمة المعطى التقريبية للنسبة المئوية للخطأ في :

$$\omega = \sqrt[3]{g/b} \quad (أ) \quad \text{إذا كان هناك خطأ محتمل قدره } 1\% \text{ في قياس } g \text{ و } 1/2\% \text{ في قياس } b.$$

$$\text{إرشاد : } \omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b); \quad \frac{\partial \omega}{\omega} = \frac{1}{3} \left(\frac{dg}{g} - \frac{db}{b} \right), \quad \left| \frac{dg}{g} \right| = 0.01, \quad \left| \frac{db}{b} \right| = 0.005.$$

$$ج : 0.005$$

$$(ب) \quad g = 2s/t^2 \quad \text{إذا كان هناك خطأ محتمل قدره } 2\% \text{ في قياس } s \text{ و } 1/4\% \text{ في قياس } t.$$

$$ج : 0.015$$

٢٦ - أوجد du/dt بفرض أن :

$$u = x^2y^3, \quad x = 2t^3, \quad y = 3t^2. \quad (أ) \quad 6xy^3t(2yt + 3x) \quad : ج$$

$$u = x \cos y + y \sin x, \quad x = \sin 2t, \quad y = \cos 2t. \quad (ب)$$

$$2(\cos y + y \cos x) \cos 2t - 2(-x \sin y + \sin x) \sin 2t \quad : ج$$

$$u = xy + yz + zx, \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = e^t + e^{-t}. \quad (ج)$$

$$ج : (x + 2y + z)e^t - (2x + y + z)e^{-t}$$

٢٧ - نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة في لحظة معينة يساوى 15 cm وارتفاعها 20 cm فإذا كان نصف القطر يزداد بمعدل 0.5 cm s^{-1} وكان الارتفاع يتناقص بمعدل 1 cm s^{-1} .

فأوجد معدل التغير الزمنى لـ (أ) حجم الاسطوانة (ب) سطحها في تلك اللحظة .

ج : (أ) $75\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ، (ب) $20\pi \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

٢٨ - يتحرك جسم في المستوى بحيث يكون إحداثيا الجسم عند أى لحظة t هما $y = t^2 + 4$ و $x = 2 + 3t$ حيث تقاس x, y بـ metres و t بـ sec . بأى سرعة يتغير بعد الجسم عن نقطة الأصل عندما $t = 1$.

ج : $5/\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$.

٢٩ - تتحرك نقطة على منحنى تقاطع $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ مع المستوى $x - 2y + 4 = 0$ ، فإذا فرضنا أن x تساوى 2 وأنها تزايد بمعدل 3 وحدات في الثانية فأوجد (أ) كيف تتغير y . (ب) كيف تتغير z . (ج) سرعة النقطة .

ج : (أ) تزايد بمعدل $3/2 \text{ units/sec}$. (ب) تزايد بمعدل $75/14 \text{ units/sec}$. عند (2, 3, 7) . ومتناقصة بمعدل $75/14 \text{ units/sec}$ عند (2, 3, -7) ، (ج) 6.3 units/sec .

٣٠ - أوجد $\partial z / \partial t$ ، $\partial z / \partial s$ بفرض أن

$$\begin{array}{ll} 6(x-2y), 4(x+2y) & : \text{ج } z = x^2 - 2y^2, x = 3s + 2t, y = 3s - 2t. \quad (1) \\ 5(x+y) \cos s, (x-y) \sin t & : \text{ج } z = x^2 + 3xy + y^2, x = \sin s + \cos t, y = \sin s - \cos t. \quad (ب) \\ 2(x+2y)e^s, 2(2y-x)e^t & : \text{ج } z = x^2 + 2y^2, x = e^s - e^t, y = e^s + e^t. \quad (ج) \\ 9 \cos(4x+5y), -\cos(4x+5y) & : \text{ج } z = \sin(4x+5y), x = s+t, y = s-t. \quad (د) \\ 2e^{xy}\{tx + (s+t)y\}, & : \text{ج } z = e^{xy}, x = s^2 + 2st, y = 2st + t^2. \quad (هـ) \\ 2e^{xy}\{(s+t)x + sy\} & \end{array}$$

٣١ - (أ) إذا كانت $u = f(x, y)$ و $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ فبين أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

(ب) إذا كانت $u = f(x, y)$ و $x = r \cosh s, y = r \sinh s$ فبين أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

٣٢ - (أ) إذا كان $z = f(x + \alpha y) + g(x - \alpha y)$ فبين أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

إرشاد : اكتب $z = f(u) + g(v)$, $u = x + \alpha y$, $v = x - \alpha y$.

(ب) إذا كان $z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ فبين أن $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

(ج) إذا كان $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ فبين ، إذا تحققت شروط الاتصال (صفحة ٣٣٠) .

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g'h' + f_{yy}(h')^2 + f_x g'' + f_y h'' \quad \text{فإن}$$

(د) إذا كان $z = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ ، فين . إذا تحققت شروط الاتصال ، أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g_r)^2 + 2f_{xy}g_r h_r + f_{yy}(h_r)^2 + f_{xz}g_{rr} + f_{yz}h_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = f_{xx}g_r g_s + f_{xy}(g_r h_s + g_s h_r) + f_{yy}h_r h_s + f_{xz}g_{rs} + f_{yz}h_{rs}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g_s)^2 + 2f_{xy}g_s h_s + f_{yy}(h_s)^2 + f_{xz}g_{ss} + f_{yz}h_{ss}$$

٣٣- نتول عن دالة $f(x, y)$ إنها متجانسة من المرتبة n إذا كان $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. مثلا إن الدالة

متجانسة من المرتبة الثانية ، والدالة $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ متجانسة

من المرتبة الأولى ، اشتق $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ بالنسبة لـ t ثم عوض عن t بـ 1 لتبين أن $xf_x + yf_y = nf$.

تحقق من هذه الصيغة باستخدام دالتى المثالين المذكورين . انظر كذلك المسألة ٣٢ (ب)

٣٤- إذا كان $z = \phi(u, v)$ حيث $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y)$ وكان $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ، فين أن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (أ)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) \quad (ب)$$

٣٥- استخدم الجزء (أ) من المسألة ٣٠ لتستنتج قاعدة السلسلة (٢) و (٣) .

إرشاد : لـ (٢) اقم على Δt .

الفصل الثامن والخمسون

الدوال الضمنية

اشتقاق دالة لمتغير واحد ، معرفة بشكل ضمني بالعلاقة $f(x, y) = 0$ قد تمت معالجته بشكل هندسي في الفصل السادس . وسنذكر هنا ، لهذه الحالة ما يلي دون برهان :

I - إذا كانت $f(x, y)$ متصلة في منطقة تحوى نقطة (x_0, y_0) وكان عندها $f(x_0, y_0) = 0$ ، وإذا كانت $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ متصلتين في هذه المنطقة وكان $\partial f / \partial y \neq 0$ عند (x_0, y_0) فإنه يوجد جوار لـ (x_0, y_0) يمكن فيه حل المعادلة $f(x, y) = 0$ لنحصل على كدالة متصلة قابلة للاشتقاق في x : $y = \phi(x)$ مع $y_0 = \phi(x_0)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} .$$

انظر المسائل ١ - ٣

II - إذا كانت $F(x, y, z)$ متصلة في منطقة تحوى نقطة (x_0, y_0, z_0) وكان عندها $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. وإذا كانت $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ متصلة في هذه المنطقة وكان $\partial F / \partial z \neq 0$ عند (x_0, y_0, z_0) فإنه يوجد جوار لـ (x_0, y_0, z_0)

يمكن فيه حل المعادلة $F(x, y, z) = 0$ لنحصل على كدالة قابلة للاشتقاق في x و y : $z = \phi(x, y)$ مع

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} . \text{ و } z_0 = \phi(x_0, y_0)$$

انظر المسألين ٤ - ٥

III - إذا كانت الدالتان $f(x, y, u, v)$ و $g(x, y, u, v)$ متصلتين في منطقة تحوى النقطة (x_0, y_0, u_0, v_0) التى عندها $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ، $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ، وإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى لـ f و g متصلة

في هذه المنطقة وإذا كان المحدد $J\left(\frac{f, g}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \partial f / \partial u & \partial f / \partial v \\ \partial g / \partial u & \partial g / \partial v \end{vmatrix} \neq 0$ ، فإنه يوجد جوار

(x_0, y_0, u_0, v_0) يمكن عنده حل المعادلتين $F(x, y, u, v) = 0$ و $G(x, y, u, v) = 0$ أيًا لنحصل على u و v

كدالتين متصلتين قابلتين للاشتقاق في x ، y : $u = \phi(x, y)$ ، $v = \psi(x, y)$ وإذا كان المحدد $J\left(\frac{f, g}{x, y}\right) \neq 0$ ،

عند (x_0, y_0, u_0, v_0) فإنه يوجد جوار لـ (x_0, y_0, u_0, v_0) يمكن عنده حل المعادلتين $f(x, y, u, v) = 0$

و $g(x, y, u, v) = 0$ لنحصل على x و y كدالتين متصلتين قابلتين للاشتقاق في u و v . $x = h(u, v)$ ، $y = k(u, v)$

انظر المسألين ٦ - ٧

مسائل مطروحة

١ - استخدم النظرية I لتبرهن أن $x^2 + y^2 - 13 = 0$ ، تعرف y على أنها دالة متصلة في x وقابلة للاشتقاق في أى جوار للنقطة $(2, 3)$ لا يحوى نقطة من المحور x .

أوجد المشتقة عند تلك النقطة .

لنفرض $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13$ فنجد عندها $f(2, 3) = 0$ ويكون في أى جوار لـ $(2, 3)$ تكون فيه المشتقتان الجزئيتان $\partial f / \partial x = 2x$ و $\partial f / \partial y = 2y$ متصلتين كما أن $\partial f / \partial y \neq 0$ وفي هذه الحالة يكون :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \text{ at } (2, 3) \text{ و } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

٢ - بفرض $f(x, y) = y^2 + xy - 12 = 0$ أوجد dy/dx أن $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y + x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{y}{3y + x} \text{ و}$$

٣ - بفرض $e^x \sin y + e^y \sin x = 1$ أوجد dy/dx

$$\text{لنضع } f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x - 1 \text{ فيكون } \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{e^x \sin y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \sin x}$$

٤ - بفرض $F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$ أوجد $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$

لننظر إلى z على أنها دالة في x و y معرفة بالعلاقة المفروضة ولنشتق جزئيا بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y فنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (ii)$$

$$\text{ومن (i) ينتج } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}; \text{ ومن (ii) ينتج } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{3x - 4y}{3x + 2z}$$

٥ - بفرض $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$ أوجد $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$

لنضع $F(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1$ فيكون

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy + z \cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + z \cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y \cos yz + x \cos zx$$

$$\text{ومن } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{x \cos xy + z \cos yz}{y \cos yz + x \cos zx}$$

٦ - بفرض أن u و v معرفتين كدالتين في x و y بالمعادلتين

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0, \quad g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

أوجد $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial x$ (i) و $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial y$ (ii)

(i) لنشتق f و g جزئيا بالنسبة لـ x فنجد :

$$1 + 2v \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 2x - y + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

وبحل هاتين العلاقتين آنيا بالنسبة لـ $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y-2x)}{2(u^2 - v^2)} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x-y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

(ii) لنشتق f و g جزئيا بالنسبة لـ y فنجد :

$$2y + 2v \frac{\partial u}{\partial y} + 2u \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad -x + 2y + 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x-2y) + 2vy}{2(u^2 - v^2)} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(2y-x) - 2uy}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{ومنه}$$

$$v - \text{ بفرض } u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0 \quad , \quad uv + x - y = 0 \quad \text{أوجد (أ)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{(ب)}$$

(أ) نعتبر هنا x و y متغيرين مستقلين :

نشتق المعادلتين المفروضتين جزئيا بالنسبة لـ x فنجد :

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} + 2 = 0 \quad , \quad v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v-u}{u^2+v^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+v}{u^2+v^2} \quad \text{وبحل هاتين العلاقتين آنيا نحصل على}$$

ثم نشتقها جزئيا بالنسبة لـ y فنحصل على :

$$2u \frac{\partial u}{\partial y} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} + 3 = 0 \quad , \quad v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2v-3u}{2(u^2+v^2)} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u+3v}{2(u^2+v^2)} \quad \text{وبالحل الآتي لهاتين المعادلتين نجد}$$

(ب) نعتبر هنا u و v متغيرين مستقلين .

نشتق المعادلتين المفروضتين جزئيا بالنسبة لـ u فنجد :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2u+3v}{5} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2(v-u)}{5} \quad \text{ومنه} \quad 2u + 2 \frac{\partial x}{\partial u} + 3 \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \quad , \quad v + \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

ثم نشتقها جزئيا بالنسبة لـ v فنجد :

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v-3u}{5} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(u+v)}{5} \quad \text{ومنه} \quad -2v + 2 \frac{\partial x}{\partial v} + 3 \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad , \quad u + \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

مسائل إضافية

٨ - أوجد dy/dx بفرض أن

$$\ln(x^2 + y^2) - \arctan y/x = 0 \quad (أ) \quad xy - e^x \sin y = 0 \quad (ب) \quad x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1 \quad (ج)$$

$$\text{ج : (أ) } \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^3 - 2xy + 3y^2}, \text{ (ب) } \frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y}, \text{ (ج) } \frac{2x + y}{x - 2y}$$

٩ - أوجد $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ بفرض أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x}{5z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{5z} \quad \text{ج : } 3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 60 \quad (أ)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x + y + 4z}{4x + 2y + z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + y + 2z}{4x + 2y + z} \quad \text{ج : } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8zx = 20 \quad (ب)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1 - 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z}{1 - 2z} \quad \text{ج : } x + 3y + 2z = \ln z \quad (ج)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1 + e^x \sin(y + z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^x \sin(y + z)}{1 + e^x \sin(y + z)} \quad \text{ج : } z = e^x \cos(y + z) \quad (د)$$

$$\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x) = 1 \quad (هـ)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(x + y) + \cos(z + x)}{\cos(y + z) + \cos(z + x)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(x + y) + \cos(y + z)}{\cos(y + z) + \cos(z + x)} \quad \text{ج :}$$

١٠ - بفرض $x^2 + 2yz + 2zx = 1$ أوجد جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية لـ z .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x + z}{x + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{x + y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x - y + 2z}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x + 2z}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z}{(x + y)^2} \quad \text{ج :}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1. \quad \text{فبين أن } F(x, y, z) = 0 \quad \text{١١ - إذا كان}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}} J\left(\frac{f, g}{x, y}\right). \quad \text{فبين أن } g(x, y) = 0 \text{ و } z = f(x, y) \text{ إذا كان } \quad \text{١٢ - إذا كان}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}. \quad \text{فبين أن } g(z, x) = 0 \text{ و } f(x, y) = 0 \text{ إذا كان } \quad \text{١٣ - إذا كان}$$

١٤ - بفرض $2u - v + x^2 + xy = 0, u + 2v + xy - y^2 = 0$ أوجد المشتقات الجزئية الأولى لـ u و v بالنسبة لـ x و y والمشتقات الجزئية الأولى لـ x ، y بالنسبة لـ u و v .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{5}(4x + 3y), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{5}(2x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5}(2y - 3x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4y - x}{5} \quad \text{ج :}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{4y - x}{2(x^2 - 2xy - y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y - 2x}{2(x^2 - 2xy - y^2)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3x - 2y}{2(x^2 - 2xy - y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-4x - 3y}{2(x^2 - 2xy - y^2)}$$

١٥ - إذا كان $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 + z^2, w = x^3 + y^3 + z^3$ فبين أن .

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{yz}{(x - y)(x - z)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x + z}{2(x - y)(y - z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{3(x - z)(y - z)}$$

الفصل التاسع والخمسون

المتحنيات والسطوح الفراغية

المستوى المماس والمستوى العمودي لمنحنى فراغى . يمكن تعريف المنحنى الفراغى بارامتريا بالمعادلات

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (1)$$

ومعادلتى المستقيم المماس لهذا المنحنى عند إحدى نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (المعينة بـ $t = t_0$) هما :

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}} \quad (2)$$

ومعادلة المستوى العمودي (الماربـ P_0 والمموى على المستقيم المماس) هى :

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

عل أن تحسب المشتقات فى (2) و (3) عند النقطة P_0 .

انظر المسألتين ١ - ٢

المستوى المماس والمستقيم العمودى لسطح . إن معادلة المستوى المماس لسطح $F(x, y, z) = 0$

عند إحدى نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هى :

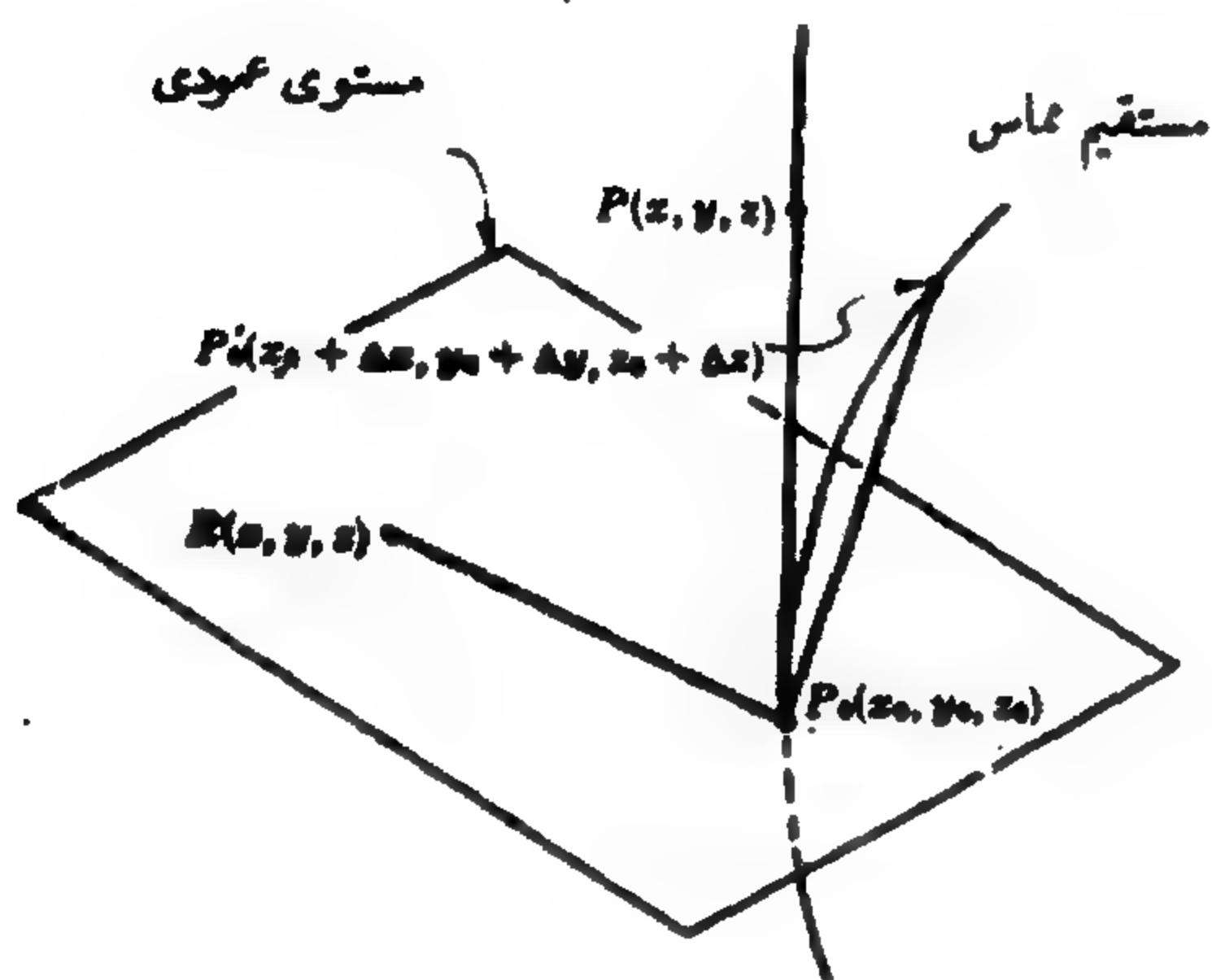
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \quad (4)$$

ومعادلتى المستقيم العمودى هما :

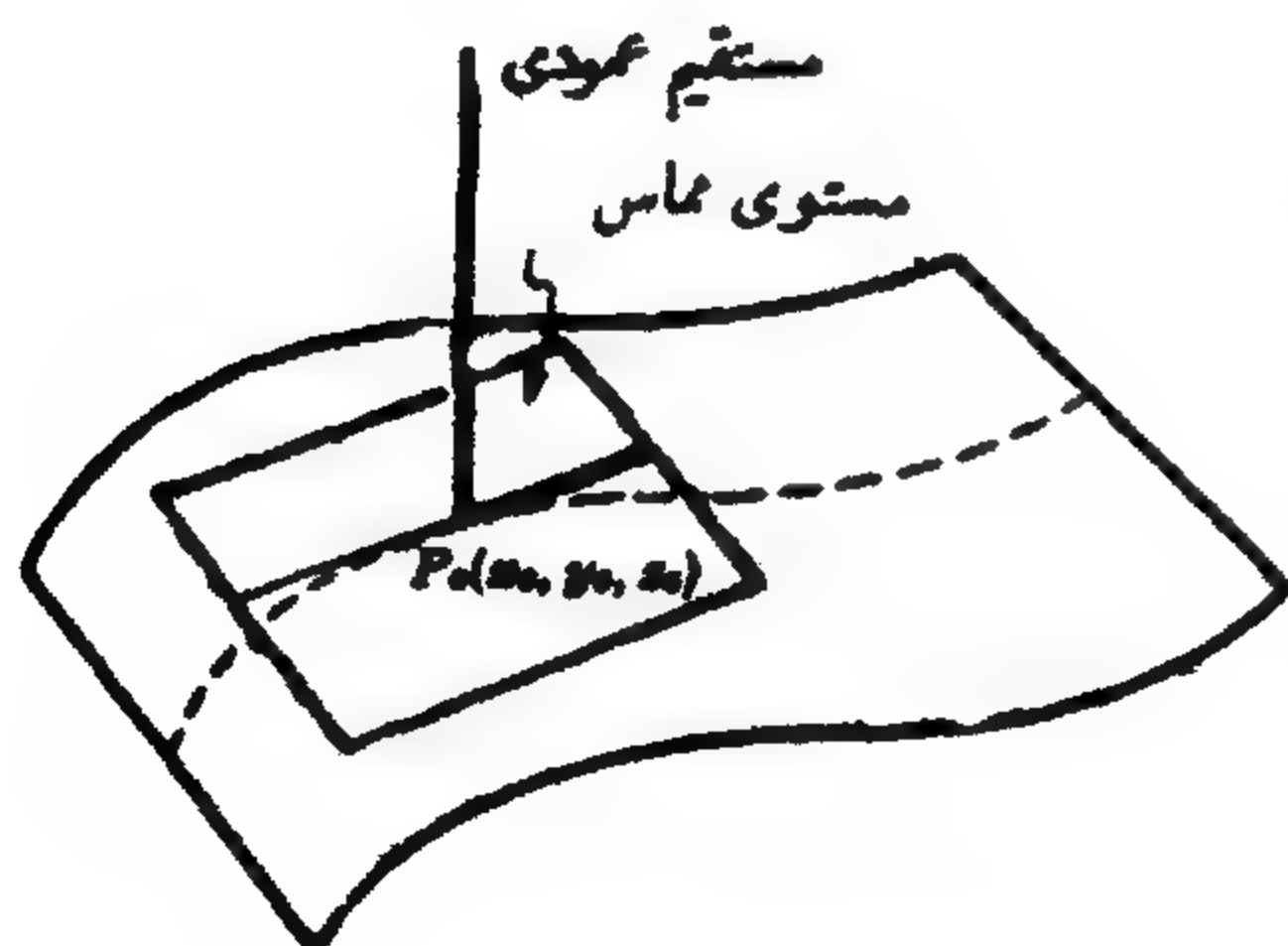
$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (5)$$

عل أن تحسب المشتقات الجزئية عند النقطة P_0 . انظر الشكل ٥٩ - ٢

انظر المسائل ٣ - ٩



شكل ٥٩ - ١



شكل ٥٩ - ٢

المنحنى الفراغى • يمكن أن يعرف كذلك بالمعادلتين .

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \quad (٦)$$

عندئذ تكون معادلتا المستقيم المماس عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هما :

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad (٧)$$

ومعادلة المستوى العمودى هى :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} (z - z_0) = 0 \quad (٨)$$

على أن تحسب المشتقات الجزئية فى (٧) و (٨) عند النقطة P_0 .

انظر المسألتين ١٠ - ١١

مسائل محلولة

١ - استنتج المعادلات (٢) و (٣) للمستقيم المماس والمستوى العمودى للمنحنى الفراغى $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ عند نقطة منه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ معينة بالقيمة $t = t_0$. انظر إلى الشكل ٥٩ - ١

لتكن $P'_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ نقطة أخرى من المنحنى معينة بالقيمة $t = t_0 + \Delta t$ فإذا جعلنا $P_0 \rightarrow P'_0$ على المنحنى فإن الوتر $P_0 P'_0$ يقترب من المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة P_0 كوضع نهائى .

يمكن تعيين اتجاه الوتر بالمجموعة البسيطة من أعداد الاتجاه $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$ ولكننا سنستخدم المجموعة $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$.

عندئذ عندما تتحول P'_0 إلى P_0 وتتحول $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$ إلى $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ فتكون مجموعة أعداد الاتجاه للمستقيم المماس عند P_0 . لنفرض الآن أن $P(x, y, z)$ نقطة اختيارية على المستقيم المماس فيكون عندئذ $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ مجموعة أعداد الاتجاه $P_0 P$.

وبما أن مجموعى أعداد الاتجاه متناسبة فإن معادلتى المستقيم المماس عند P_0 هما .

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

وإذا كانت $R(x, y, z)$ نقطة اختيارية فى المستوى العمودى عند P_0 فإن $P_0 R$ و $P_0 P$ متعامدان ، ومعادلة المستوى العمودى عند P_0 هى :

$$(x-x_0)\frac{dx}{dt} + (y-y_0)\frac{dy}{dt} + (z-z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

٢ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لـ

(أ) المنحنى $x=t, y=t^2, z=t^3$ عند النقطة $t=1$.

(ب) المنحنى $x=t-2, y=3t^2+1, z=2t^3$ عند نقطة تقاطعه مع المستوى yz .

(أ) نلاحظ أنه عند النقطة $t=1$ أى عند النقطة $(1, 1, 1)$ يكون $dx/dt=1, dy/dt=2t=2,$

و $dz/dt=3t^2=3$. وباستخدام المعادلة (٢) نجد معادلتى المستقيم المماس $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ وباستخدام المعادلة

(٣) فإننا نجد معادلة المستوى العمودى : $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = x+2y+3z-6 = 0$.

(ب) إن المنحنى المفروض يقطع المستوى yz عند النقطة التى يكون عندها $x=t-2=0$ أى عندما يكون $t=2$.

فنقطة التقاطع إذن هى $(0, 13, 16)$. وعند هذه النقطة يكون $dx/dt=1, dy/dt=6t=12,$ و $dz/dt=6t^2=24$.

ومعادلتا المستقيم المماس هما $\frac{x}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}$ ومعادلة المستوى العمودى هى

$$x + 12(y-13) + 24(z-16) = x + 12y + 24z - 540 = 0.$$

٣ - استنتج المعادلات (٤) و (٥) التى تعطى المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح $F(x, y, z) = 0$ عند النقطة

$P_0(x_0, y_0, z_0)$. انظر الشكل ٥٩ - ٢.

لتكن $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$ المعادلات البارامترية لأى منحنى على السطح $F(x, y, z) = 0$ ومارا بالنقطة P_0 .

عندئذ يكون عند النقطة P_0 :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

على أن تحسب جميع المشتقات عند P_0 .

تعبّر هذه العلاقة عن تعامد المستقيم المار بالنقطة P_0 والذى أعداد اتجاهه (i) $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ مع المستقيم المار بالنقطة P_0

والذى أعداد اتجاهه (ii) $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$. إن المجموعة (i) تتعلق بمماس المنحنى الذى يقع فى المستوى المماس للسطح ،

أما المجموعة (ii) فتعرف المستقيم العمودى على السطح عند النقطة P_0 ومعادلتا هذا العمودى هما :

$$\frac{x-x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y-y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z-z_0}{\partial F/\partial z}$$

ومعادلة المستوى العمودى عند P_0 هى :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

أوجد فى كل من المسألتين ٤ - ٥ معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح

المفروض عند النقطة المفروضة .

$$z = 3x^2 + 2y^2 - 11; (2, 1, 3). - ٤$$

لنضع $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$. وعند النقطة $(2, 1, 3)$ يكون :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4, \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

ومعادلة المستوى المماس هي $12(x-2) + 4(y-1) - (z-3) = 0$ أو $12x + 4y - z = 25$.

$$\text{ومعادلتا المستقيم العمودى هما} \quad \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0; (1, -2, 1). \quad - 6$$

ويكون عند النقطة $(1, -2, 1)$ $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + 4 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7$.

ومعادلة المستوى المماس هي $0(x-1) - 19(y+2) + 7(z-1) = 0$ أو $19y - 7z + 45 = 0$.

$$\text{ومعادلتا المستقيم العمودى هما} \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-19} = \frac{z-1}{7} \quad \text{أو} \quad x=1, \quad 7y + 19z - 5 = 0.$$

٦ - بين أن معادلة المستوى المماس للسطح $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هي :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

$$\text{يكون عند النقطة } P_0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y_0}{b^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z_0}{c^2}.$$

$$\text{ومعادلة المستوى المماس هي} \quad \frac{2x_0}{a^2}(x-x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y-y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z-z_0) = 0.$$

$$\text{وهذه تأخذ الشكل} \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \quad \text{لأن } P_0 \text{ نقطة على السطح.}$$

٧ - بين أن السطحين :

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0 \quad \text{و} \quad F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$$

متماسان عند النقطة $(2, 1, 1)$.

المطلوب هو أن نبرهن وجود مستوى مماس مشترك للسطحين عند النقطة المذكورة.

$$\text{لدينا عند } (2, 1, 1), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 8y = 8, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -8z = -8$$

$$\text{و} \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 6 = -2, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6 = -4, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2 = 4.$$

وبما أن مجموع أعداد الاتجاه $[4, 8, -8]$ و $[-2, -4, 4]$ للمستقيمين العموديين على السطحين متناهيان

فالسطين المستوى المماس المشترك :

$$x + 2y - 2z = 2 \quad \text{أو} \quad 1(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$$

٨ - بين أن السطحين $F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$ و $G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ يتقاطعان

بزواوية قائمة عند النقطة $(1, 2, 1)$.

المطلوب هو أن نبرهن تمامد المستويين المماسين للسطحين عند النقطة المفروضة أو أن نبرهن أمرا مماثلا وهو تمامد العمودين عند تلك النقطة .

عند النقطة $(1, 2, 1)$ يكون $\frac{\partial F}{\partial z} = y - 4x = -2$ ، و $\frac{\partial F}{\partial y} = x + z = 2$ ، و $\frac{\partial F}{\partial x} = y - 4z = -2$ ، ومنه

نجد أن مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على السطح $F(x, y, z) = 0$ هي $[l_1, m_1, n_1] = [1, -1, 1]$.

وعند النقطة $(1, 2, 1)$ يكون $\frac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6$ ، و $\frac{\partial G}{\partial y} = 1$ ، و $\frac{\partial G}{\partial x} = -5$ ، ومنه نجد أن مجموعة أعداد اتجاه المستقيم

العمودى على السطح $G(x, y, z) = 0$ هي $[l_2, m_2, n_2] = [-5, 1, 6]$.

وبما أن $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0$ ، فالعمودان متعامدان .

٩ - بين أن السطحين $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ و $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$

يتقاطعان بزواوية قائمة .

لتكن $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة مشتركة على السطحين عند هذه النقطة يكون :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x_0$ ، $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y_0$ ، $\frac{\partial F}{\partial z} = 16z_0$ ، ومنه تكون $[3x_0, 4y_0, 8z_0]$ هي مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على

السطح عند P_0 .

وبالمثل نجد أن $[x_0, 2y_0, -4z_0]$ تمثل مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على السطح $G(x, y, z) = 0$

عند P_0 وبما أن

$$\begin{aligned} 3x_0(x_0) + 4y_0(2y_0) + 8z_0(-4z_0) &= 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2 \\ &= 6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(6) - 36 = 0, \end{aligned}$$

إذن العمودان متعامدان

١٠ - استنتج المعادلات (v) ، (٨) التى تعطى المستقيم المماس للمنحنى الفراغى $C : F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$:

والمستوى العمودى عليه عند إحدى نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

إن الاتجاهين $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right]$ و $\left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right]$ عند P_0 عموديان على المستويين المماسين للسطحين $F(x, y, z) = 0$ و

$G(x, y, z) = 0$. ولذا فإن الاتجاه

$$\left[\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \right]$$

عمودى على كل من هذين الاتجاهين ، فهو إذن مماس للمنحنى عند النقطة P_0 . وعلى هذا تكون معادلتا المستقيم المماس هما

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

ومعادلة المستوى العمودى هي :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

١١ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى للمنحنى $x^2 + y^2 + z^2 = 14, x + y + z = 6$ عند النقطة $(1, 2, 3)$.

لنضع $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ و $G(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$ فيكون عند النقطة $(1, 2, 3)$

$$\begin{vmatrix} \partial F / \partial y & \partial F / \partial z \\ \partial G / \partial y & \partial G / \partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \partial F / \partial z & \partial F / \partial x \\ \partial G / \partial z & \partial G / \partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} \partial F / \partial x & \partial F / \partial y \\ \partial G / \partial x & \partial G / \partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

ومنه نجد أن $[1, -2, 1]$ هي أعداد اتجاه المماس ومعادلتها إذن هما $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ ومعادلة المستوى العمودى

$$(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = x - 2y + z = 0. \quad \text{هى}$$

مسائل إضافية

١٢ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقطة المفروضة .

$$\text{ج : } 2x + 2y + 3z - 9 = 0 \quad ; \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad ; \quad x = 2t, y = t^2, z = t^3; t = 1 \quad (أ)$$

$$\text{ج : } x + y + z - 1 = 0 \quad ; \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \quad ; \quad x = te^t, y = e^t, z = t; t = 0 \quad (ب)$$

$$\text{ج : } x + z = 0 \quad ; \quad x = z, y = 0; \quad x = t \cos t, y = t \sin t, z = t; t = 0 \quad (ج)$$

١٣ - بين أن المنحنيين $(i) x = 2-t, y = -1/t, z = 2t^2$ و $(ii) x = 1+\theta, y = \sin \theta - 1, z = 2 \cos \theta$

يتقاطعان عند النقطة $P(1, -1, 2)$ بشكل عمودى . استنتج معادلات المستقيم المماس ، والمستوى العمودى لكل من المنحنيين عند النقطة P .

$$\text{ج : } (i) x - y - 4z + 6 = 0 \quad ; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4} \quad ; \quad x - y = 2, z = 2; \quad (ii) x + y = 0$$

١٤ - بين أن مماسات الحلزون $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ تلاقى المستوى xy بنفس الزاوية

١٥ - بين أن طول المنحنى (1) من النقطة $t = t_0$ إلى النقطة $t = t_1$ يعطى بـ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

أوجد طول الحلزون الوارد فى المسألة ١٤ من $t = 0$ إلى $t = t_1$. ج : $\sqrt{a^2 + b^2} t_1$

١٦ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لكل من المنحنيات عند النقطة المذكورة إلى جانب كل منها :

$$(أ) (1, 1, 1) \quad ; \quad 3x - 2y - z = 0; \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5; \quad (ج) (2, 2, 1) \quad ; \quad 4z^2 = xy, x^2 + y^2 = 8z;$$

$$(ب) (2, -3, 2) \quad ; \quad 3x + y + z - z^2 - 1 = 0; \quad 9x^2 + 4y^2 - 36z = 0;$$

$$\text{ج : } (أ) \quad ; \quad 2x + 7y - 8z - 1 = 0 \quad ; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-8} \quad ; \quad x - y = 0; \quad z - 1 = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1};$$

$$(ب) \quad ; \quad x + z - 4 = 0; \quad y + 3 = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{z-2}{1};$$

١٧ - أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطوح المفروضة عند النقطة المذكورة إلى جانب كل منها .

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14; (1, -2, 3) & \text{ج: } x - 2y + 3z = 14; \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3} \\
 (ب) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2; (x_1, y_1, z_1) & \text{ج: } x_1x + y_1y + z_1z = r^2; \frac{x-x_1}{x_1} = \frac{y-y_1}{y_1} = \frac{z-z_1}{z_1} \\
 (ج) \quad x^2 + 2z^2 = 3y^2; (2, -2, -2) & \text{ج: } x + 3y - 2z = 0; \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-2} \\
 (د) \quad 2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0; (1, -2, -3) & \text{ج: } z - 2y = 1; x - 1 = 0, \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-1} \\
 (هـ) \quad z = xy; (3, -4, -12) & \text{ج: } 4x - 3y + z = 12; \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+12}{1}
 \end{array}$$

١٨ - (أ) بين أن مجموع ما يقطعه المستوى المماس للسطح $x^{1/3} + y^{1/3} + z^{1/3} = a^{1/3}$ عند أية نقطة منه يساوى a .
 (ب) بين أن الجذر التربيعى لمجموع مربعات ما يقطعه المستوى المماس للسطح $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ عند أية نقطة منه يساوى a .

١٩ - بين أن كلا من زوجى السطوح التالين متماس عند النقطة المذكورة :

$$\begin{array}{ll}
 (أ) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 18, xy = 9; (3, 3, 0) & \\
 (ب) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0, x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9; (2, 1, 1) &
 \end{array}$$

٢٠ - بين أن كلا من زوجى السطوح التالين متعامد عند النقطة المفروضة .

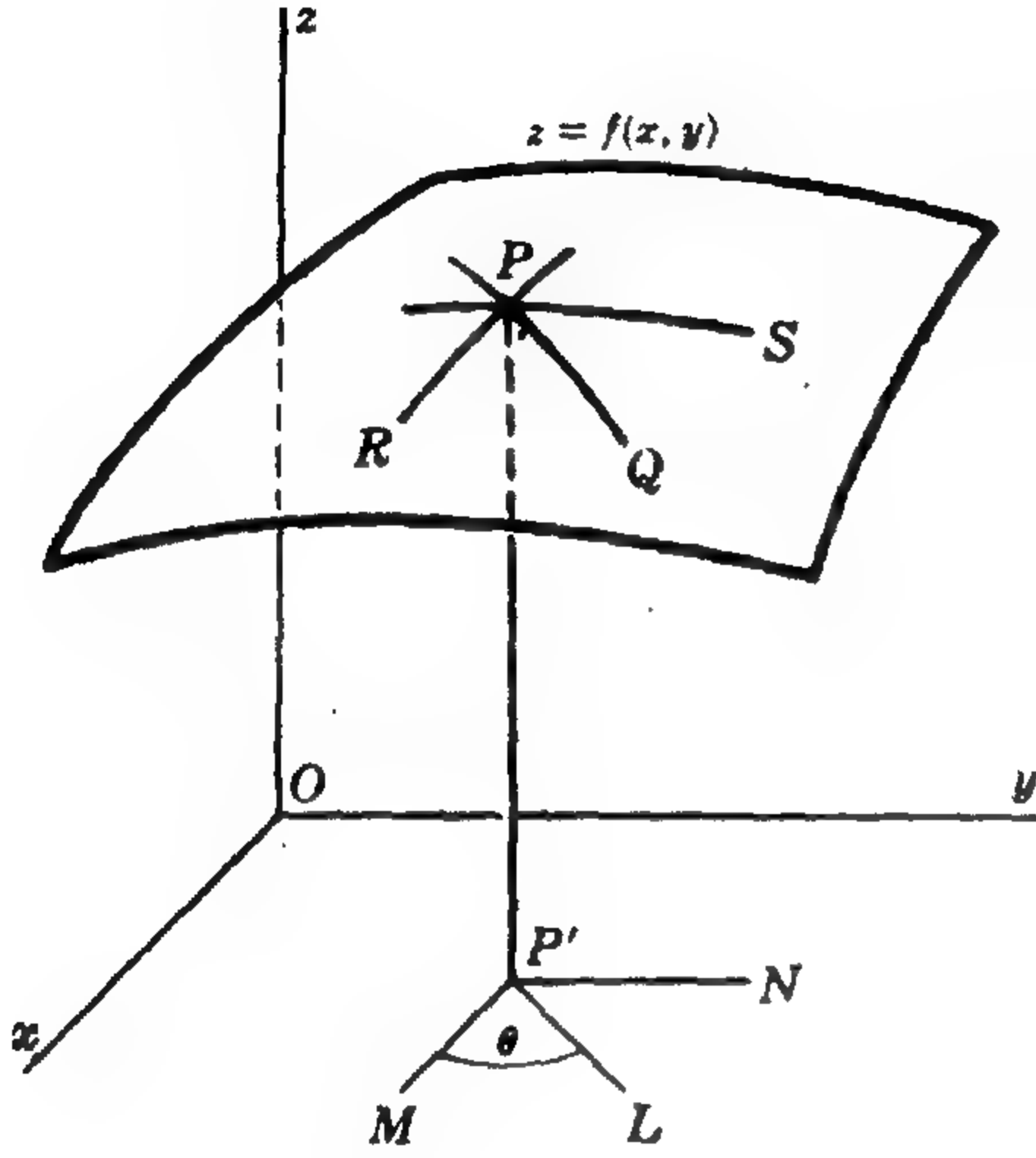
$$\begin{array}{ll}
 (أ) \quad x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8, 4x^2 - y^2 + 2z^2 = 14; (2, 2, 1) & \\
 (ب) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 50, x^2 + y^2 - 10z + 25 = 0; (3, 4, 5) &
 \end{array}$$

٢١ - بين أن كل سطح من السطوح الثلاثة (i) $14x^2 + 11y^2 + 8z^2 = 66$ ، (ii) $3z^2 - 5x + y = 0$ ، (iii) $xy + yz - 4zx = 0$ عمودى على السطحين الآخرين عند النقطة (1, 2, 1) .

الفصل الستون

القيم العظمى والصغرى

للمشتقات المتجهة



(شكل ٦٠ - ١)

المشتقات المتجهة • يمر بأية نقطة $P(x, y, z)$ من السطح $z = f(x, y)$ مستويان موازيان للمستويين الاحداثيين xOz و yOz ويقطعان السطح في القوسين PR و PS والمستوى xOy في المستقيمين $P'M$ و $P'N$ كما هو مبين في الشكل ٦٠ - ١ .

إن المشتقتين الجزئيتين $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ عند النقطة P أو عند النقطة $P'(x, y)$ تعطيان على الترتيب معدل تغير $z = P'P$ عندما نثبت y أو نثبت x ، أى أنهما تعطياننا معدل تغير z في الاتجاهين الموازيين لمحورين x و y أى ميل المنحنيين PR و PS عند النقطة P .

لننظر بعد ذلك في مستوى ، مار بالنقطة P عمودى على المستوى xOy ويصنع زاوية θ مع المحور x . ولنفرض أن هذا المستوى يقطع السطح في المنحنى PQ ويقطع المستوى xOy في المستقيم $P'L$.

إن المشتقة المتجهة لـ $f(x, y)$ عند P (أو عند P') في الاتجاه θ تعطى بـ

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

والمشتقة المتجهة تعطى معدل تغير $z = P'P$ في اتجاه PL أو تعطى ميل المنحنى PQ عند P .

إن المشتقة المتجهة عند موضع P هي دالة في θ . فإذا حدث أن وجد اتجاه تكون فيه المشتقة المتجهة عند P لها قيمة عظمى نسبية فإننا نسمى هذه القيمة تدرج $f(x, y)$ عند P . فالتدرج إذن هو ميل المماس الأكثر انحدارا للمنحنى يمكن رسمه على السطح عند P .

انظر المسائل ١ - ٨

تعطى المشتقة المتجهة في الاتجاه (α, β, γ) لدالة $w = F(x, y, z)$ عند $P(x, y, z)$ بـ

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma$$

انظر المسألة ٩

القيم العظمى والصغرى النسبية . لنفرض أن $z = f(x, y)$ قيمة عظمى (أو صغرى) نسبية عند $P_0(x_0, y_0, z_0)$. وأى مستوى مار به P_0 وعمودى على المستوى xOy يقطع السطح فى منحنى له قيمة عظمى (أو صغرى) عند النقطة P_0 ، أى أن المشتقة المتجهة $\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$ للدالة $z = f(x, y)$ لا بد أن تساوى صفرأ عند النقطة P_0 مهما كانت قيمة θ . إذن عند P_0 يكون $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

والنقطة التى يكون للدالة $z = f(x, y)$ عندها قيمة عظمى (أو صغرى) نسبية، إذا وجدت هذه النقطة هى من بين النقط (x_0, y_0) التى ينعدم عندها $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ فى آن واحد. وتتميز الحالات المختلفة نقبل دون برهان ما يلى :

ليكن $z = f(x, y)$ ولنفرض أن لهذه الدالة مشتقات جزئية أولى وثانية فى منطقة معينة تحوى النقطة (x_0, y_0, z_0) التى عندها $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ فإذا كان $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) < 0$ عند P_0 فإنه يكون $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \quad \text{قيمة صغرى نسبية عند } P_0 \text{ إذا كان}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0 \quad \text{قيمة عظمى نسبية عند } P_0 \text{ إذا كان}$$

أما إذا كان $\Delta > 0$ فليس للدالة عند P_0 قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وإذا كانت الحالة $\Delta = 0$ تكون طبيعة النقطة الحرجة P_0 غير معينة.

انظر المسائل ١٠ - ١٥

مسائل محلولة

١ - لتكن $P''(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطة ثانية على $P'L$ فى الشكل ٦٠ - ١ ولنرمز بـ Δs البعد $P'P''$

لنفرض أن للدالة $z = f(x, y)$ مشتقات جزئية متصلة تكون عندها استنادا إلى المسألة ٢٠ من الفصل ٥٧ :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

حيث يتول كل من ϵ_1 و ϵ_2 إلى الصفر عندما يتول كل من Δx و Δy إلى الصفر. ويكون متوسط معدل تغير z بين النقطتين P' و P'' هو :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta + \epsilon_1 \cos \theta + \epsilon_2 \sin \theta \end{aligned}$$

حيث θ الزاوية التى يصنعها المستقيم $P'P''$ مع المحور x .

لنجعل الآن $P' \rightarrow P''$ على $P'L$ فنحصل على المعدل اللحظى لتغير z أى على المشتقة المتجهة

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

٢- أوجد مشتقة $z = x^2 - 6y^2$ عند النقطة $P'(7, 2)$ في الاتجاه $\theta = 45^\circ$ (أ) $\theta = 135^\circ$ (ب)

إن المشتقة المتجهة عند أية نقطة $P'(x, y)$ في الاتجاه θ هي

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta = 2x \cos \theta - 12y \sin \theta$$

(أ) عند النقطة $P'(7, 2)$ في الاتجاه $\theta = 45^\circ$ يكون $dz/ds = 2 \cdot 7(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12 \cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$.

(ب) وعند النقطة $P'(7, 2)$ في الاتجاه $\theta = 135^\circ$ يكون $dz/ds = 2 \cdot 7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12 \cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}$.

٣- أوجد المشتقة المتجهة لـ $z = y e^x$ عند النقطة $P'(0, 3)$ في الاتجاه $\theta = 30^\circ$ (أ) $\theta = 120^\circ$ (ب)

$$\frac{dz}{ds} = y e^x \cos \theta + e^x \sin \theta$$

(أ) عند النقطة $(0, 3)$ في الاتجاه $\theta = 30^\circ$ يكون $dz/ds = 3 \cdot 1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)$.

(ب) وعند النقطة $(0, 3)$ في الاتجاه $\theta = 120^\circ$ يكون $dz/ds = 3 \cdot 1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})$.

٤- تعطى درجة الحرارة T لصفحة دائرية ساخنة عند أى موضع منها (x, y) بـ $T = \frac{64}{x^2 + y^2 + 2}$ ، بفرض أن نقطة الأصل في مركز الصفحة. أوجد معدل التغير لـ T في الاتجاه $\theta = \pi/3$ عند الموضع $(1, 2)$

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \cos \theta - \frac{64(2y)}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \sin \theta$$

وعند النقطة $(1, 2)$ في الاتجاه $\theta = \pi/3$ يكون $\frac{dT}{ds} = -\frac{128}{49} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{256}{49} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{64}{49}(1 + 2\sqrt{3})$.

٥- يعطى الجهد الكهربائي V عند أى نقطة (x, y) بـ $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. أوجد معدل تغير V عند النقطة $(3, 4)$ في الاتجاه نحو النقطة $(2, 6)$.

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cos \theta + \frac{y}{x^2 + y^2} \sin \theta$$

بما أن θ زاوية تقع في الربع الثاني و $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ، وبالتالي نحصل في الاتجاه المذكور وعند النقطة $(3, 4)$ على :

$$\frac{dV}{ds} = \frac{3}{25} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{25} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

٦- أوجد التدرج لسطح ونقطة المسألة ٢.

لدينا عند النقطة $(7, 2)$ وفي الاتجاه θ : $dz/ds = 14 \cos \theta - 24 \sin \theta$.

لإيجاد قيمة θ التي تجعل dz/ds نهاية عظمى نضع : $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dz}{ds}\right) = -14 \sin \theta - 24 \cos \theta = 0$.

ومنه نجد $\tan \theta = -24/14 = -12/7$ وبالتالي فإن الزاوية θ في الربع الثاني أو الرابع . فإذا كانت في الربع الثاني يكون $\sin \theta = 12/\sqrt{193}$ و $\cos \theta = -7/\sqrt{193}$. وإذا كانت في الربع الرابع يكون $\sin \theta = -12/\sqrt{193}$ و $\cos \theta = 7/\sqrt{193}$.

وبما أن المقدار $\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{d\theta} (-14 \sin \theta - 24 \cos \theta) = -14 \cos \theta + 24 \sin \theta$ سالب لزاوية الربع الرابع فإن التدرج هو $\frac{dz}{ds} = 14 \left(\frac{7}{\sqrt{193}} \right) - 24 \left(-\frac{12}{\sqrt{193}} \right) = 2\sqrt{193}$ والاتجاه هو $\theta = 300^\circ 15'$.
٧- أوجد التدرج لسطح ونقطة المسألة ٣ .

لدينا عند النقطة $(0, 3)$ وفي الاتجاه θ ، $dz/ds = 3 \cos \theta + \sin \theta$.

لايجاد قيمة θ التي تجعل dz/ds نهاية عظمى نضع $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dz}{ds} \right) = -3 \sin \theta + \cos \theta = 0$.

ومنه نجد $\tan \theta = 1/3$ وبالتالي فإن الزاوية θ في الربع الأول أو الثالث .

وبما أن المقدار $\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{d\theta} (-3 \sin \theta + \cos \theta) = -3 \cos \theta - \sin \theta$ سالب لزاوية الربع الأول فإن التدرج هو $\frac{dz}{ds} = 3 \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ والاتجاه هو $\theta = 18^\circ 26'$.
٨- بين أن V في المسألة ٥ تتغير بأقصى سرعة لها على طول المستقيمت القطرية الخارجة من نقطة الأصل :

لدينا في الاتجاه θ وعند نقطة (x_1, y_1) : $\frac{dV}{ds} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \cos \theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \sin \theta$.

وعندما $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dV}{ds} \right) = -\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \sin \theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \cos \theta = 0$ ، يكون $\tan \theta = \frac{y_1/(x_1^2 + y_1^2)}{x_1/(x_1^2 + y_1^2)} = \frac{y_1}{x_1}$.

والزاوية θ هي زاوية ميل المستقيم الذي يصل نقطة الأصل بالنقطة (x_1, y_1) .

٩- أوجد المشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ عند النقطة $(1, -2, 1)$ على طول المنحنى

$x = t, y = t - 3, z = t^2$ وفي جهة تزايد z .

إن مجموعة أعداد الاتجاه لمسار المنحنى عند $(1, -2, 1)$ هي $[1, 1, 2]$ وجيوب تمام الاتجاه هي $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$ والمشتقة المطلوبة هي :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

١٠- ابحث في القيم العظمى والصغرى لـ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$

أن الشرطين $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$ يتحققان عندما $x = 2$ و $y = -3$

وبما أن $f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 12$ ، فإنه من

الواضح أن $f(2, -3) = 12$ قيمة صغرى للدالة .

ومن الناحية الهندسية تمثل النقطة $(2, -3, 12)$ أدنى نقطة لسطح $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

١١- ابحث في القيم العظمى والصغرى لـ $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

أن الشرطين $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$ يتحققان عندما $x = 0, y = 0$

وعندما $x = -1, y = -1$ وعند النقطة $(0, 0)$ يكون $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$. وبالتالي فإن $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 > 0$ والنقطة $(0, 0)$ ليست قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

أما عند النقطة $(-1, -1)$ فيكون $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$ وبالتالي فإن $-27 < 0$ ، فإن $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ ، فإن $f(-1, -1) = 1$ تمثل قيمة عظمى للدالة.

١٢ - قسم العدد 120 إلى ثلاثة أقسام بحيث يكون مجموع حاصل ضرب كل اثنين منها نهاية عظمى.

لتكن x و y و $(x + y)$ الأقسام الثلاثة.

إذن الدالة التي نبحث عن قيمها العظمى هي $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y.$$

وعندما يكون $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0$ نجد $2x + y = 120$ و $x + 2y = 120$ والأعداد الثلاثة هي $1, 1, 118$ يكون $S = 237$ ومن الواضح إذن أن $S = 4800$ قيمة عظمى.

١٣ - أوجد أقرب نقطة لنقطة الأصل في المستوى $2x - y + 2z = 16$

لتكن (x, y, z) النقطة المطلوبة فمبدئاً يكون مربع البعد عن نقطة الأصل $D = x^2 + y^2 + z^2$ ، ولكن بما أن $2x - y + 2z = 16, y = 2x + 2z - 16$ فإن $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$. وبعطينا الشرطان $\frac{\partial D}{\partial x} = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$ و $\frac{\partial D}{\partial z} = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$ والمعادلتين $4x + 5z = 32, 5x + 4z = 32$ ، $x = z = 32/9$ التين تتحققان عندما $x = z = 32/9$. وبما أنه من المعلوم أن النقطة التي تجعل D أصغر ما يمكن موجودة فإن $(32/9, -16/9, 32/9)$ هي تلك النقطة.

١٤ - بين أن متوازي المستطيلات الذي حجمه V أكبر ما يمكن ومساحة سطحه ثابتة هو مكعب.

لتكن x, y, z أبعاد متوازي المستطيلات. عندئذ يكون $V = xyz$ و $S = 2(xy + yz + zx)$.

يمكن حل العلاقة الثانية بالنسبة لـ z والتعويض بعد ذلك في الأولى لنحصل على V كدالة في x و y ولكننا نفضل أن نتجاوز هذه الخطوة ونعتبر z دالة في x و y عندئذ يكون:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y} \quad \text{نجد}$$

$$\text{وعلى هذا فإن الشرطين} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = yz - \frac{xy(y+z)}{x+y} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{xy(x+z)}{x+y} = 0$$

$$\text{منه نجد} \quad x = y = z \quad \text{وهو المطلوب.} \quad x^2(z-y) = 0 \quad \text{و} \quad y^2(z-x) = 0$$

١٥ - أوجد الحجم V لأكبر متوازي مستطيلات يمكن رسمه داخل مجسم القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

لتكن $P(x, y, z)$ رأس متوازي المستطيلات الواقع في الثمن الأول عندئذ $V = 8xyz$.

لنعتبر z دالة في المتغيرين المستقلين x و y معرفة بمعادلة المجسم. عندئذ يكون شرطا القيمة العظمى هما :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ومن معادلة المجسم نحصل على} \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

وبحذف $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ من هاتين العلاقتين والملاقة (١) نحصل على

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2 x y^2}{b^2 z}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2 x^2 y}{a^2 z}\right) = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ومنه نجد أخيرا : (٢)}$$

ومن (٢) ومعادلة المجسم نجد $z = c\sqrt{3}/3$ ، $y = b\sqrt{3}/3$ ، $x = a\sqrt{3}/3$ وعلى هذا يكون :

$$V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$$

مسائل إضافية

١٦ - أوجد المشتقات المتجهة للدوال التالية عند النقطة المفروضة في الاتجاه المذكور إلى جانب كل منهما :

$$z = x^2 + y^2 - 3xy, (2, 1), \theta = \arctan 2/3. \quad (ب) \quad z = x^2 + xy + y^2, (3, 1), \theta = \pi/3. \quad (أ)$$

$$z = 2x^2 + 3xy - y^2, \text{ عند النقطة } (1, -1) \text{ ونحو النقطة } (1, 2) \quad (ج) \quad z = y + x \cos xy, (0, 0), \theta = \pi/3. \quad (د)$$

$$ج : (أ) \quad \frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{3}) \quad (ب) \quad 21\sqrt{13}/13 \quad (ج) \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \quad (د) \quad 11\sqrt{5}/5$$

١٧ - أوجد تدرج كل من دوال المسألة ١٦ عند النقطة المفروضة :

$$ج : (أ) \quad \sqrt{74} \quad (ب) \quad 3\sqrt{10} \quad (ج) \quad \sqrt{2} \quad (د) \quad \sqrt{26}$$

١٨ - بين أن تدرج الدالة $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ من المسألة ٨ ثابتا على أية دائرة $x^2 + y^2 = r^2$.

١٩ - لدينا مضبة مثثة بـ $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$ أوجد (أ) اتجاه أكبر ميل عند $(1, 1, 2)$ ، و (ب) اتجاه

خط المنسوب (حيث يكون z ثابتا) لاحظ أن الاتجاهين متعامدين (أ) $\arctan \frac{1}{2}$ في الربع الثالث

(ب) $\arctan -2$

٢٠ - بين أن مجموع مربعي مشتقي $z = f(x, y)$ عند أية نقطة من السطح وفي اتجاهين متعامدين ، ثابت ، وأنه

يساوي مربع التدرج .

٢١ - بفرض أن $z = f(x, y)$ و $w = g(x, y)$ بحيث يكون $\partial z / \partial x = \partial w / \partial y$ و $\partial z / \partial y = -\partial w / \partial x$. فإذا كان θ_1, θ_2 اتجاهين متعامدين فين أنه عند أية نقطة $P(x, y)$ يكون $\partial z / \partial s_1 = \partial w / \partial s_2$ و $\partial z / \partial s_2 = -\partial w / \partial s_1$.

٢٢ - أوجد مشتقات الدوال التالية عند النقطة والاتجاه المذكور إلى جانب كل منها.

(١) $[1, -2, 2], (2, 1, 3), xy^2z$ ، (ب) $x^2 + y^2 + z^2$ عند النقطة $(1, 1, 1)$ ونحو النقطة $(2, 3, 4)$

(ج) $x^2 + y^2 - 2xz$ عند النقطة $(1, 2, 3)$ وعلى $3x^2 - y^2 + 3z = 0$ ، وفي جهة تزايد z ، $x^2 + y^2 - 2xz = 6$

ج : (١) $-17/3$ (ب) $6\sqrt{14}/7$ (ج) 0

٢٣ - ابحث في القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال التالية :

(١) $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ ج : قيمة عظمى $= 2$ عندما $x = 1, y = 2$

(ب) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ج : قيمة صغرى $= -1$ عندما $x = 1, y = 1$

(ج) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ ج : قيمة صغرى $= 0$ عندما $x = 0, y = 0$

(د) $z = (x - y)(1 - xy)$ ج : لا يوجد قيم عظمى أو صغرى

(هـ) $z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$ ج : لا يوجد قيم عظمى أو صغرى

(و) $z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$ ج : قيمة صغرى $= -\sqrt{6}$ عندما $x = -\sqrt{6}/6, y = \sqrt{6}/3$

قيمة عظمى $= \sqrt{6}$ عندما $x = \sqrt{6}/6, y = -\sqrt{6}/3$

(ز) $z = xy(2x + 4y + 1)$ ج : قيمة عظمى $= 1/216$ عندما $x = -1/6, y = -1/12$

٢٤ - أوجد الأعداد الموجبة x, y, z بحيث يكون :

(١) $x + y + z = 18$ و x, y, z نهاية عظمى ، (ج) $x + y + z = 20$ و xyz^2 نهاية عظمى .

(ب) $xyz = 27$ و $x + y + z$ نهاية صغرى ، (د) $x + y + z = 12$ ، xy^2z^3 نهاية عظمى .

ج : (١) $x = y = z = 6$ ، (ب) $x = y = z = 3$ ، (ج) $x = y = 5, z = 10$ ، (د) $x = 2, y = 4, z = 6$

٢٥ - أوجد القيمة الصغرى لمربع البعد بين نقطة الأصل والمستوى $Ax + By + Cz + D = 0$.

ج : $D^2 / (A^2 + B^2 + C^2)$

٢٦ - (١) لنفرض أن مساحة سطح صندوق على شكل متوازي مستطيلات مكشوف من أعلى تساوي 12 m^2 . لوجد أعظم حجم ممكن (ب) لنفرض أن حجم صندوق على شكل متوازي مستطيلات مكشوف من أعلى يساوي 32 m^3 . أوجد أصغر مساحة سطح له .

ج : (١) 4m^3 . (ب) 48 m^2

٢٧ - أوجد أقرب نقطة من $z = xy - 1$ لنقطة الأصل .

ج : $(0, 0, -1)$

٢٨ - أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $(1, 1, 2)$ ويقطع من الثمن الأول أصغر حجم ممكن .

ج : $2x + 2y + z = 6$

٢٩ - عين قيم p و q بحيث يكون المجموع S لمربعات الأبعاد الرأسية للنقط $(2, 5)$ و $(1, 3)$ و $(0, 2)$ عن المستقيم $y = px + q$ أصغر ما يمكن .

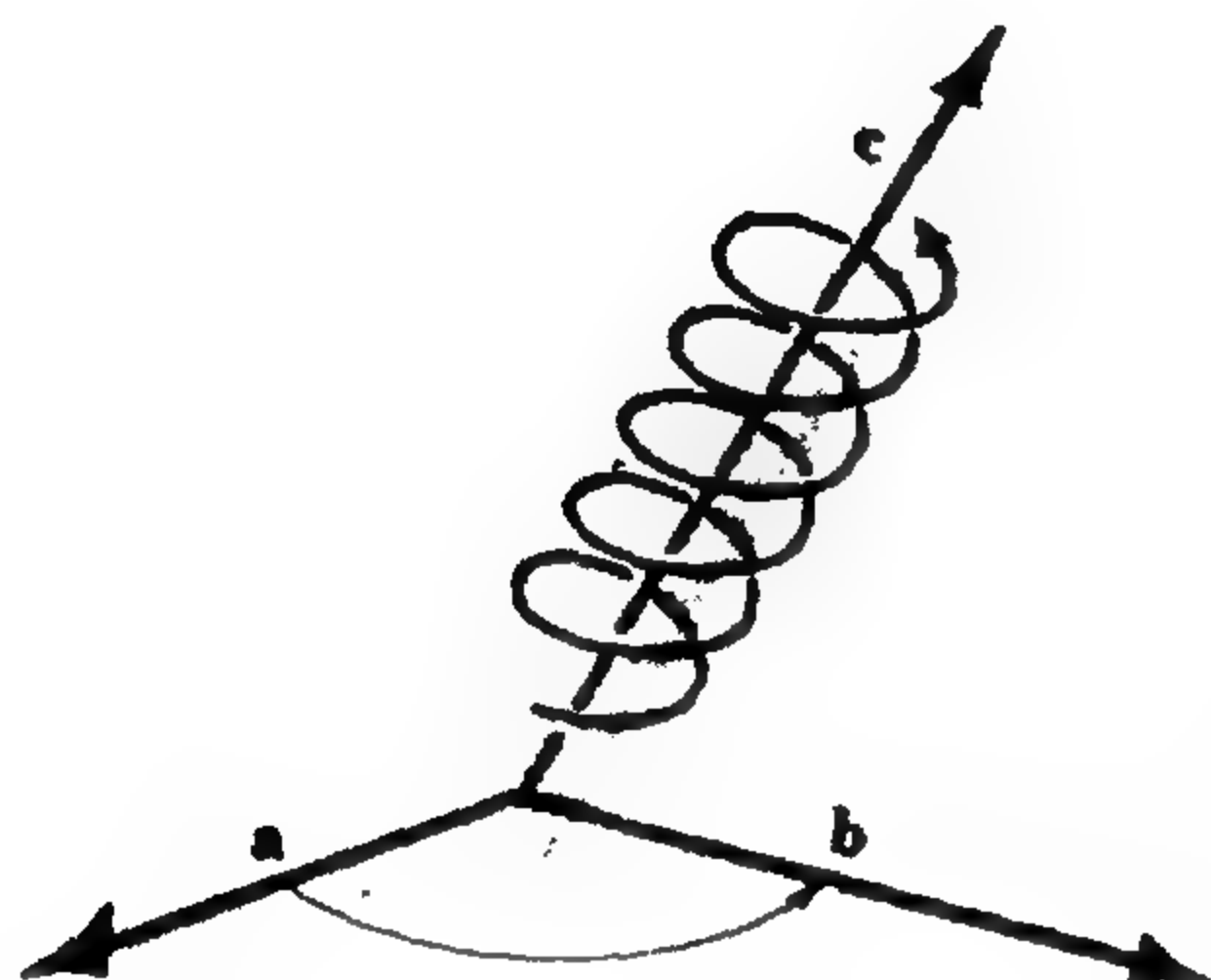
إرشاد أن : $S = (q - 2)^2 + (p + q - 3)^2 + (2p + q - 5)^2$

ج : $p = 3/2, q = 11/6$

الفصل الحارى والسّون

المتجهات فى الفراغ

ان دراسة الهندسة التحليلية المستوية : تتمتع إذا ما استخدمنا طرق المتجهات وذلك بسبب الهيمنة التقليدية على الموضوع الناشئ عن مفهوم ميل المستقيم. وعلى العكس من ذلك فإن تبسيطات هامة تطرأ على دراسة الهندسة التحليلية الفراغية باستخدام المتجهات .



شكل ٦١ - ١

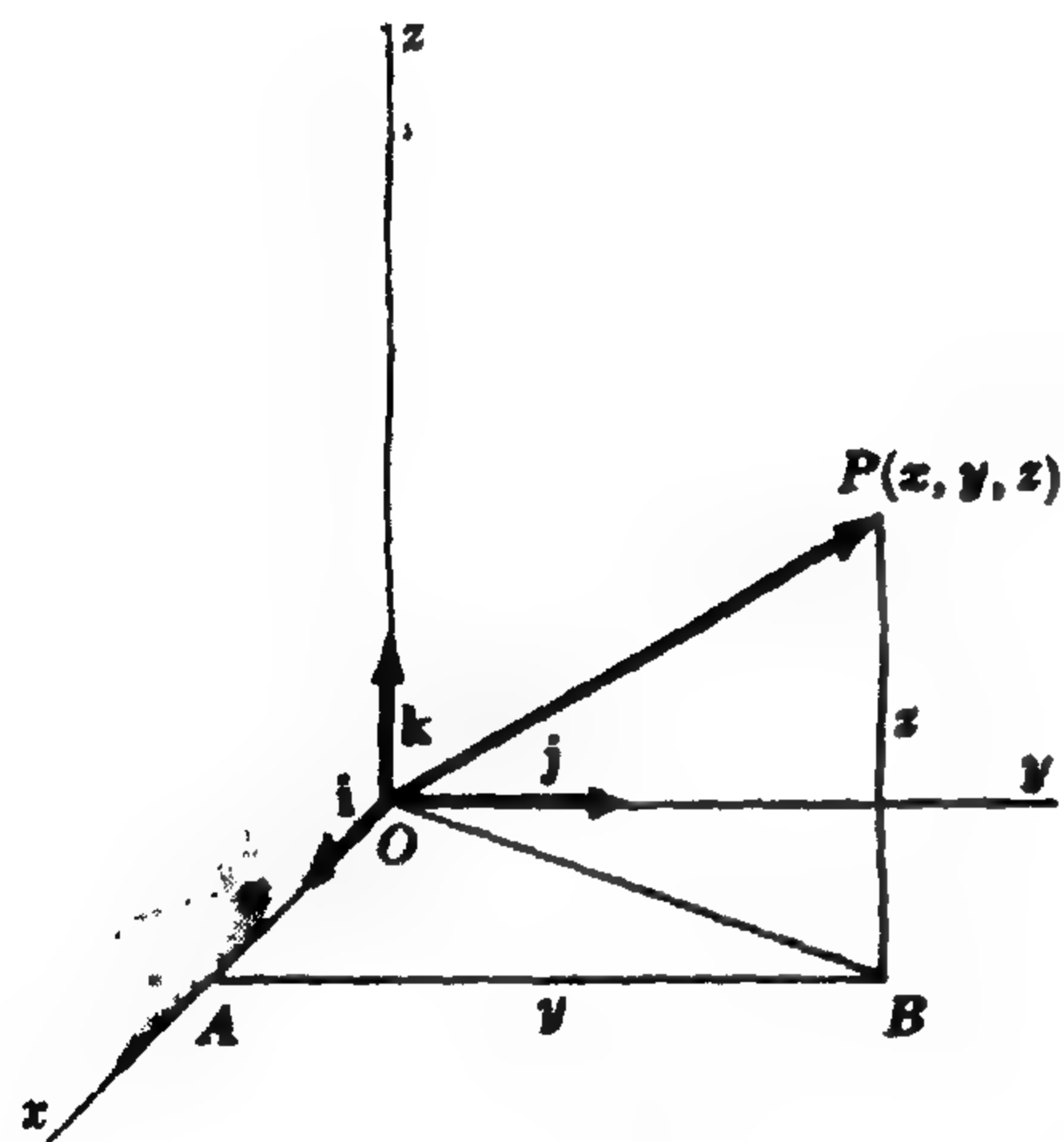
نقول عن ثلاثة متجهات a, b, c ليست واقعة فى مستوى واحد وليس فيها متجهان متوازيان ، ومنبعثة من نقطة مشتركة إنها تشكل مجموعة يمينية أو ثلاثية يمينية إذا كان للمتجه c جهة تقدم لولبية يمينية عندما تدور الزاوية الصغيرة من a إلى b كما هو مبين فى الشكل ٦١ - ١ . يتضح عندئذ أن جهة b ستكون جهة تقدم البريمة اليمنى عندما تدور من c إلى a وإن جهة a هى جهة تقدم البريمة عندما تدور من b إلى c .

لنفرض أننا اخترنا مجموعة محاور احداثية يمينية فى الفراغ وأنها اتخذنا i, j, k متجهات وحدة فى الاتجاه الموجب للمحاور x, y, z على الترتيب ، كما هو مبين فى الشكل ٦١ - ٢ عندئذ يمكن ، بشكل مواز لما تقدم فى الفصل ١٨ أن نكتب أى متجه a بالشكل :

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

بينما يمكن ، إذا كانت $P(x, y, z)$ نقطة عامة فى الفراغ ، أن نكتب متجه الموضع r للنقطة P بالشكل :

$$r = OP = OB + BP = OA + AB + BP \quad (1) \\ = xi + yj + zk$$



شكل ٦١ - ٢

بالإضافة لذلك فإن الجبر الذى قدمناه فى الفصل ١٨ يصلح هنا كذلك مع تغييرات بسيطة كالتى يستدعيها اختلاف الأبعاد المطلوبة فثلا إذا كان $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ، $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ فإن :

$$ka = ka_1 i + ka_2 j + ka_3 k \quad \text{حيث } k \text{ أى مقدار عددى .}$$

$$a = b \quad \text{إذا (وإذا فقط) كان : } a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1)i + (a_2 \pm b_2)j + (a_3 \pm b_3)k$$

$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ حيث θ هي الزاوية الصغرى بين a و b
 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1; i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$a \cdot b = 0$ إذا كان $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b متعامدين .

ومن (١) نستنتج البعد بين النقطة $P(x, y, z)$ ونقطة الأصل :

$$|r| = \sqrt{r \cdot r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (١-٢)$$

وإذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ أية

نقطتين (أنظر الشكل ٦١-٣) فإن :

$$\begin{aligned} \vec{P_1 P_2} &= \vec{P_1 B} + \vec{B P_2} = \vec{P_1 A} + \vec{AB} + \vec{B P_2} \\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

ومنـه يكون :

$$|\vec{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (٢-ب)$$

وهي الصيغة الشائعة التي تعطى المسافة بين نقطتين .

أنظر المسائل ١ - ٣

جيوب تمام اتجاه متجه : ليكن لدينا المتجه $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ولنفرض أنه يصنع الزوايا α, β, γ مع المحاور x, y, z الموجبة على الترتيب ، كما هو مبين في الشكل ٦١-٤ لدينا إذن :

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{i}| |\mathbf{a}| \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cos \alpha$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \beta, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \gamma$$

ومنـه ينتج

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

وهذه هي جيوب تمام اتجاه a وبما أن :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

شكل ٦١ - ٤

فإن المتجه $u = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$ هو متجه وحدة مواز

للمتجه a .

المتجه العمودى على متجهين مفروضين : ليكن :

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

متجهين غير متوازيين من نقطة بداية مشتركة P . يمكننا بحسابات سهلة برهنة أن :

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (٢)$$

عمودى على كل من a و b وبالتالي فهو عمودى على مستوى هذين المتجهين .
سنرى في المسألة ٥ و ٦ أن :

$$|c| = |a||b| \sin \theta \quad (٤)$$

وهي مساحة متوازي الأضلاع الذى فيه a و b ضلعان غير متوازيين .
وإذا كان a و b متوازيين فإن $b = ka$ ومن (٣) نجد أن $c = 0$ أى أن c هو المتجه الصفري . والمتجه الصفري ، حسب التعريف هو متجه طوله صفر وليس له اتجاه محدد .

حاصل الضرب المتجهة لمتجهين : ليكن :

$$b = b_1i + b_2j + b_3k \quad و \quad a = a_1i + a_2j + a_3k$$

متجهين ببداية مشتركة P لنرمز بـ n لمتجه الوحدة العمودى على مستوى a و b بحيث تشكل a, b, n بهذا الترتيب ، ثلاثية يمينية عند P كما هو مبين في الشكل ٦١ - ٥ . يعرف حاصل الضرب المتجه للمتجه a في المتجه b بالصيغة

$$a \times b = |a||b| \sin \theta n \quad (٥)$$

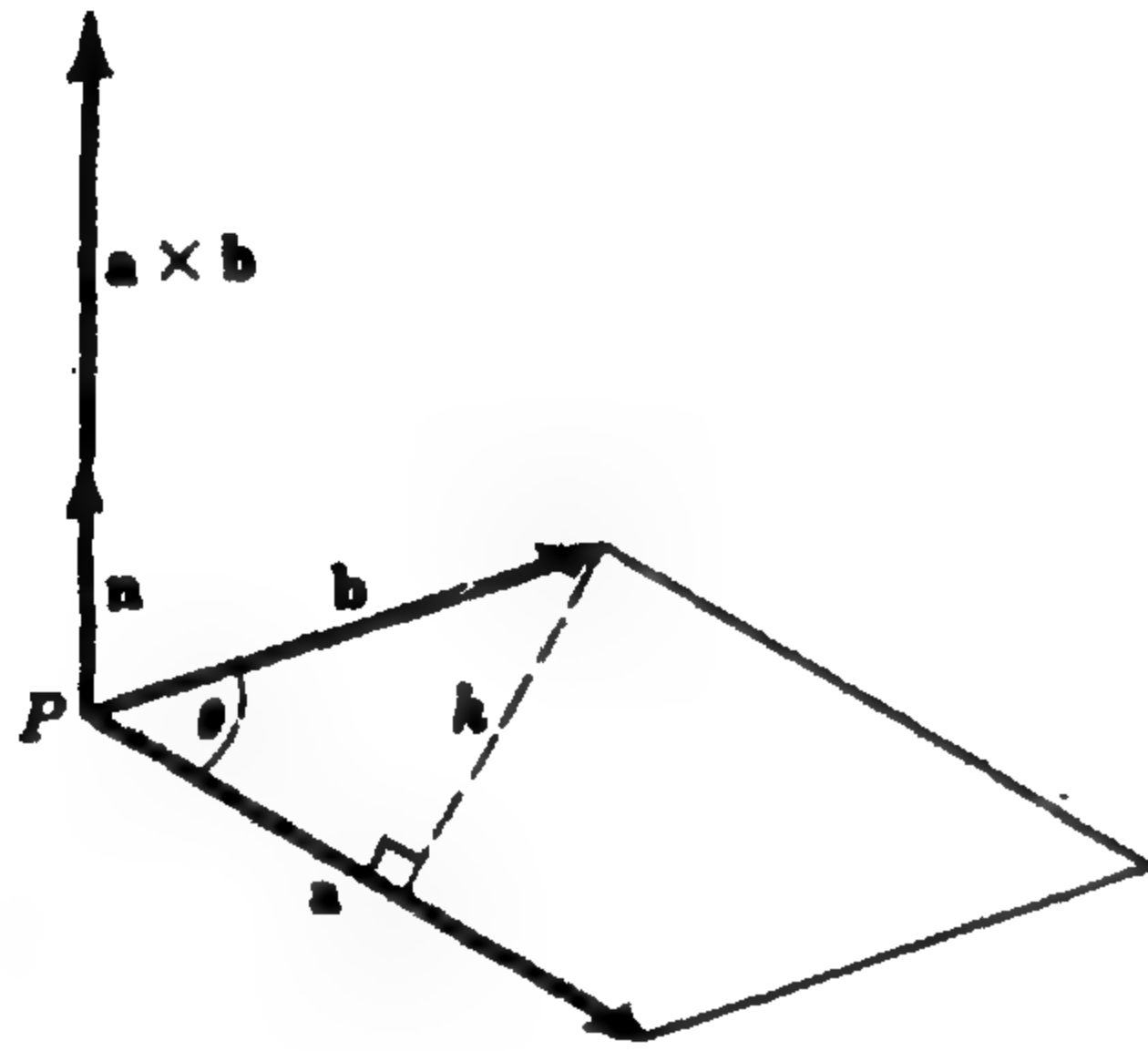
حيث θ هي الزاوية الصفري بين a و b وعلى هذا فإن المتجه $a \times b$ عمودى على كل من a و b .

واستناداً إلى المسألة ٦ يكون :

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$$

مساوياً لمساحة متوازي الأضلاع الذى فيه a و b ضلعان غير متوازيين .

وإذا كان a و b متوازيين فإن $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ ومنه $a \times b = 0$ وعلى هذا :



شكل ٦١ - ٥

$$\text{فإن : } (٦) \quad i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

وإذا عكسنا في (٥) موضعى a و b فإنه ينبغى أن نضع $-n$ بدلا من n وبالتالي :

$$b \times a = -(a \times b) \quad (٧)$$

وبما أننا اخترنا مجموعة المحاور الإحداثية يمينية فإنه ينتج أن :

$$\begin{aligned} i \times j &= k & j \times k &= i & k \times i &= j \\ j \times i &= -k & k \times j &= -i & i \times k &= -j \end{aligned} \quad (٨)$$

وسنبرهن في المسألة ٨ قانون التوزيع التالى لأي متجهات :

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \quad (٩)$$

وبضرب المعادلة (٩) في - واستخدام المعادلة (٧) لنحصل على قانون التوزيع المرافق :

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b \quad (٩)$$

ومن هذا ينتج أن :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \quad (10)$$

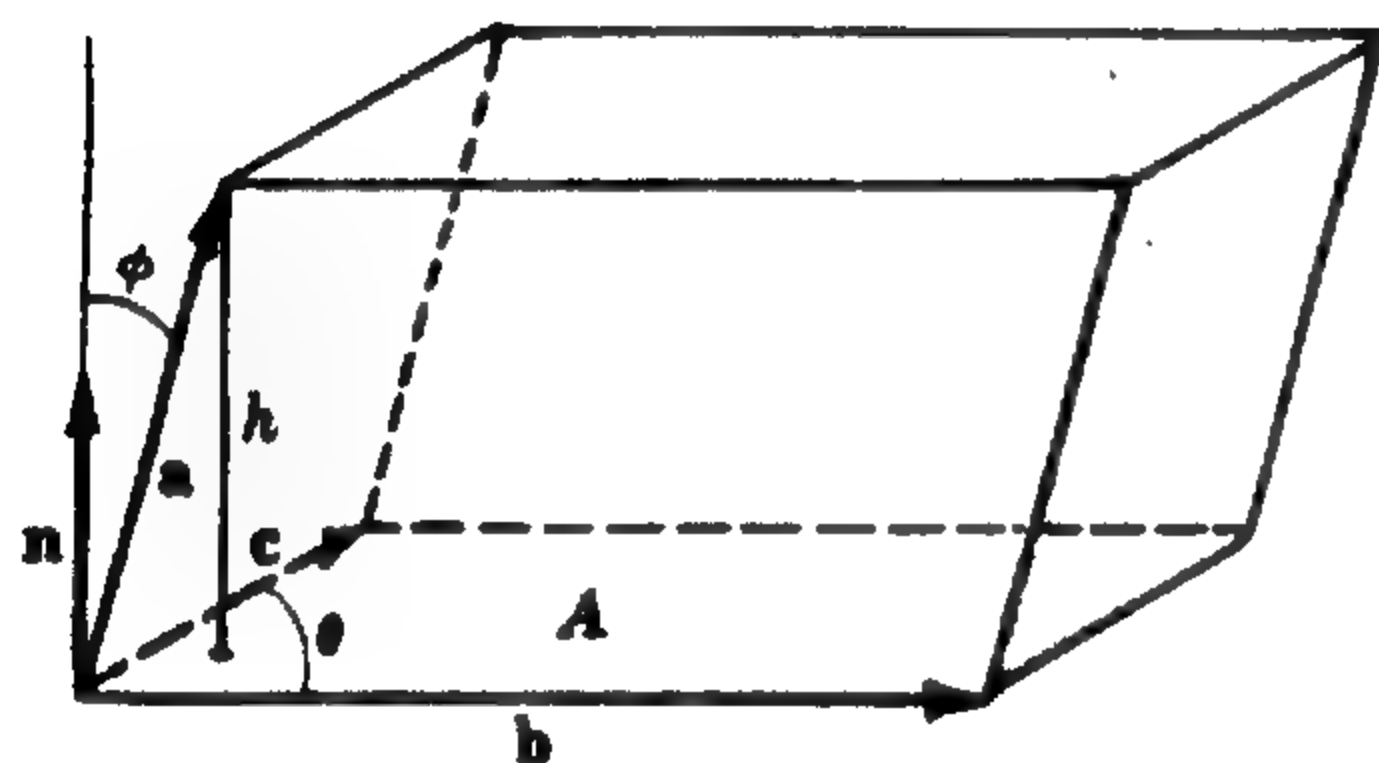
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (11)$$

أنظر المسألتين ٩ - ١٠

حاصل الضرب الثلاثي العددي : لتكن θ أصغر الزاويتين

بين المتجهين b و c كما هو مبين في الشكل ٦١-٦ ولتكن ϕ أصغر الزاويتين بين المتجهين a و $b \times c$. نعرف حاصل الضرب الثلاثي العددي على أنه :

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= a \cdot |b| |c| \sin \theta n = |a| |b| |c| \sin \theta \cos \phi \\ &= (|a| \cos \phi) (|b| |c| \sin \theta) = hA \\ &= \text{حجم متوازي السطوح} \end{aligned}$$



شكل ٦١ - ٦

يمكننا أن نبرهن أن (أنظر المسألة ١١).

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a \times b) \cdot c \quad (12)$$

$$c \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a \cdot (b \times c) \quad \text{والآن :}$$

$$b \cdot (a \times c) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a \cdot (b \times c) \quad \text{بينما :}$$

ولدينا ، بشكل مائل :

$$a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a) \quad (13)$$

$$a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c) = -c \cdot (b \times a) = -a \cdot (c \times b) \quad (14) \text{ و}$$

وينتج من تعريف $a \cdot (b \times c)$ كحجم ، أنه إذا كانت a, b, c واقعة في مستوى واحد فإن $a \cdot (b \times c) = 0$ وبالعكس .

إن الأقواس المستخدمة في $a \cdot (b \times c)$ و $(a \times b) \cdot c$ ليست ضرورية . فثلا لا يمكننا أن نفهم $a \cdot b \times c$ إلا على الشكل $a \cdot (b \times c)$ أو على الشكل $(a \cdot b) \times c$ والشكل الأخير مرفوض لأن $a \cdot b$ عددي و $(a \cdot b) \times c$ لا معنى له .
أنظر المسألة ١٢ .

حاصل الضرب المتجه الثلاثى . سنرى في المسألة ١٢ . أن :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (١٥)$$

وبشكل مماثل سنجد :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad (١٦)$$

وعمل هذا اذا استثنينا الحالة التى يكون فيها \mathbf{b} عمودياً على كل من \mathbf{c} ، \mathbf{a} فإن :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

مع العلم أن استخدام الأقواس هنا ضرورى .

الخط المستقيم . يمكن في الفراغ تعريف المستقيم الذى يمر بنقطة مفروضة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على أنه المحل الهندسى للنقطة

$P(x, y, z)$ بحيث يكون P_0P موازياً لاتجاه مفروض $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ليكن \mathbf{r} ، \mathbf{r}_0 متجهى الموضع لـ P و P_0

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = k\mathbf{a} \quad (k \text{ متغير عددي}) \quad (١٧)$$

وهى المعادلة الاتجاهية للمستقيم . (أنظر الشكل ٦١ - ٧)

لنكتب (١٧) بالشكل :

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}),$$

وبفصل المركبات نجد :

$$x - x_0 = ka_1, \quad y - y_0 = ka_2, \quad z - z_0 = ka_3$$

وبحذف k نجد :

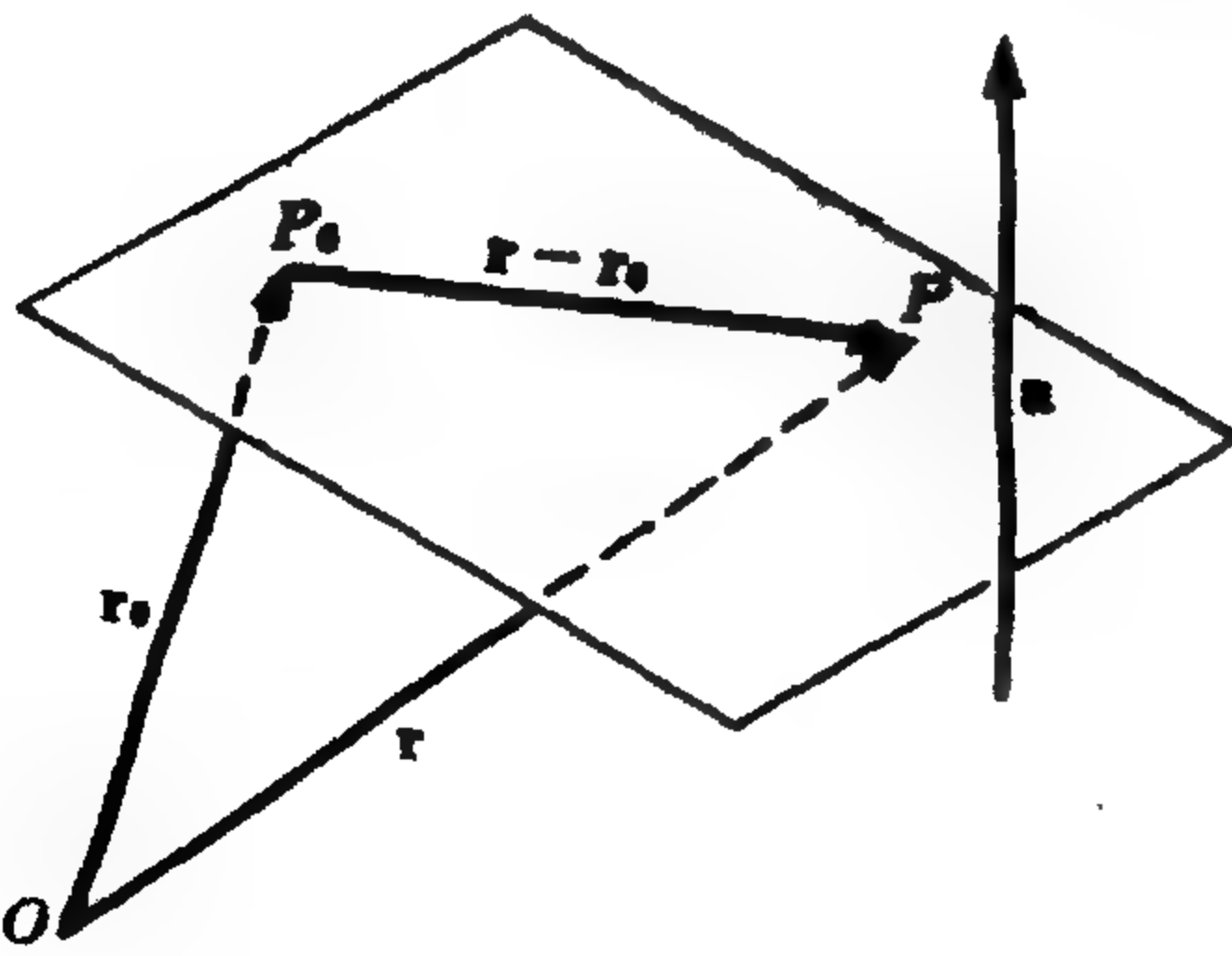
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (١٨)$$

وهذه هى معادلتا المستقيم في الاحداثيات القائمة . أن $[a_1, a_2, a_3]$

أعداد الإتجاه للمستقيم و $\left[\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right]$ جيوب تمام إتجاه المستقيم .

إذا انعدم أى من الأعداد a_1, a_2, a_3 فإنه ينبغى أن ينعدم البسط المقابل في (١٨) فإذا كان على سبيل المثال $a_1 = 0$ ، $a_2 a_3 \neq 0$ فإن معادلتى المستقيم هما :

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$



شكل ٦١ - ٨

المستوى : نعرف المستوى في الفراغ المار بنقطة مفروضة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على أنه المحل الهندسى لجميع المستقيبات المارة بالنقطة P_0 والعمودية على المستقيم (الإتجاه) المفروض $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ فإذا كانت $P(x, y, z)$ أية نقطة أخرى في المستوى فإن $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}$ عمودى على \mathbf{a} كما هو مبين في الشكل ٦١ - ٨ والمعادلة المطلوبة هى :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (١٩)$$

وتأخذ هذه المعادلة فى الإحداثيات القائمة الشكل :

$$\{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} \cdot (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{أو}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{أو}$$

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \quad \text{حيث}$$

وبالعكس إذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة على السطح :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad \text{إذن :}$$

وبالطرح نجد أن $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$

$$= (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot \{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} = 0$$

وهذا يعنى أن المتجه الثابت $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ عمودى على السطح عند كل نقطة من نقطة . وعلى هذا فإن السطح مستوى .

مسائل محلولة

١ - أوجد بعد النقطة $P_1(1, 2, 3)$ عن (أ) نقطة الأصل ، (ب) المحور السينى ، (ج) المحور z (د) المستوى xy

(هـ) النقطة $P_2(3, -1, 5)$

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad (أ)$$

$$\mathbf{AP}_1 = \mathbf{AB} + \mathbf{BP}_1 = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; \quad |\mathbf{AP}_1| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad (ب)$$

$$\mathbf{DP}_1 = \mathbf{DE} + \mathbf{EP}_1 = 2\mathbf{j} + \mathbf{i}; \quad |\mathbf{DP}_1| = \sqrt{5} \quad (ج)$$

$$\mathbf{BP}_1 = 3\mathbf{k}; \quad |\mathbf{BP}_1| = 3 \quad (د)$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (3-1)\mathbf{i} + (-1-2)\mathbf{j} + (5-3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad (هـ)$$

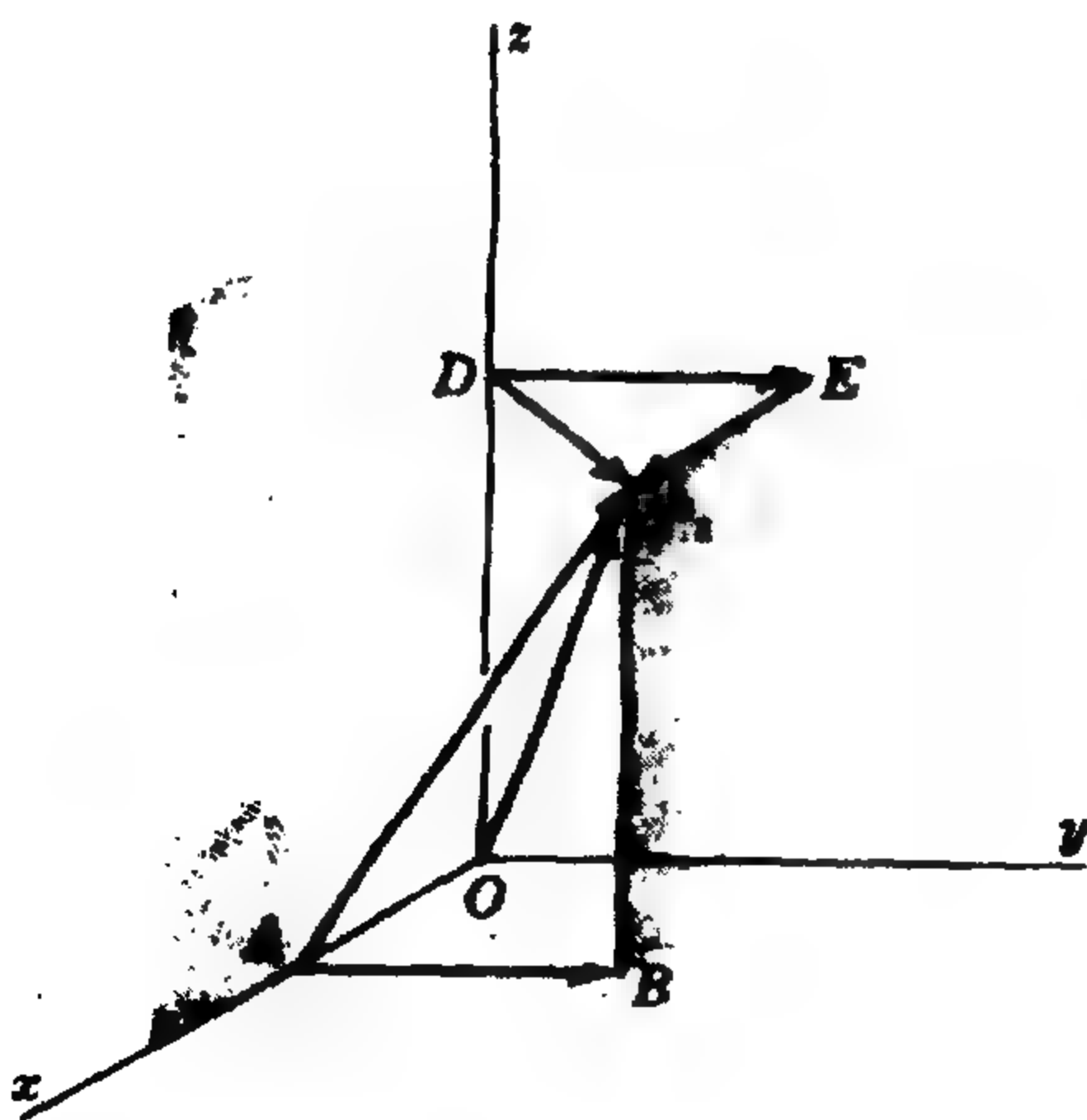
$$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

٢ - أوجد الزاوية θ المحصورة بين المتجه الذى يصل $P_1(1, 2, 3)$ بـ O

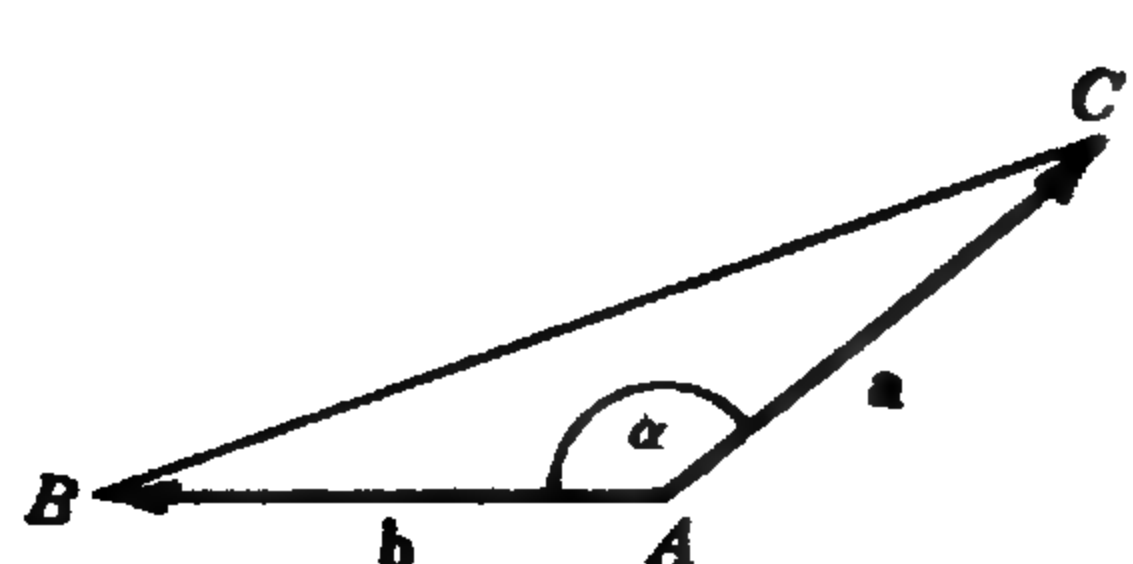
والمتجه الذى يصل $P_2(2, -3, -1)$ بـ O

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \frac{1(2) + 2(-3) + 3(-1)}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}, \quad \theta = 120^\circ$$



شكل ٦١ - ١



شكل ٦١ - ١٠

٣- أوجد الزاوية $\alpha = \angle BAC$ فى المثلث ABC الذى رؤوسه هى :
 $A(1, 0, 1), B(2, -1, 1), C(-2, 1, 0).$
 $\mathbf{a} = \mathbf{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
 $\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-3 - 1}{\sqrt{22}} = -0.85280, \quad \alpha = 148^\circ 31'$

٤- أوجد جيوب تمام إتجاه المتجه $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ،
 إن جيوب تمام الإتجاه هى :

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{13}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{12}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{4}{13}$$

٥- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ متجهين منبعثين من نقطة P . برهن أنه إذا كان :

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

فإن θ الزاوية الصغرى بين \mathbf{a} و \mathbf{b} . حيث $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$

لدينا $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ ومنه :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \right)^2} = \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

وبالتالى فإن $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ وهو المطلوب.

٦- أوجد مساحة متوازى الأضلاع ، الذى ضلعاها غير المتوازيين هما \mathbf{a} و \mathbf{b} .
 يتضح من الشكل ٦١ - ١١ ، وأن $h = |\mathbf{b}| \sin \theta$ وأن المساحة هى $h |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$.

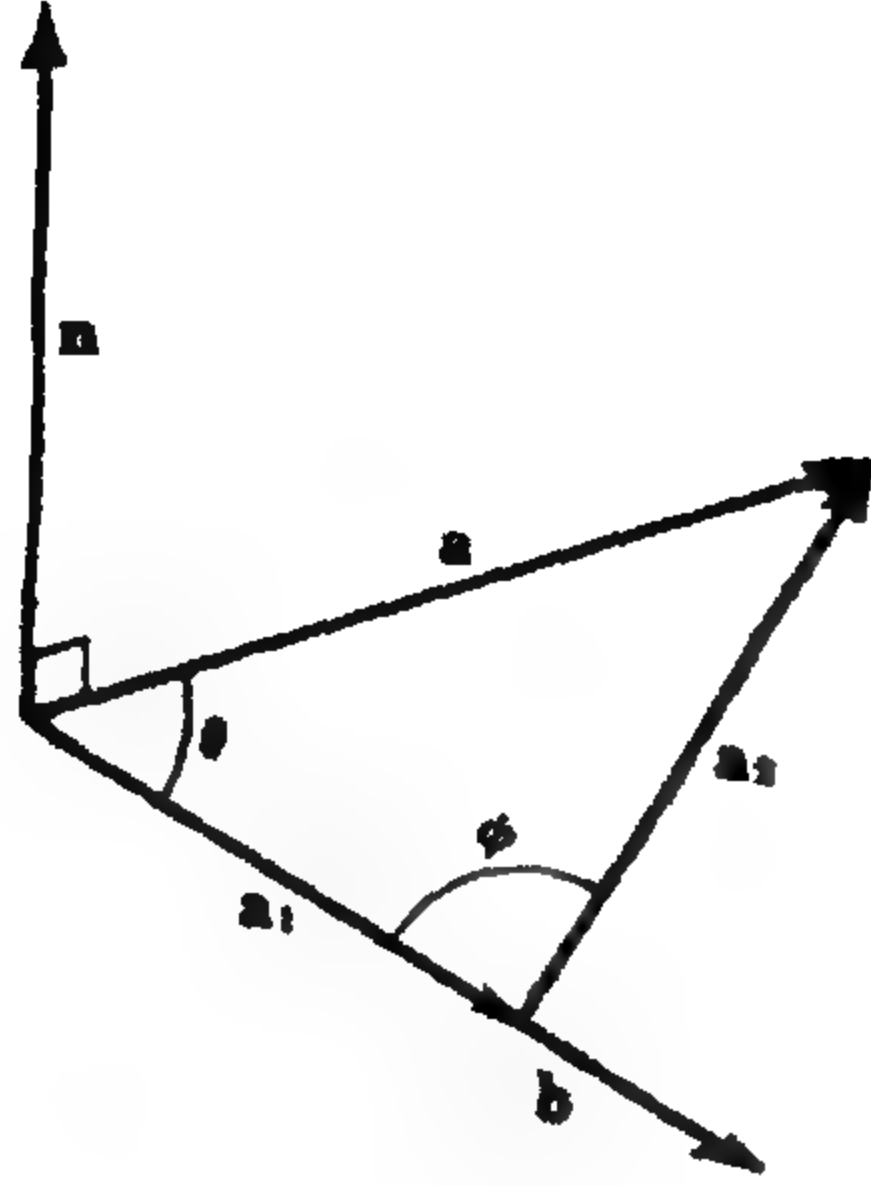
٧- لنفرض أن \mathbf{a}_1 و \mathbf{a}_2 هما مركبتا المتجه \mathbf{a} فى الإتجاه الموازى والممودى للمتجه \mathbf{b} كما هو مبين فى الشكل ٦١ - ١٢ بين أن :

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

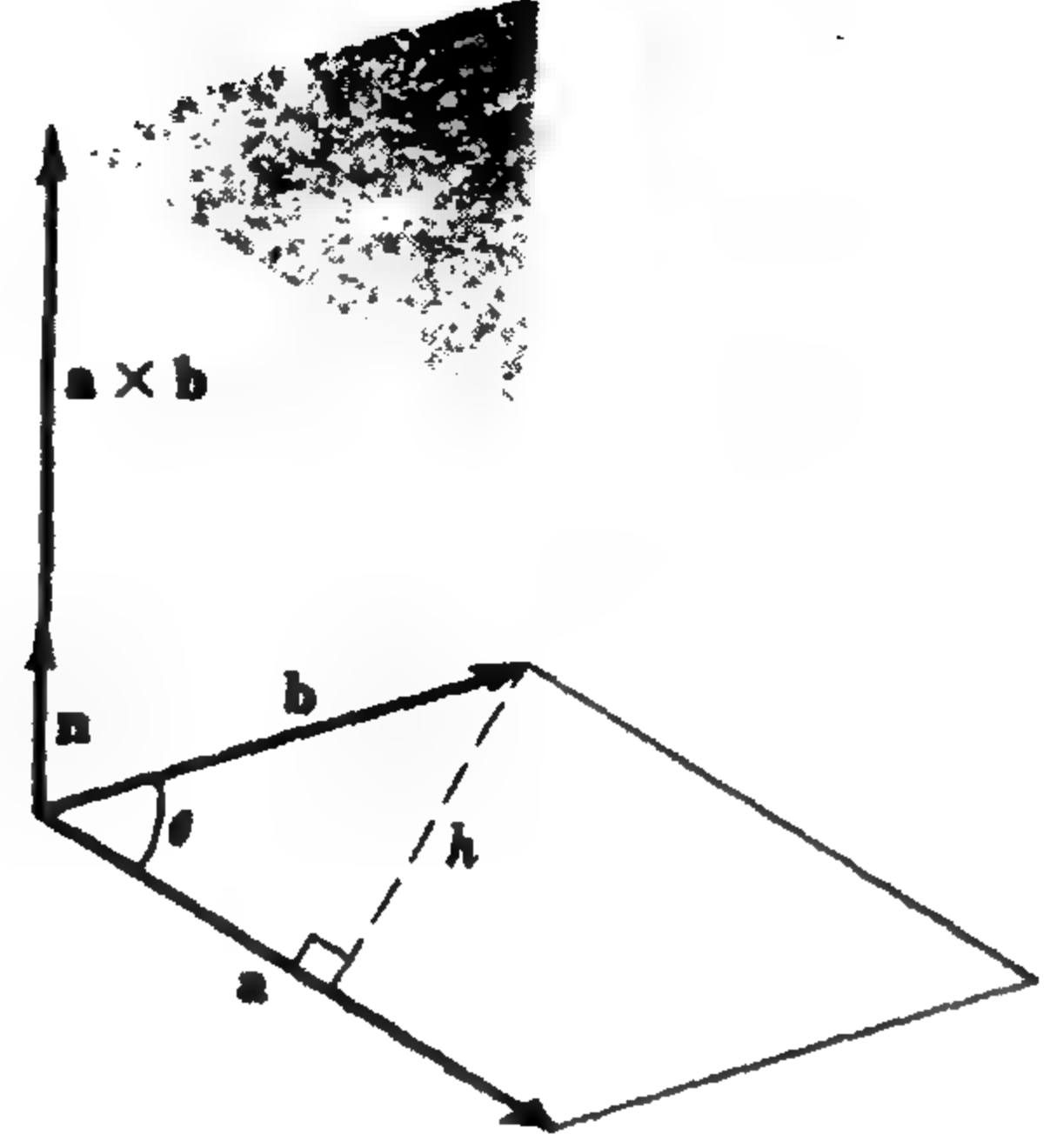
وإذا كانت θ الزاوية بين \mathbf{a} و \mathbf{b} فإن $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}| \cos \theta$ و $|\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}| \sin \theta$. وبما أن $\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}$ واقعة فى مستوى واحد فإن :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} &= |\mathbf{a}_2| |\mathbf{b}| \sin \theta \mathbf{n} = |\mathbf{a}| \sin \theta |\mathbf{b}| \mathbf{n} \\ &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

وحيث أن \mathbf{a}_1 و \mathbf{b} متوازيان فإن $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$



شكل ٦١ - ١٢



شكل ٦١ - ١١

٨- برهن أن $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$.

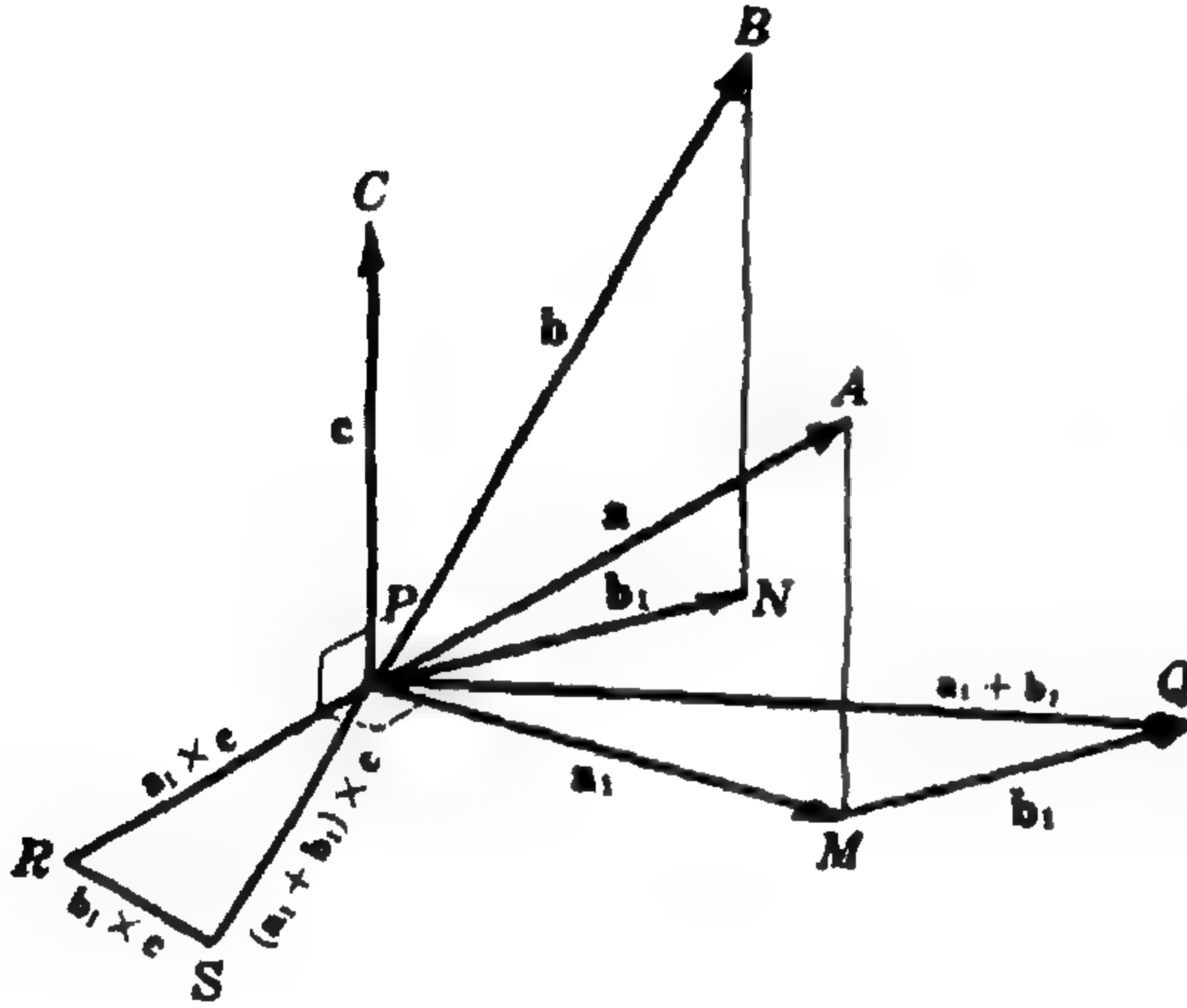
لنفرض في الشكل ٦١-١٣ أن نقطة البداية P للمتجهات a, b, c واقعة في مستوى الورقة بينما تقع نهايات المتجهات فوق هذا المستوى. وليكن b_1, a_1 هما المركبتين العموديتين على c, a على الترتيب. عندئذ تقع $a_1 \times c, b_1 \times c, a_1 + b_1 \times c$ في مستوى الورقة. ومن تشابه المثلثين PMQ و PRS نجد أن:

$$\frac{RS}{PR} = \frac{|b_1 \times c|}{|a_1 \times c|} = \frac{|b_1| |c|}{|a_1| |c|} = \frac{|b_1|}{|a_1|} = \frac{MQ}{PM}$$

وبما أن PR عمودى على PM و RS عمودى على MQ فإن PS عمودى على PQ ومنه $PS = PQ \times c$ وبما أن:

$$PS = PQ \times c = PR + RS;$$

$$(a_1 + b_1) \times c = a_1 \times c + b_1 \times c \quad \text{فإنه لدينا}$$



شكل ٦١ - ١٣

وحيث أنه، استناداً إلى المسألة ٧، يمكن تبديل a_1 و b_1 بـ a, b

على الترتيب فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة:

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c$$

٩- إذا كان $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ، و $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ بين أن:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

استناداً إلى قانون التوزيع لدينا :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
 &= a_1 \mathbf{i} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) + a_2 \mathbf{j} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) + a_3 \mathbf{k} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
 &= (a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j}) + (-a_2 b_1 \mathbf{k} + a_2 b_3 \mathbf{i}) + (a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i}) \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

١٠ - اشتق قانون الجيوب فى علم المثلثات المستوية .

اعتبر المثلث ABC الذى لأضلاعه a, b, c الأطوال a, b, c على الترتيب ، والذى زواياه الداخلية هي α, β, γ ،

فنجده :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{c} \times \mathbf{a} \quad \text{أو} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{إذن :} \\
 \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{أو} \quad \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{و}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha = |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \sin \beta \quad \text{وهكذا :}$$

$$ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta$$

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad \text{ومنه}$$

١١ - إذا كان $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$ ، فبين أن :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot [(b_2 c_3 - b_3 c_2) \mathbf{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \mathbf{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \mathbf{k}] \\
 &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

١٢ - بين أن : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0$.

استناداً إلى المعادلة (١٢) لدينا $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

١٣ — إذا كانت a, b, c هي متجهات المسألة ١١ فين أن : $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

$$\begin{aligned}
 a \times (b \times c) &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times [(b_2 c_3 - b_3 c_2)i + (b_3 c_1 - b_1 c_3)j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)k] \\
 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} \\
 &= i(a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3) \\
 &\quad + j(a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_2 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1) \\
 &\quad + k(a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2) \\
 &= \begin{cases} i b_1 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ + j b_2 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ + k b_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \end{cases} - \begin{cases} i c_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ + j c_2 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ + k c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \end{cases} \\
 &= (b_1 i + b_2 j + b_3 k)(a \cdot c) - (c_1 i + c_2 j + c_3 k)(a \cdot b) \\
 &= b(a \cdot c) - c(a \cdot b) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

١٤ — إذا كان l_1 و l_2 مستقيمين غير متقاطعين في الفراغ فإن أصغر بعد d بينهما هو بعد أية نقطة على l_1 عن المستوى المار بـ l_2 والموازي لـ l_1 ، أى أنه إذا كانت P_1 نقطة على l_1 و P_2 نقطة على l_2 ، فإن البعد d يساوى ، بنقض النظر عن الإشارة ، المسقط العمودى لـ $P_1 P_2$ على العمود المشترك لـ l_1 و l_2 .

ليكن l_1 ماراً بـ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ وفي الاتجاه $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ وليكن l_2 ماراً بـ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ وفي الاتجاه $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$.

عندئذ يكون $P_1 P_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$ ويكون المتجه $a \times b$ عمودياً على كل من l_1 و l_2 وهكذا يكون

$$d = \left| \frac{P_1 P_2 \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right| = \left| \frac{(r_2 - r_1) \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right|$$

١٥ — اكتب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $P_0(1, 2, 3)$ ويوازي $a = 2i - j - 4k$. أى النقطة $A(3, 1, -1)$, $B(1/2, 9/4, 4)$, $C(2, 0, 1)$ تقع على هذا المستقيم .

إن المعادلة الاتجاهية للمستقيم ، استناداً على المعادلة (١٧) هي :

$$(xi + yj + zk) - (i + 2j + 3k) = k(2i - j - 4k)$$

$$(x-1)i + (y-2)j + (z-3)k = k(2i - j - 4k) \quad (i) \quad \text{أو}$$

والمعادلتان في الإحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \quad (ii)$$

وباستخدام (ii) يتضح بسهولة أن A و B تقعان على المستقيم في حين لا تقع C . أما إذا أردنا أن نستخدم المعادلة الاتجاهية (i) فإن النقط $P(x, y, z)$ التي تقع على المستقيم يمكن إيجادها بإعطاء قيمة عددية لـ k ، ثم نقارن المركبات والنقطة A تقع على المستقيم لأن :

$$(3-1)i + (1-2)j + (-1-3)k = k(2i - j - 4k)$$

عندما $k = 1$. وبشكل مماثل تقع B على المستقيم لأن :

$$-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k = k(2i - j - 4k)$$

عندما $k = -\frac{1}{4}$. أما النقطة C فليست على المستقيم لأن :

$$i - 2j - 2k = k(2i - j - 4k)$$

غير محققة لأية قيمة لـ k .

١٦ - اكتب معادلة المستوى.

(أ) الذى يمر بالنقط $P_0(1, 2, 3)$ ويوازي المستوى $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

(ب) الذى يمر بالنقطتين $P_0(1, 2, 3)$ و $P_1(3, -2, 1)$ ويتعامد مع المستوى $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

(ج) الذى يمر بالنقط $P_0(1, 2, 3)$, $P_1(3, -2, 1)$, $P_2(5, 0, -4)$.

لتكن $P(x, y, z)$ نقطة عامة في المستوى المطلوب.

(أ) إن المتجه $a = 3i - 2j + 4k$ عمودى على المستوى المقروض وعلى المستوى المطلوب. ولذا فإن المعادلة الاتجاهية للمستوى الأخير هي :

$$(r - r_0) \cdot a = 0$$

والمعادلة في الاحداثيات المتعامدة :

$$3(x-1) - 2(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$\text{أو } 3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

(ب) إن المتجه $r_1 - r_0 = 2i - 4j - 2k$ والمتجه $a = 3i - 2j + 4k$ موازيان للمستوى المطلوب. ولذلك فإن

$(r_1 - r_0) \times a$ عمودى على هذا المستوى. وإن المعادلة الاتجاهية للمستوى المطلوب هي :

$$(r - r_0) \cdot [(r_1 - r_0) \times a] = 0$$

والمعادلة في الاحداثيات المتعامدة :

$$(r - r_0) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [(x-1)i + (y-2)j + (z-3)k] \cdot [-20i - 14j + 8k]$$

$$= -20(x-1) - 14(y-2) + 8(z-3) = 0$$

$$20x + 14y - 8z - 24 = 0$$

(ج) إن المتجهين $r_1 - r_0 = 2i - 4j - 2k$ و $r_2 - r_0 = 4i - 2j - 7k$ موازيان للمستوى المطلوب وبالتالي

فإن $(r_1 - r_0) \times (r_2 - r_0)$ عمودى عليه. والمعادلة الاتجاهية هي : $(r - r_0) \cdot [(r_1 - r_0) \times (r_2 - r_0)] = 0$

والمعادلة في الإحداثيات المتعامدة :

$$\begin{aligned} (r - r_0) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} &= |(x-1)i + (y-2)j + (z-3)k| \cdot [24i + 6j + 12k] \\ &= 24(x-1) + 6(y-2) + 12(z-3) = 0 \\ &\text{أو } 4x + y + 2z - 12 = 0 \end{aligned}$$

١٧ - أوجد أقصر بعد بين النقطة $P_0(1, 2, 3)$ والمستوى $\Pi: 3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

إن المتجه $a = 3i - 2j + 5k$ عمودى على المستوى . لتكن $P_1(2, 3, 2)$ نقطة في المستوى عندئذ يكون d ،
بغض النظر عن الإشارة ، هو المسقط العمودى لـ P_0 على a وبالتالى :

$$d = \left| \frac{(r_1 - r_0) \cdot a}{|a|} \right| = \left| \frac{(i + j - k) \cdot (3i - 2j + 5k)}{\sqrt{38}} \right| = \frac{2}{19} \sqrt{38}$$

مسائل إضافية

١٨ - أوجد طول كل من المتجهات :

$$a = 2i + 3j + k. \quad (أ)$$

$$b = 3i - 5j + 9k. \quad (ب)$$

(ج) المتجه الذى يصل $P_1(3, 4, 5)$ بـ $P_2(1, -2, 3)$ ج : (أ) $2\sqrt{14}$ ، (ب) $\sqrt{115}$ ، (ج) $\sqrt{11}$

١٩ - ليكن لدينا متجهات المسألة ١٨

(أ) بين أن a و b متعامدين .

(ب) أوجد الزاوية الصغرى بين a و c ، وكذلك بين b و c

(ج) أوجد الزوايا التى يصنعها b مع المحاور الإحداثية .

ج : (ب) $10^\circ 14'$ ، $85^\circ 14'$ ، $165^\circ 14'$ (ج) $56^\circ 32'$ ، $47^\circ 17'$ ، $117^\circ 45'$

٢٠ - برهن أن $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$; $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$.

٢١ - أكتب متجه وحدة في اتجاه a ومتجه وحدة في اتجاه b حيث a و b متجهتا المسألة ١٨ .

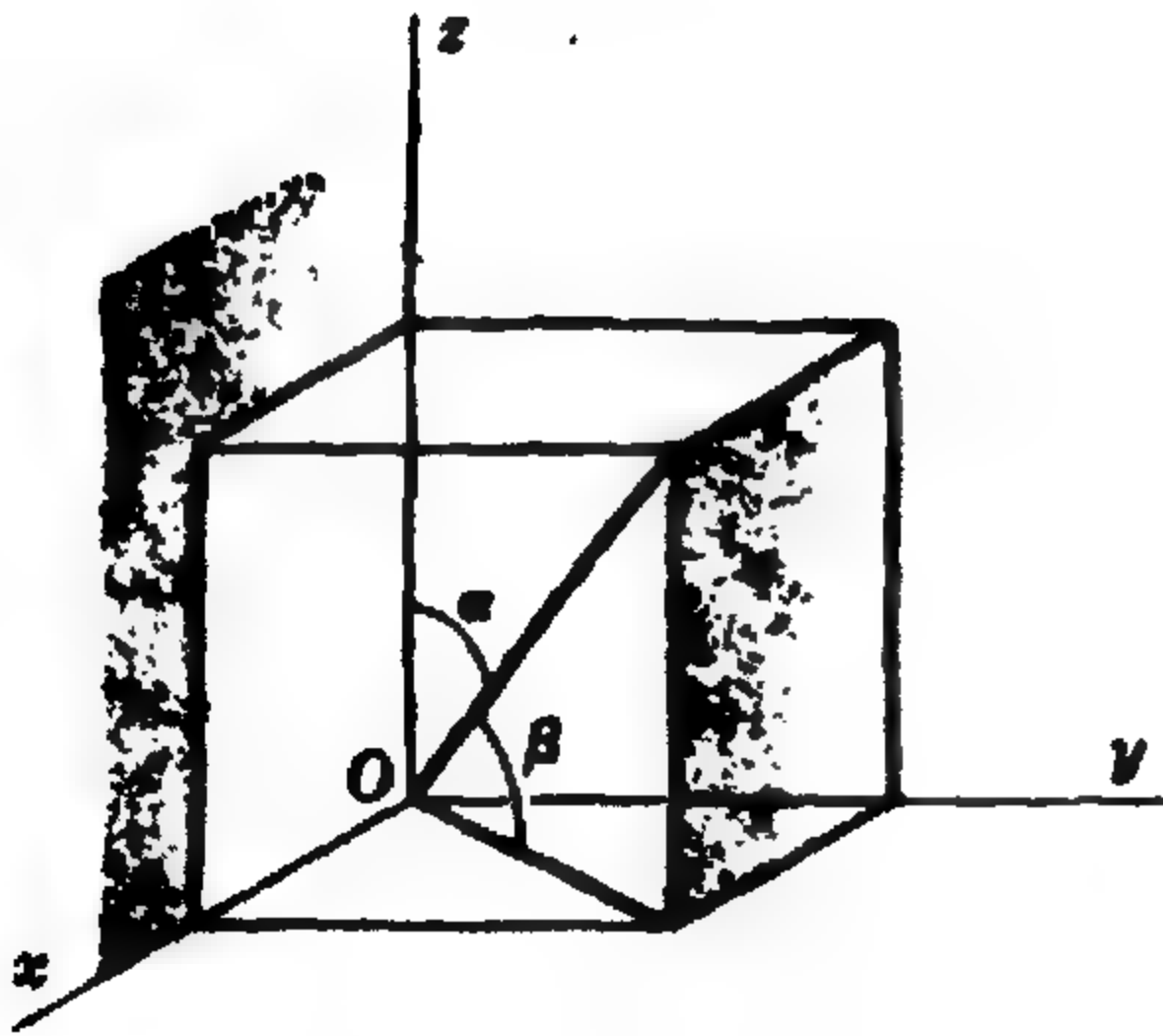
٢٢ - أوجد الزاويتين الداخليتين β و γ لمثلث المسألة ٢١

ج : $\beta = 22^\circ 12'$ ، $\gamma = 9^\circ 16'$

٢٣ - ليكن لدينا في الشكل المرفق مكعب الوحدة أوجد :

(ب) الزاوية بين قطرة وقطر أحد أوجهه

ج : (أ) $54^\circ 44'$ (ب) $35^\circ 16'$



شكل ٦١ - ١٤

٢٤ — بين أن المسقط المزدى لـ b على a هو $\frac{a \cdot b}{|a|}$

٢٥ — بين أن المتجه c فى المعادلة (٢) عمودى على كل من a و b

٢٦ — إذا كان $a = i + j$, $b = i - 2k$, $c = 2i + 3j + 4k$, فأوجد :

$$\begin{aligned} a \cdot (a \times b) &= 0 \quad (أ) & a \times b &= -2i + 2j - k \quad (١) \\ a \cdot (b \times c) &= -2 \quad (ب) & b \times c &= 6i - 8j + 3k \quad (٢) \\ a \times (b \times c) &= 3i - 3j - 14k \quad (ج) & c \times a &= -4i + 4j - k \quad (٣) \\ c \times (a \times b) &= -11i - 6j + 10k \quad (د) & (a + b) \times (a - b) &= 4i - 4j + 2k \quad (٤) \end{aligned}$$

٢٧ — أوجد مساحة المثلث الذى رؤسه هي : $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, 1, 1)$.
إرشاد : إن $|AB \times AC|$ يساوى ضعفى المساحة . ج : $5\sqrt{3}$

٢٨ — أوجد حجم متوازي السطوح الذى أضلاعه OA, OB, OC حيث $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 1, -1)$.
ج : 2

٢٩ — إذا كان $u = a \times b$, $v = b \times c$, $w = c \times a$, فبين أن :

$$\begin{aligned} u \cdot c &= v \cdot a = w \cdot b \quad (١) \\ a \cdot u &= b \cdot v = c \cdot w = 0, \quad b \cdot u = c \cdot v = a \cdot w = 0 \quad (ب) \\ u \cdot (v \times w) &= \{a \cdot (b \times c)\}^2 \quad (ج) \end{aligned}$$

٣٠ — برهن أن $(a + b) \cdot \{(b + c) \times (c + a)\} = 2a \cdot (b \times c)$.

٣١ — أوجد أصغر زاوية تقاطع المستويين $5x - 14y + 2z - 8 = 0$ و $10x - 11y + 2z + 15 = 0$.

إرشاد : أوجد الزاوية بين العمودين ج : $22^\circ 25'$

٣٢ — اكتب المعادلة الاتجاهية لخط تقاطع المستويين $4x - y - z + 2 = 0$ و $x + y - z - 5 = 0$.

ج : $(x - 1)i + (y - 5)j + (z - 1)k = k(-2i - 3j - 5k)$, حيث $P_0(1, 5, 1)$ نقطة على المستقيم .

٣٣ — أوجد أصغر بعد بين المستقيم المار بـ $A(2, -1, -1)$ و $B(6, -8, 0)$ والمستقيم المار بـ $C(2, 1, 2)$ و $D(0, 2, -1)$.
ج : $\sqrt{6}/6$

٣٤ — عرف مستقيماً ماراً بـ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على أنه المحل الهندسى لجميع النقط $P(x, y, z)$ بحيث يكون P_0P و OP_0 متعامدين . بين أن المعادلة الاتجاهية :

$$(r - r_0) \cdot r_0 = 0.$$

٣٥ — أوجد معادلة المستقيم المار بـ $P_0(2, -3, 5)$ و :

$$\begin{aligned} (١) \text{ العمودى على } & 7x - 4y + 2z - 8 = 0. \\ (ب) \text{ الموازى للمستقيم } & x - y + 2z + 4 = 0, \quad 2x + 3y + 6z - 12 = 0. \\ (ج) \text{ المار بـ } & P_1(3, 6, -2) \end{aligned}$$

$$\text{ج : (أ) } \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-5}{-7} \text{ (ب) } \frac{x-2}{12} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-5} \text{ (ج) } \frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{2}$$

٣٦- أوجد معادلة المستوى :

$$(أ) \text{ المار بـ } P_0(1, 2, 3) \text{ والموازي لـ } a = 2i + j - k \text{ ولـ } b = 3i + 6j - 2k.$$

$$(ب) \text{ المار بـ } P_0(2, -3, 2) \text{ والمستقيم } 6x + 4y + 3z + 5 = 0, 2x + y + z - 2 = 0.$$

$$(ج) \text{ المار بـ } P_0(2, -1, -1) \text{ و } P_1(1, 2, 3) \text{ وعمودى على } 2x + 3y - 5z - 6 = 0.$$

$$\text{ج : (أ) } 4x + y + 9z - 33 = 0 \text{ (ب) } 16x + 7y + 8z - 27 = 0 \text{ (ج) } 9x - y + 3z - 16 = 0$$

٣٧- إذا كانت $r_0 = i + j + k, r_1 = 2i - 3j - 4k, r_2 = 3i + 5j + 7k$ ثلاثة متجهات فبين أن $r_0 + r_1 + r_1 \times r_2 + r_2 \times r_0 = 0$. وما الذى يمكن قوله بالنسبة لنهايات هذه المتجهات .

ج : واقعة على مستقيم واحد .

٣٨- إذا كانت P_0, P_1, P_2 ثلاث نقط ليست واقعة على استقامة واحدة و r_0, r_1, r_2 متجهات الموضع لها ، فا

هو وضع $r_0 \times r_1 + r_1 \times r_2 + r_2 \times r_0$ بالنسبة للمستوى $P_0 P_1 P_2$ ؟

ج : عمودى .

$$٣٩- \text{برهن (أ) } a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

$$(ب) (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c).$$

٤٠- برهن أن (أ) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتلاقى في نقطة واحدة (ب) الأعمدة الساقطة من رؤوس مثلث إلى الأضلاع المقابلة (أو امتداداتها إن لزم الأمر) تتلاقى في نقطة واحدة .

٤١- لتكن $A(1, 2, 3), B(2, -1, 5), C(4, 1, 3)$ ثلاث رؤوس المتوازي الأضلاع $ABCD$. أوجد (أ) احداثيات D (ب) مساحة $ABCD$ (ج) مساحة المسقط العمودية لـ $ABCD$ على كل من المستويات الاحداثية .

$$\text{ج : (أ) } D(3, 4, 1) \text{ (ب) } 2\sqrt{26} \text{ (ج) } 8, 6, 2$$

٤٢- برهن أن مساحة متوازي الأضلاع في الفراغ تساوى الجذر التربيعى لمجموع مربعات مساحات مساقطه على المستويات الاحداثية .

الفصل الثاني والستون

تفاضل وتكامل المتجهات

التفاضل : لتكن

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i} f_1(t) + \mathbf{j} f_2(t) + \mathbf{k} f_3(t) = \mathbf{i} f_1 + \mathbf{j} f_2 + \mathbf{k} f_3 \\ \mathbf{s} &= \mathbf{i} g_1(t) + \mathbf{j} g_2(t) + \mathbf{k} g_3(t) = \mathbf{i} g_1 + \mathbf{j} g_2 + \mathbf{k} g_3 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{i} h_1(t) + \mathbf{j} h_2(t) + \mathbf{k} h_3(t) = \mathbf{i} h_1 + \mathbf{j} h_2 + \mathbf{k} h_3 \end{aligned}$$

متجهات ، مركباتها دوال لمتغير عددي t ذات مشتقات متصلة من الرتبة الأولى والرتبة الثانية .
يمكننا ، كما فعلنا في الفصل ١٨ ، أن نبرهن أن :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \quad (١)$$

ويمكن للقارئ الذي اعتاد اشتقاق المحددات التي عناصرها دوال لمتغير واحد ، أن يجد بسهولة :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 \end{vmatrix} \quad (٢) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{u})) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \mathbf{u} \right) + \mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \quad (٣) \text{ و}$$

ويمكن ، بالإضافة لذلك ، أن نحصل على هذه الصيغ بفك حاصل الضرب قبل الاشتقاق .

وينتج من (٢) أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u})) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \times \mathbf{u}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \mathbf{u} \right) + \mathbf{r} \times \left(\mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \quad (٤) \end{aligned}$$

المنحنيات الفراغية : اعتبر المنحنى الفراغي

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (٥)$$

حيث يكون للدوال $f(t), g(t), h(t)$ مشتقات أولى وثانية متصلة . ولنفترض أن متجه الموضع لنقطة متغيرة

عامة $P(x, y, z)$ من المنحنى معطى بـ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

وكما في الفصل ١٨ فإن المتجه $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المماس للمنحنى . وإذا كان \mathbf{R} هو متجه الموضع

لنقطة (X, Y, Z) من المستقيم المماس عند P ، فإن المعادلة الاتجاهية للمستقيم (أنظر الفصل ٦١) هي :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t} \quad (k \text{ متغير عددي}) \quad (٦)$$

وفي الاحداثيات المتعامدة تكون معادلتا المستقيم هما :

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}}$$

حيث $\left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right]$ هي مجموعة جيوب تمام اتجاه المستقيم . هذا ولقد استخدمنا في المعادلات المناظرة (٢)

في الفصل ٩ مجموعة أعداد الاتجاه $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right]$

أما المعادلة الاتجاهية للمستوى العمودي على المنحنى عند النقطة P فهي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (٧)$$

حيث \mathbf{R} متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى .

نلاحظ مرة أخرى ، كما في الفصل ١٨ أن المتجه $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$

عمودي على \mathbf{t} . وإذا كان \mathbf{n} متجه الوحدة المتفق مع $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ في الاتجاه يكون

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |\mathbf{K}| \mathbf{n}$$

حيث $|\mathbf{K}|$ القيمة المطلقة للانحناء عند P . ومتجه الوحدة .

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (٨)$$

يسمى العمودي الأساسي على المنحنى عند P .

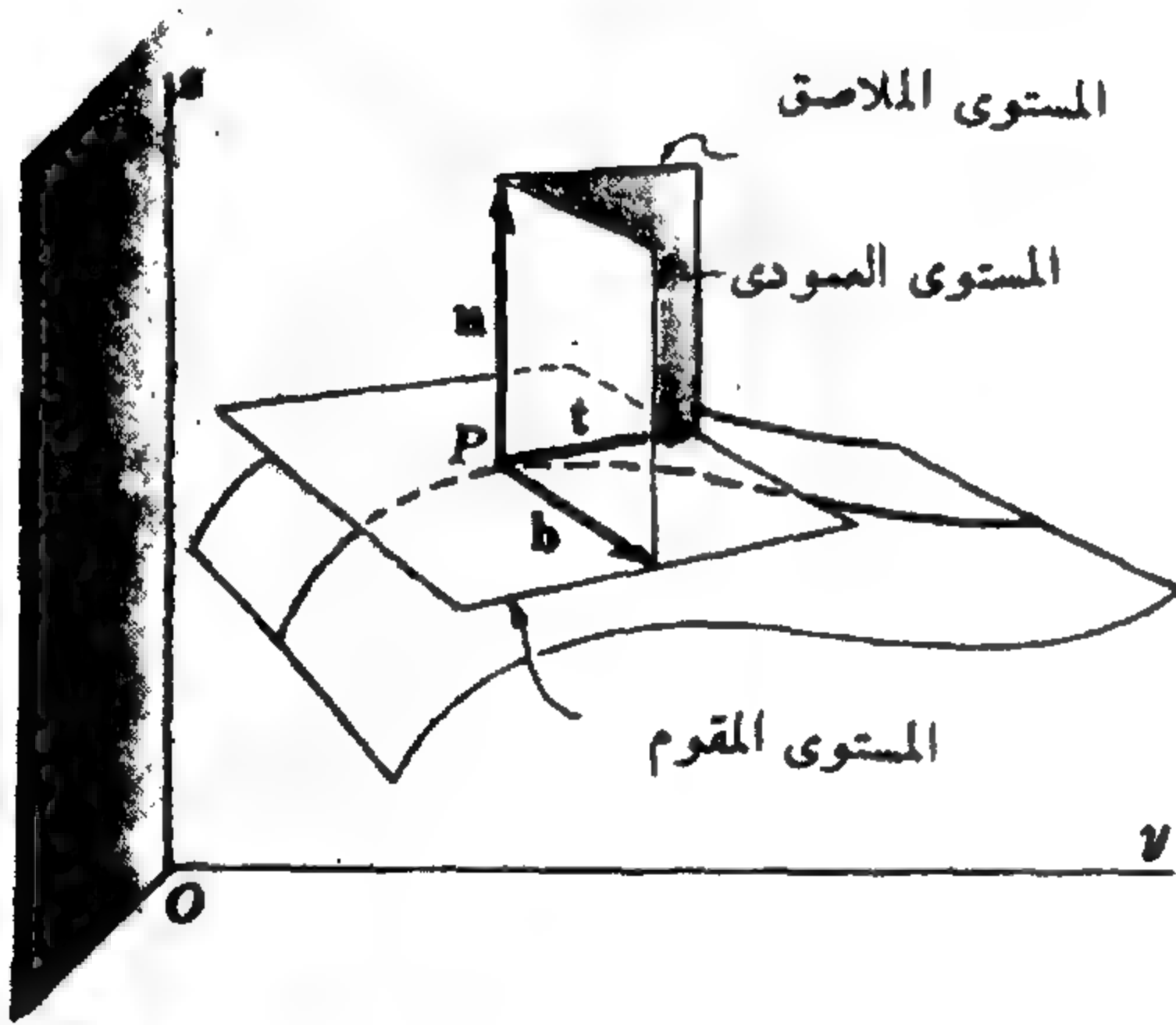
متجه الوحدة \mathbf{b} عند النقطة P المعروف بالعلاقة .

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (٩)$$

يسمى ثنائي المود عند P . إن المتجهات الثلاثة $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ عند النقطة P تشكل ثلاثية يمينية من متجهات متعامدة تبادلياً ، ولذا فهي تزودنا بمجموعة احداثية موضعية تفيد في دراسة إضافية للمنحنى الفراغي بجوار إحدى نقاطه .

أنظر المسألتين ١ - ٢

تحدد المتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ عند نقطة عامة P من منحنى فراغي ثلاثة مستويات متعامدة ، تبادلياً :



شكل ٦٢ - ١

(i) المستوى الملاصق وهو المستوى الذى يحوى \mathbf{n} و \mathbf{t} معادلته هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

(ii) المستوى العمودى وهو المستوى الذى يحوى \mathbf{n} و \mathbf{b} ومعادلته هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

(iii) المستوى المقوم وهو المستوى الذى يحوى \mathbf{t} و \mathbf{b} ومعادلته هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

حيث \mathbf{R} في كل من هذه المعادلات هي متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى المفروض .

السطوح : إن أقدم معادلة للسطح هي $F(x, y, z) = 0$ (أنظر الفصل ٥٩) . ونحصل على تمثيل بارامترى للسطح بكتابة x, y, z على شكل دوال لمتغيرين مستقلين u و v فثلا :

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \quad (10)$$

وإذا عوضنا عن u بـ u_0 (ثابت) في (١٠) فإننا نحصل على :

$$x = f_1(u_0, v), \quad y = f_2(u_0, v), \quad z = f_3(u_0, v) \quad (11)$$

وهي معادلة منحنى فراغى (منحنى u) على السطح . أما إذا عوضنا عن v بـ v_0 (ثابت) في (١٠) فإننا نحصل على

$$x = f_1(u, v_0), \quad y = f_2(u, v_0), \quad z = f_3(u, v_0) \quad (12)$$

وهذه معادلة منحنى فراغى آخر (منحنى v) على السطح . ويتقاطع المنحنيان في نقطة على السطح نحصل عليها من (١٠) بوضع $u = u_0, v = v_0$.

يعطى متجه الموضع عامة P على السطح بـ

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}f_1(u, v) + \mathbf{j}f_2(u, v) + \mathbf{k}f_3(u, v) \quad (13)$$

فإذا فرضنا أن (١١) و (١٢) تمثل منحنى u و v المارين بالنقطة P فمئذ يكون :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial v} f_1(u_0, v) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial v} f_2(u_0, v) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial v} f_3(u_0, v)$$

وهو المتجه المماس للمنحنى u عند النقطة P . ويكون :

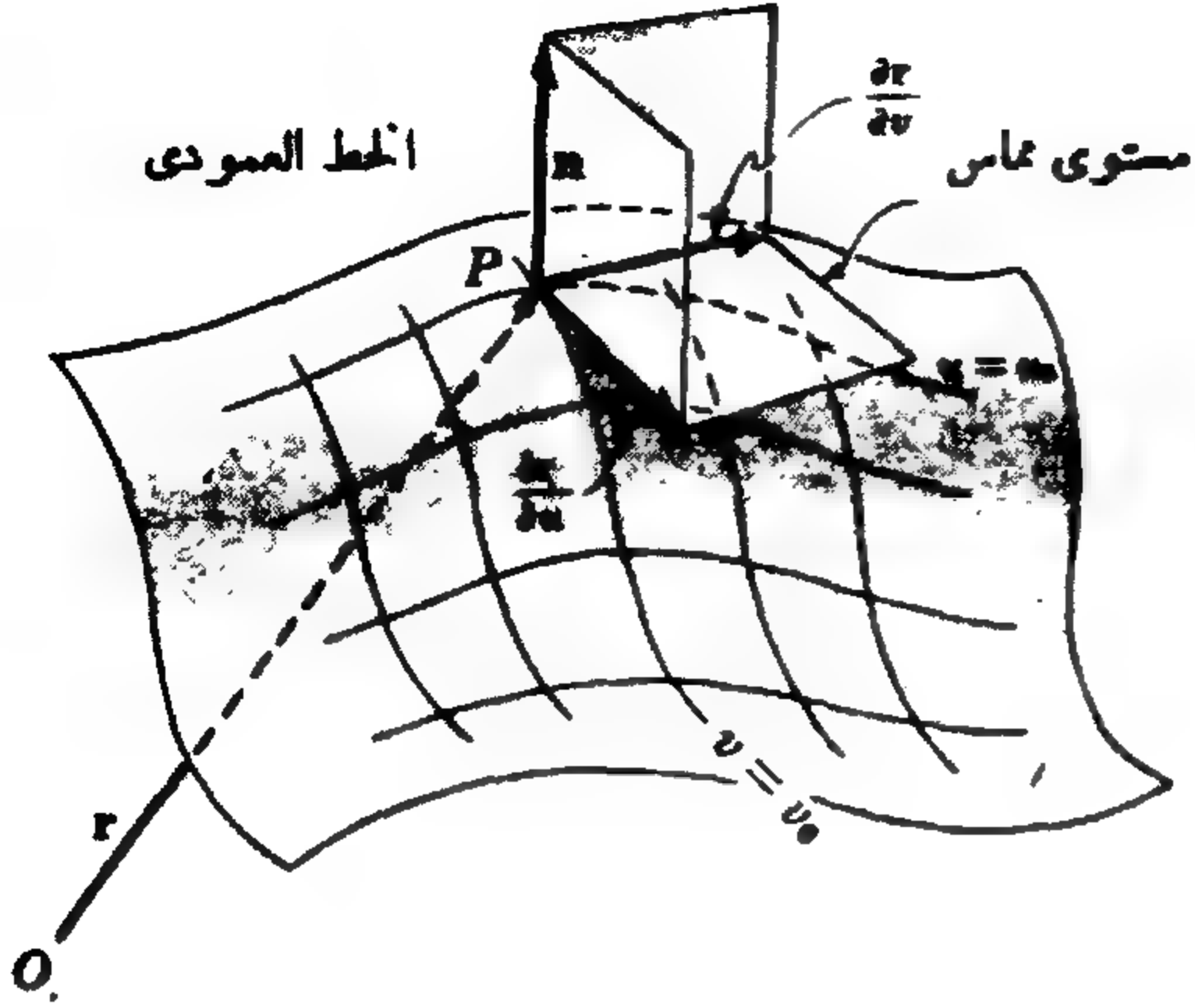
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u} f_1(u, v_0) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u} f_2(u, v_0) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u} f_3(u, v_0)$$

وهو المتجه المماس للمنحنى v عند النقطة ذاتها . ويحدد المماسان مستويا مماسا للسطح عند P .

ومن الواضح أن العمودى على هذا المستوى يعطى بـ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (14)$$

يعرف متجه الوحدة العمودى لسطح عند P بـ :



$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \quad (15)$$

إذا كان \mathbf{R} هو متجه الموضع لنقطة عامة على العمودى على السطح عند P فإن المعادلة المتجهة هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = k \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \quad (16)$$

شكل ٦١ - ٢

إذا كان \mathbf{R} متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى المماس للسطح عند P فإن المعادلة المتجهة هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 0 \quad (17)$$

أنظر المسألة ٣

المؤثر ∇ : لقد رأينا في الفصل ١٠ أن مشتقة $z = f(x, y)$ عند نقطة اختيارية (x, y) وفي اتجاه يصنع زاوية θ مع المحور السيني الموجب هي :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

لنكتب هذه المشتقة بالشكل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta = \left(i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (i \cos \theta + j \sin \theta) \quad (18)$$

إن المتجه $\mathbf{a} = i \cos \theta + j \sin \theta$ هو متجه وحدة في الاتجاه الذى يصنع زاوية θ مع محور x الموجب وإذا كتبنا العامل الآخر بالشكل :

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

فإننا نتوصل إلى تعريف مؤثر تفاضل متجه ∇ (تقرأ دل) بالشكل :

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \quad (19)$$

ويسمى $\nabla f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y}$ في التحليل المتجه ، تدرج f ويكتب $\text{grad } f$ وهكذا تشير (١٨) إلى أن مركبة ∇f

في اتجاه متجه الوحدة \mathbf{a} هو المشتقة المتجهة لـ f في اتجاه \mathbf{a} .

ليكن الآن $\mathbf{r} = xi + yj$ هو متجه الموضع للنقطة $P(x, y)$ فبأن

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{dx}{ds} + \mathbf{j} \frac{dy}{ds} \right) \\ &= \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\end{aligned}$$

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = |\nabla f| \cos \phi$$

حيث ϕ الزاوية بين المتجهين ∇f و $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ فإننا نرى أن $\frac{df}{ds}$ يكون نهاية عظمى عندما $\cos \phi = 1$ أى عندما يكون ∇f و $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ نفس الاتجاه . وهكذا نجد أن القيمة العظمى للمشتقة المتجهة عند نقطة P هي $|\nabla f|$ وأن اتجاهها هو اتجاه ∇f .

أنظر المسألة ٤

والدالة $w = F(x, y, z)$ نعرف

$$\nabla F = \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z}$$

والمشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z)$ عند نقطة اختيارية $P(x, y, z)$ في الاتجاه $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ هي

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{a} \quad (20)$$

وكما في حالة دالة لمتغيرين اثنين فإن $|\nabla F|$ هو القيمة العظمى للمشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z)$ عند $P(x, y, z)$ واتجاهها هو اتجاه ∇F .

أنظر المسألة ٥

اعتبر الآن السطح $F(x, y, z) = 0$. إن معادلة المستوى المماس لهذا السطح عند إحدى نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هي :

$$\begin{aligned}(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} \\ = [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] \cdot \left[\mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z} \right] = 0\end{aligned} \quad (21)$$

عل أن نحسب المشتقات الجزئية عند P_0 . يلاحظ أن العامل الأول هو متجه اختياري مار به P_0 وواقع في المستوى المماس ، بينما العامل الثانى ∇F المحسوب عند P_0 عمودى على المستوى المماس أى عمودى على السطح عند P_0 .

أنظر المسألتين ٦ - ٧

التفرق والدوران : يعرف تفرق متجه $\mathbf{F} = \mathbf{i} f_1(x, y, z) + \mathbf{j} f_2(x, y, z) + \mathbf{k} f_3(x, y, z)$ بـ :

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 \quad (22)$$

ويعرف دوران متجه \mathbf{F} بـ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (23)$$

أنظر المسألة ٨

التكامل : سنقصر دراسة التكامل هنا على التكامل العادي للمتجهات وعلى ما يسمى بالتكاملات الخطية ونورد ك مثال على التكامل الأول ما يلي . لنفرض

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u + a u \mathbf{k}$$

متجهها يتعلق بالمتغير العددي u . عندئذ يكون .

$$\mathbf{F}'(u) = -\mathbf{i} \sin u + \mathbf{j} \cos u + a \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}'(u) du &= \int (-\mathbf{i} \sin u + \mathbf{j} \cos u + a \mathbf{k}) du \\ &= \mathbf{i} \int -\sin u du + \mathbf{j} \int \cos u du + \mathbf{k} \int a du \\ &= \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u + a u \mathbf{k} + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{F}(u) + \mathbf{c} \end{aligned}$$

حيث \mathbf{c} متجه ثابت اختياري مستقل عن u بالإضافة إلى ذلك نجد :

$$\int_{u=a}^{u=b} \mathbf{F}'(u) du = \left[\mathbf{F}(u) + \mathbf{c} \right]_{u=a}^{u=b} = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

أنظر المسألتين ٩ - ١٠

التكاملات الخطية : لنكن P_0 و P_1 نقطتين في الفراغ يصل بينهما قوس C . يمكن لهذا القوس أن يكون قطعة مستقيمة أو قطعة من منحنى فراغي $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $z = g_3(t)$ أو يمكن أن يتكون من عدة أقواس منحنيات ومهما كان الأمر فإننا نفرض في C أن يكون متصلا عند كل نقطة من نقاطه وأن لا يتقاطع مع نفسه . ليكن لدينا بالإضافة لذلك الدالة الاتجاهية :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} f_1(x, y, z) + \mathbf{j} f_2(x, y, z) + \mathbf{k} f_3(x, y, z)$$

التي تعرف لنا في كل نقطة من منطقة حول C ، وبشكل خاص في كل نقطة من C ، متجه ذو طول واتجاه معين لنرمز بـ

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (24)$$

المتجه الموضع للنقطة $P(x, y, z)$ من C يسمى التكامل :

$$\int_C^{P_1} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (25)$$

تكامل خطيا ، أى أنه تكامل على طول المسار المفروض C .

كثال على ذلك لتكن F قوة . الشغل الذى تبذله F في تحريك جسم إزاحة $d\mathbf{r}$ يعطى بـ (أنظر المسألة ٩ من الفصل ١٨) .

$$|\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

والشغل المبذول لتحريك الجسم من موضع P_0 إلى الموضع P_1 على القوس C هو

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ومن المعادلة (٢٤) نجد أن

$$d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$$

وعلى هذا تأخذ (٢٥) الشكل :

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) \quad (٢٦)$$

أنظر المسألة ١١

مسائل محلولة

١ - يتحرك جسم على المنحنى $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 6t$. أوجد مقدار متجه السرعة ومقدار متجه العجلة عند الموضعين $t = 0$ و $t = 1/2\pi$

لتكن $P(x, y, z)$ نقطة من المنحنى وليكن

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 4\mathbf{i} \cos t + 4\mathbf{j} \sin t + 6t\mathbf{k}$$

متجه الموضع لهذه النقطة فيكون عندئذ

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -4\mathbf{i} \sin t + 4\mathbf{j} \cos t + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -4\mathbf{i} \cos t - 4\mathbf{j} \sin t$$

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}; |\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$$

$$\mathbf{a} = -4\mathbf{i}; |\mathbf{a}| = 4$$

وعند $t = 0$ يكون

$$\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}; |\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$$

$$\mathbf{a} = -4\mathbf{i}; |\mathbf{a}| = 4$$

وعند $t = 1/2\pi$ يكون

٢ - لدينا المنحنى الفراغى $x = t, y = t^2, z = t^3$. أوجد عند النقطة $t = 1$ أو عند النقطة (١ و ١ و ١) .

(١) معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى .

(ب) متجهات الوحدة للمماس العمودى الأساسى وثنائى العمود .

(ج) معادلات العمودى الأساسى وثنائى العمودى .

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

إن

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}). \quad \text{وعند } t = 1 \text{ يكون}$$

(١) ليكن \mathbf{R} متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) من المستقيم المماس. فتكون المعادلة الاتجاهية لهذا المستقيم هي :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t}$$

$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \quad \text{أو}$$

وعلى هذا تكون معادلة المستقيم في الاحداثيات المتعامدة :

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{3}$$

وإذا كان \mathbf{R} متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) في المستوى العمودي فإن معادلته الاتجاهية هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

$$[(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0 \quad \text{أو}$$

وتكون معادلته في الاحداثيات المتعامدة هي :

$$(X-1) + 2(Y-1) + 3(Z-1) = X + 2Y + 3Z - 6 = 0$$

(أنظر المسألة ٢ (١) من الفصل ٥٩)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{(-4t - 18t^3)\mathbf{i} + (2 - 18t^4)\mathbf{j} + (6t + 12t^3)\mathbf{k}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \quad \text{إن (ب)}$$

$$\text{ف عند } t = 1 \text{ يكون : } \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{19}{14}} = |K|. \quad \text{ومنه } \frac{dt}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{98}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|} \frac{dt}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{266}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \text{و}$$

(ج) إذا كان \mathbf{R} متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) على المستوى الأساسي ، فإن معادلته الاتجاهية هي :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{n}$$

$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}} \quad \text{أو}$$

وتكون معادلتاه في الاحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{X-1}{-11} = \frac{Y-1}{-8} = \frac{Z-1}{9}$$

وإذا كان R متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) من ثنائى العمود ، فإن معادلته الاتجاهية هي :

$$R - r = k \cdot b$$

$$(X-1)i + (Y-1)j + (Z-1)k = k \frac{3i-3j+k}{\sqrt{19}} \quad \text{أو}$$

وتكون معادلتاه في الاحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y-1}{-3} = \frac{Z-1}{1}$$

٢- أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح $x = 2(u+v), y = 3(u-v), z = uv$ عند النقطة $P(u=2, v=1)$. إن

$$r = 2(u+v)i + 3(u-v)j + uvk$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = 2i + 3j + vk, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 2i - 3j + uk$$

وعند P يكون :

$$r = 6i + 3j + 2k, \quad \frac{\partial r}{\partial u} = 2i + 3j + k, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 2i - 3j + 2k$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = 9i - 2j - 12k \quad \text{ومنه}$$

وعلى هذا تكون المعادلة الاتجاهية والمعادلتان في الاحداثيات المتعامدة للمستقيم العمودى هي :

$$R - r = k \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

$$(X-6)i + (Y-3)j + (Z-2)k = k(9i - 2j - 12k) \quad \text{أو}$$

$$\frac{X-6}{9} = \frac{Y-3}{-2} = \frac{Z-2}{-12} \quad \text{و}$$

وتكون معادلتا المستوى المماس في الاحداثيات المتعامدة هما :

$$(R-r) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) = 0$$

$$[(X-6)i + (Y-3)j + (Z-2)k] \cdot [9i - 2j - 12k] = 0 \quad \text{أو}$$

$$9X - 2Y - 12Z - 24 = 0 \quad \text{و}$$

٤- (أ) أوجد المشتقة المتجهة لـ $f(x, y) = x^2 - 6y^2$ عند النقطة $(7, 2)$ في الاتجاه $\theta = \frac{1}{4}\pi$

(ب) أوجد القيمة العظمى لهذه المشتقة عند $(7, 2)$

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - 6y^2) = i \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 6y^2) + j \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 6y^2) \quad \text{إن (أ)} \\ &= 2xi - 12yj \end{aligned}$$

$$a = i \cos \theta + j \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \quad \text{و}$$

وعند $(7, 2)$ يكون: $\nabla f = 14i - 24j$

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} = (14i - 24j) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \right) = 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$$

هو المشتقة في الاتجاه المفروض :

(ب) عند $(7, 2)$ يكون $\nabla f = 14i - 24j$ ويكون $|\nabla f| = \sqrt{14^2 + 24^2} = 2\sqrt{193}$ هي القيمة العظمى للمشتقة المتجهة وبما أن :

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{7}{\sqrt{193}}i - \frac{12}{\sqrt{193}}j = i \cos \theta + j \sin \theta$$

فإن الاتجاه هو $0 = 300^\circ 15'$ (أنظر المسألتين ٢ و ٦ من الفصل ٦٠)

٥ - (أ) أوجد المشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ عند $P(1, 1, -1)$ وفي الاتجاه $\mathbf{a} = 2i + j - k$.

(ب) أوجد القيمة العظمى لهذه المشتقة عند P .

$$\nabla F = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 - 2y^2 + 4z^2) = 2xi - 4yj + 8zk \quad \text{إن}$$

وعند $(1, 1, -1)$ يكون $\nabla F = 2i - 4j - 8k$.

$$\nabla F \cdot \mathbf{a} = (2i - 4j - 8k) \cdot (2i + j - k) = 8 \quad (1)$$

(ب) عند P يكون $|\nabla F| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. والاتجاه هو $\mathbf{a} = 2i - 4j - 8k$.

٦ - لدينا السطح $F(x, y, z) = x^2 + 3xyz + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ والنقطة $P_0(1, 1, 1)$ واقعة عليه. أوجد :

(أ) متجه الوحدة العمودى على السطح عند P_0 .

(ب) معادلتا المستقيم العمودى عند P_0 .

(ج) معادلة المستوى المماس عند P_0 .

$$\nabla F = (3x^2 + 3yz)i + (3xz + 6y^2)j + (3xy - 2z^2)k \quad \text{إن}$$

وعند $P_0(1, 1, -1)$ يكون $\nabla F = 6i + 9j$.

$$(1) \quad \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j \quad \text{هو متجه الوحدة العمودى عند } P_0 \text{ ومتجه الوحدة الآخر هو } -\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

(ب) إن معادلتى المستقيم العمودى هما $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-1}{3}, Z=1$.

(ج) معادلة المستوى المماس هي : $2(X-1) + 3(Y-1) = 2X + 3Y - 5 = 0$.

٧ - أوجد زاوية تقاطع السطحين :

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad \text{و} \quad F_2 = x^2 + 2y^2 - z - 9 = 0$$

عند النقطة $(2, 1, -2)$

$$\begin{aligned}\nabla F_1 &= \nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 2xi + 2yj + 2zk \\ \nabla F_2 &= \nabla(x^2 + 2y^2 - z - 8) = 2xi + 4yj - k\end{aligned}$$

$$\nabla F_2 = 4i + 4j - k, \quad \nabla F_1 = 4i + 2j - 4k \quad \text{يكون } (2, 1, -2)$$

ولكن $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = |\nabla F_1| |\nabla F_2| \cos \theta$ حيث θ هي الزاوية المطلوبة. وعلى هذا

$$(4i + 2j - 4k) \cdot (4i + 4j - k) = |4i + 2j - 4k| |4i + 4j - k| \cos \theta$$

$$\text{ومنه ينتج أن } \cos \theta = \frac{14}{\sqrt{33}} = 0.81236, \quad \text{أن } \theta = 35^\circ 40'$$

٨ - إذا كان $\mathbf{B} = xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}$ ، فأوجد (أ) $\text{div } \mathbf{B}$ (ب) $\text{curl } \mathbf{B}$

$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}) \quad (1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3yz^2)$$

$$= y^2 + 2x^2z - 6yz$$

$$\text{curl } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2 \end{vmatrix} \quad (ب)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3yz^2) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \right] \mathbf{k}$$

$$= -(3z^2 + 2x^2y)\mathbf{i} + (4xyz - 2xy)\mathbf{k}$$

$$\int_0^1 \mathbf{F}(u) du \quad (ب) \quad \int \mathbf{F}(u) du \quad (أ) \quad \text{فأوجد } \mathbf{F}(u) = u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}, \quad \text{إذا كان } 9$$

$$\int \mathbf{F}(u) du = \int [u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}] du \quad (1)$$

$$= \mathbf{i} \int u du + \mathbf{j} \int (u^2 - 2u) du + \mathbf{k} \int (3u^2 + u^3) du$$

$$= \frac{u^2}{2} \mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2 \right) \mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4} \right) \mathbf{k} + \mathbf{c}$$

حيث $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ و c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

$$\int_0^1 \mathbf{F}(u) du = \left[\frac{u^2}{2} \mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2 \right) \mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4} \right) \mathbf{k} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{2}{3} \mathbf{j} + \frac{5}{4} \mathbf{k} \quad (ب)$$

١٠ - تعطى عجلة جسيم عند لحظة $t \geq 0$ بـ $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. فإذا كانت الإزاحة عند $t = 0$ هي $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

والسرعة هي $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ فأوجد \mathbf{r} و \mathbf{v} عند أية لحظة t .

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt = \mathbf{i} \int e^t dt + \mathbf{j} \int e^{2t} dt + \mathbf{k} \int dt$$

$$= e^t \mathbf{i} + \frac{1}{2} e^{2t} \mathbf{j} + t \mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

وعند $t = 0$ يكون $v = i + \frac{1}{2}j + c_1 = i + j$ ومنه $c_1 = \frac{1}{2}j$ إذن :

$$v = e^t i + \frac{1}{2}(e^{2t} + 1)j + tk$$

$$r = \int v dt = e^t i + (\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t)j + \frac{1}{2}t^2 k + c_2$$

وعند $t = 0$ يكون $r = i + \frac{1}{2}j + c_2 = 0$ ومنه $c_2 = -i - \frac{1}{2}j$ وعلى هذا فإن

$$r = (e^t - 1)i + (\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4})j + \frac{1}{2}t^2 k$$

١١ - أو جد الشغل الذى تبذله القوة $F = (x + yz)i + (y + xz)j + (z + xy)k$ في تحريك جسم من نقطة الأصل إلى

$$C(1, 1, 1)$$

(١) على الخط المستقيم OC

(ب) على المنحنى $x = t, y = t^2, z = t^3$

(ج) على الخطوط المستقيمة من O إلى $A(1, 0, 0)$ ومن A إلى $B(1, 1, 0)$ ومن B إلى C .

$$\begin{aligned} F \cdot dr &= [(x + yz)i + (y + xz)j + (z + xy)k] \cdot [i dx + j dy + k dz] \\ &= (x + yz) dx + (y + xz) dy + (z + xy) dz \end{aligned}$$

(١) على المستقيم OC يكون $x = y = z$ ومنه $dx = dy = dz$

ويأخذ التكامل المطلوب حسابه الشكل :

$$W = \int_C^{(1,1,1)} F \cdot dr = 3 \int_0^1 (x + x^2) dx = \left[\left(\frac{3}{2}x^2 + x^3 \right) \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

(ب) وعلى طول المنحنى المفروض $x = t, dx = dt; y = t^2, dy = 2t dt; z = t^3, dz = 3t^2 dt$ وعند O يكون $t = 0$

$$W = \int_0^1 (t + t^3) dt + (t^2 + t^4) 2t dt + (t^3 + t^3) 3t^2 dt \quad \text{إذن :}$$

$$= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^3) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^4 \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

(ج) من O إلى A يكون $y = z = 0, dy = dz = 0$ وتغير x من 0 إلى 1 .

ومن A إلى B يكون $x = 1, z = 0, dx = dz = 0$ وتغير y من 0 إلى 1 .

ومن B إلى C يكون $x = y = 1, dx = dy = 0$ وتغير z من 0 إلى 1 .

$$W_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \text{ ومن } A \text{ إلى } B \text{ يكون للمسافة من } W_2 = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2};$$

$$W_3 = \int_0^1 (z + 1) dz = \frac{3}{2}. \text{ وهكذا } W = W_1 + W_2 + W_3 = 5/2.$$

وبوجه عام تعتمد قيمة التكامل الخطى على مسار التكامل . والمثال المذكور هو تكامل لاتعلق قيمته على المسار . ويمكن

البرهان على أن التكامل الخطى $\int_C (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$ لا يعتمد على المسار طالما وجدت دالة $\phi(x, y, z)$ بحيث يكون :

$$d\phi = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

لاحظ أن تكامل هذه المسألة هو :

$$(x + yz) dx + (y + xz) dy + (z + xy) dz = d\left\{\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xyz\right\}$$

مسائل إضافية

١٢ - أوجد $\frac{ds}{dt}$ و $\frac{d^2s}{dt^2}$ إذا كان :

(أ) $\mathbf{s} = (t+1)\mathbf{i} + (t^2+t+1)\mathbf{j} + (t^3+t^2+t+1)\mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{s} = te^{2t}\cos 2t\mathbf{i} + te^{2t}\sin 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

ج : (أ) $\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j} + (3t^2+2t+1)\mathbf{k}; 2\mathbf{j} + (6t+2)\mathbf{k}$

(ب) $e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)\mathbf{i} + e^t(\sin 2t + 2\cos 2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
 $e^t(-4\sin 2t - 3\cos 2t)\mathbf{i} + e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

١٣ - لدينا $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u$, $\mathbf{c} = 3u^2\mathbf{i} - 4u\mathbf{k}$. احسب أولاً $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ثم أوجد مشتقة كل منهما. أوجد أخيراً المشتقات باستخدام الصيغ.

١٤ - يتحرك جسيم على المنحنى $x = 3t^2$, $y = t^2 - 2t$, $z = t^3$ حيث t هو الزمن. أوجد (أ) مقدار متجه السرعة ومقدار متجه العجلة عند $t = 1$. (ب) مركبتى السرعة والعجلة في الاتجاه $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ عند النقطة $t = 1$. ج : (أ) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{5}$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{19}$; (ب) $6, 22/3$

١٥ - أوجد باستخدام طرق المتجهات معادلات المستوى المستقيم المماس والمستوى العمودى لمنحنى المسألة ١١ من الفصل ٥٩.

١٦ - حل المسألة ١٢ من الفصل ٥٩ باستخدام طرق المتجهات.

١٧ - بين أن السطحين $x = u$, $y = v$, $z = \frac{uv}{4u-v}$ و $x = u$, $y = 5u - 3v^2$, $z = v$ متعامدان عند $P(1, 2, 1)$

١٨ - أوجد باستخدام طرق المتجهات معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح.

(أ) $x = u$, $y = v$, $z = uv$ عند النقطة $(u, v) = (3, -4)$.

(ب) $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ عند النقطة $(u, v) = (2, 1)$.

ج : (أ) $4X - 3Y + Z - 12 = 0$, $\frac{X-3}{-4} = \frac{Y+4}{3} = \frac{Z+12}{-1}$

(ب) $4X - 2Y - Z - 3 = 0$, $\frac{X-2}{-4} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-3}{1}$

١٩ - (أ) أوجد معادلة المستوى المماس والمستوى العمودى للمنحنى المسألة ٢ عند النقطة المذكورة.

(ب) أوجد معادلات المستويات المماسقة والعمودية المقومة لـ $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $z = 2t + t^2$ عند $t = 1$.

$$ج : (١) \quad 3X - 3Y + Z - 1 = 0, \quad 11X + 8Y - 9Z - 10 = 0$$

$$(ب) \quad X + 2Y - Z = 0, \quad Y + 2Z - 7 = 0, \quad 5X - 2Y + Z - 6 = 0$$

٢٠ - برهن أنه يمكن أيضاً إعطاء معادلة المستوى المماس لمنحنى فراغى عند نقطة P منه بـ

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) = 0$$

٢١ - حل المسألتين ١٦ و ١٧ من الفصل ٦٠ باستخدام طرق المتجهات .

$$٢٢ - أوجد $\int_a^b \mathbf{F}(u) du$, بفرض أن :$$

$$(١) \quad \mathbf{F}(u) = u^3\mathbf{i} + (3u^2 - 2u)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; \quad a = 0, \quad b = 2$$

$$(ب) \quad \mathbf{F}(u) = e^u\mathbf{i} + e^{-2u}\mathbf{j} + u\mathbf{k}; \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$ج : (١) \quad 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad (ب) \quad (c-1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1-e^{-2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

٢٣ - تعطى عجلة جسيم عند لحظة ما t بـ $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^3-2)\mathbf{k}$ فإذا كانت الإزاحة عند اللحظة

$t=0$ هي $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ وكانت السرعة هي $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ أوجد \mathbf{v} و \mathbf{r} عند اللحظة t

$$ج : \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \left(\frac{1}{4}t^4 - 2t - 1\right)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = \left(\frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{i} + \frac{1}{12}t^3\mathbf{j} + \left(\frac{1}{12}t^4 - t^2 - t\right)\mathbf{k}$$

٢٤ - أوجد في كل مما يلي الشغل الذي تبذله القوة المفروضة عندما تحرك جسيماً من $O(0,0,0)$ إلى $C(1,1,1)$

على طول (i) الخط المستقيم $x=y=z$ (ii) المنحنى $x=t, y=t^2, z=t^3$ (iii) الخط المستقيم من O إلى $A(1,0,0)$ ومن A إلى $B(1,1,0)$ ومن B إلى C .

$$(١) \quad \mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

$$(ب) \quad \mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$

$$(ج) \quad \mathbf{F} = (x + xyz)\mathbf{i} + (y + x^2z)\mathbf{j} + (z + x^2y)\mathbf{k}$$

$$ج : (١) \quad 3 \quad (ب) \quad 3 \quad (ج) \quad 9/4, 33/14, 5/2$$

٢٥ - إذا كان $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ فبين أن (١) $\text{div } \mathbf{r} = 3$ (ب) $\text{curl } \mathbf{r} = \mathbf{0}$

٢٦ - إذا كان للدالة $f = f(x, y, z)$ مشتقات جزئية من المرتبة الثانية على الأقل فبين أن :

$$(١) \quad \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}, \quad (ب) \quad \nabla \cdot (\nabla \times f) = 0, \quad (ج) \quad \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

الفصل الثالث والستون

التكاملات الثنائية والمكررة

التكامل (البسيط) $\int_a^b f(x) dx$ لدالة $y = f(x)$ متصلة في الفترة المحددة $a \leq x \leq b$ من المحور x قد سبق تعريفه في الفصل ٣٣ . لتذكر

(أ) نقسم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى n من الفترات الجزئية h_1, h_2, \dots, h_n أطوالها على الترتيب $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$ حيث λ_n طول أطول $\Delta_n x$.

(ب) نختار النقطة x_1 في h_1 و x_2 في h_2 في h_n ونشكل المجموع : $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$

(ج) نتابع تقسيم الفترات بحيث $\lambda_n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$

(د) إن : $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$

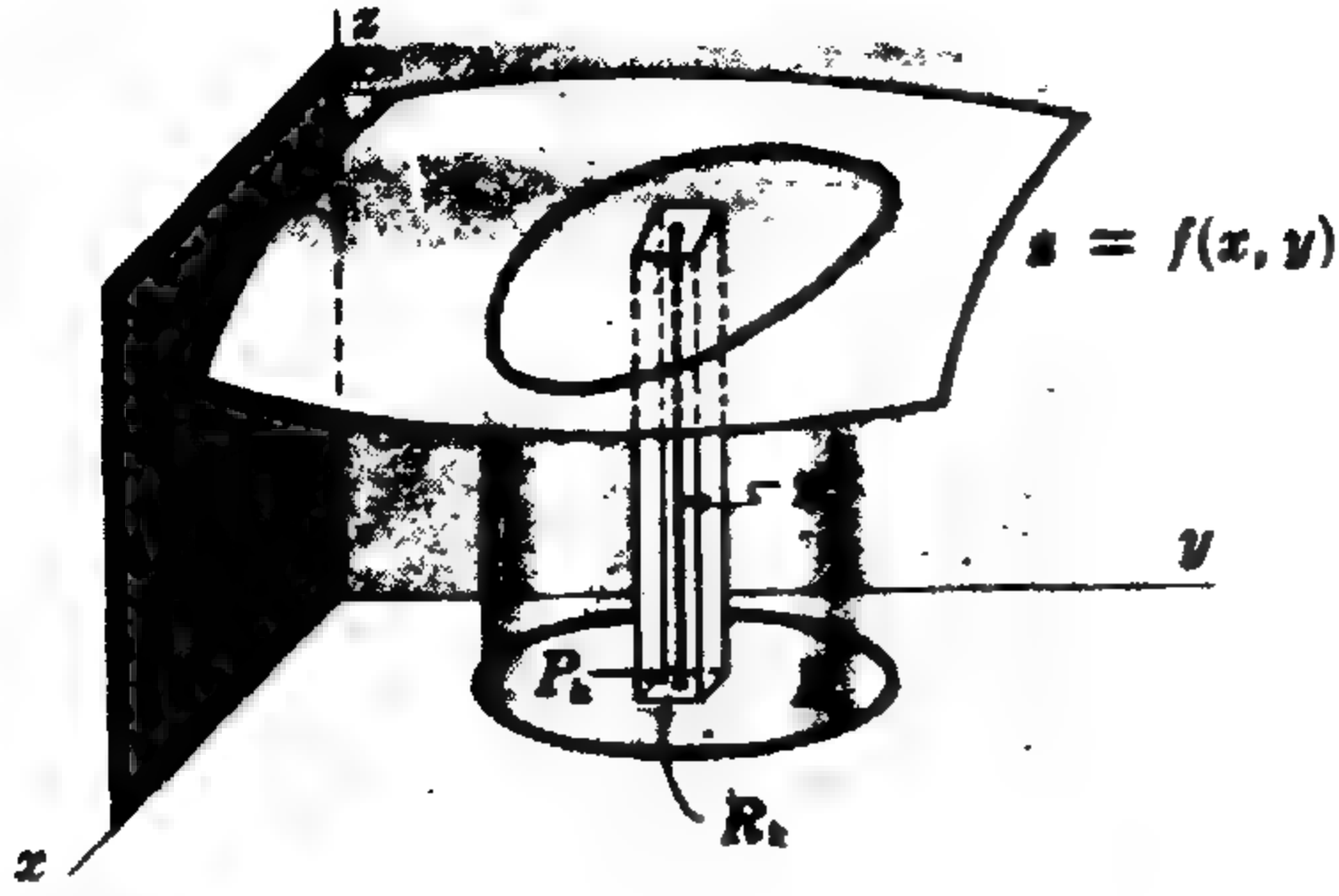
التكامل الثنائي • ليكن لدينا الدالة $z = f(x, y)$ المتصلة في منطقة محددة R من المستوى xOy . لنقسم هذه المنطقة (أنظر الشكل ٦٣ - ١) إلى n منطقة جزئية R_1, R_2, \dots, R_n مساحاتها $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \dots, \Delta_n A$ على الترتيب لنختار بعد ذلك في كل منطقة جزئية R_k نقطة $P_k (x_k, y_k)$ ونشكل المجموع .

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta_k A = f(x_1, y_1) \Delta_1 A + f(x_2, y_2) \Delta_2 A + \dots + f(x_n, y_n) \Delta_n A \quad (١)$$

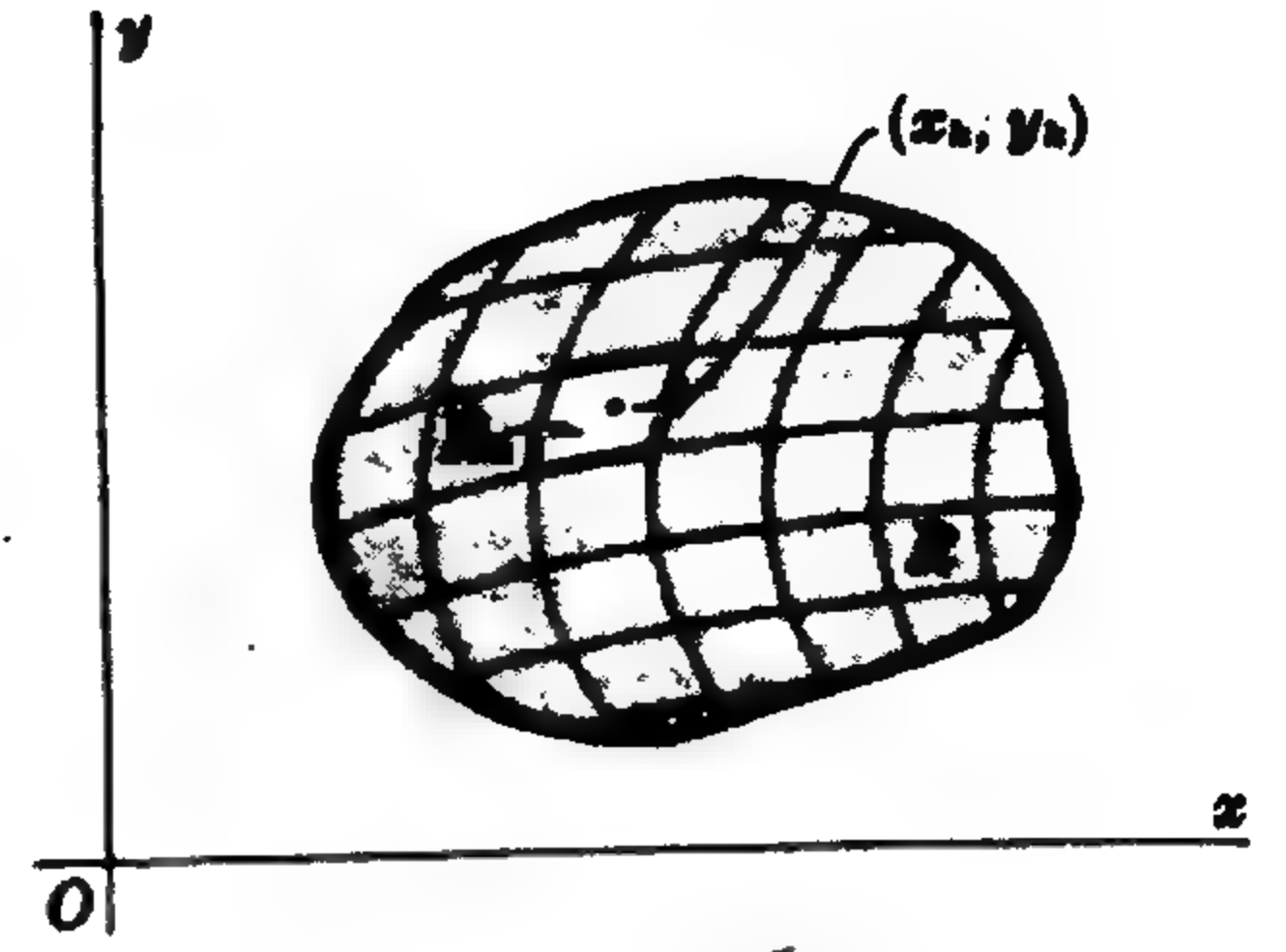
لنعرف الآن قطر منطقة جزئية على أنه أكبر بعد بين أية نقطتين واقعتين داخل المنطقة أو على حدودها ، ولنرمز بـ λ_n لأكبر أقطار المناطق الجزئية .

لنفرض أن عدد المناطق الجزئية يزداد بحيث $\lambda_n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ عندئذ يمكن تعريف التكامل الثنائي للدالة $f(x, y)$ على المنطقة R على أنه :

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta_k A \quad (٢)$$



شكل ٦٣ - ٢



شكل ٦٣ - ١

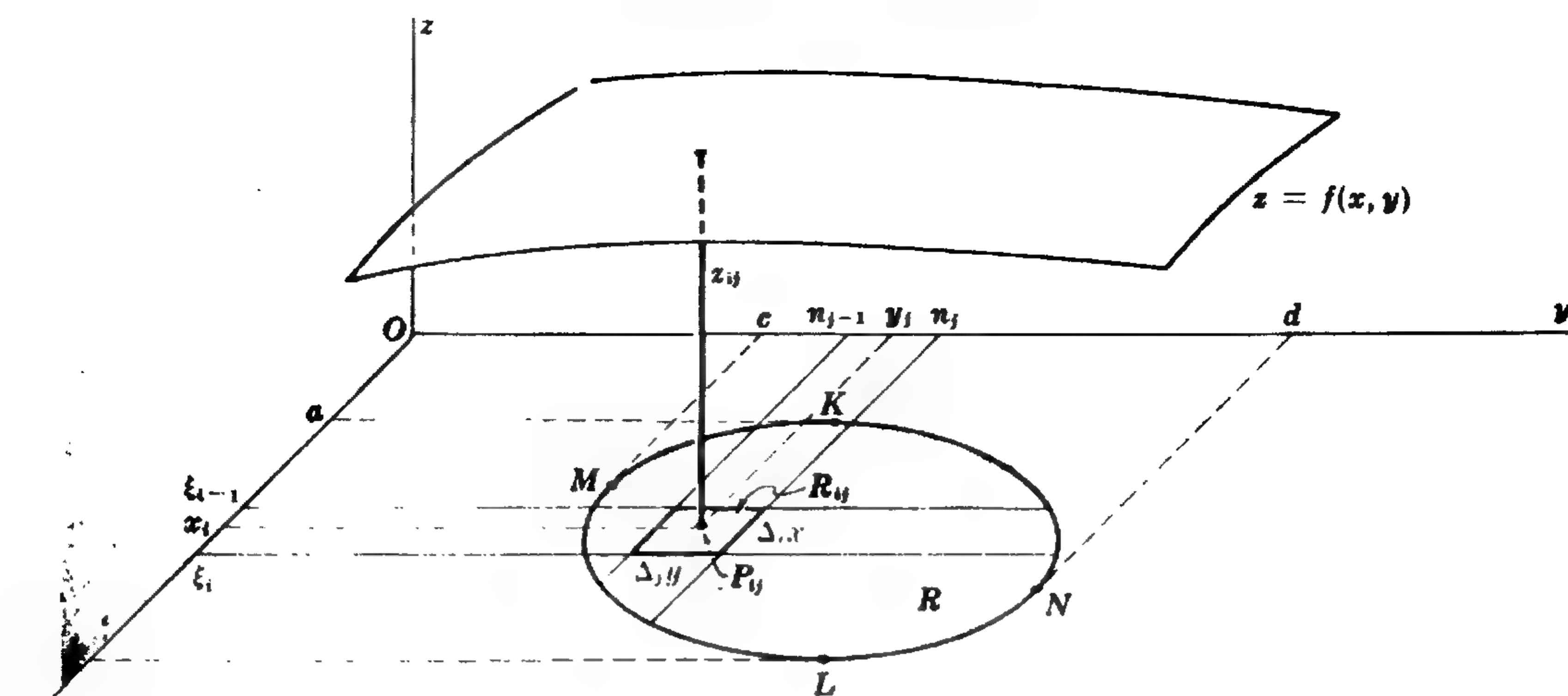
وإذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ ليست سالبة في المنطقة R فإنه يمكن ، كما يبدو من الشكل ٦٣ - ٢ تفسير التكامل الثنائي (٢) على أنه حجم ، فكل حد من الشكل $f(x_k, y_k) \Delta_k A$ من (١) يعطينا حجم عمود رأسي مساحة كل من قاعدتيه المتوازيين $\Delta_k A$ وارتفاعه هو المسافة z_k مقيسة على المستقيم الرأسى المقام من النقطة المختارة P_k على السطح $z = f(x, y)$. وهذا الحجم ، يمكن اعتباره بدوره تقريباً حجم العمود الرأسى الذى قاعدته السفلى هى المنطقة الجزئية R_k وقاعدته العليا مسقط R_k على السطح . إذن المعادلة (١) هى تقريب الحجم الواقع تحت السطح (أى الحجم الذى قاعدته السفلى فى المستوى xOy وقاعدته العليا واقعة على السطح الناتج من حركة مستقيم مواز للمحور z على طول حدود R_k) وأن المعادلة (٢) تعطى ، عن طريق الحدس على الأقل ، قياس هذا الحجم .

إن حساب التكامل الثنائي عن طريق الجمع المباشر صعب مهما كان التكامل بسيطاً ولذا فإننا سوف لا نحاوله هنا .

التكامل المكرر . لننظر فى الحجم المعروف كما سبق ولنفرض أن حدود R هى بحيث لا تشترك مع أى مستقيم مواز للمحور x أو أى مستقيم مواز للمحور y فى أكثر من نقطتين . لنرسم (أنظر الشكل ٦٣ - ٣) المماسين $x = a$ و $x = b$ للحدود ولنفرض أن نقطتى التماس هما k و L . لنرسم كذلك المماسين $y = c$ و $y = d$ ولنفرض أن نقطتى التماس هما M و N . لتكن معادلة المنحنى المستوى LMK هى $y = g_1(x)$ ومعادلة المنحنى المستوى LNK هى $y = g_2(x)$. لنقسم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى m من الفترات الجزئية h_1, h_2, \dots, h_m أطوالها $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_m x$ على الترتيب ، ولتكن نقط التقسيم هى $x = \xi_1, x = \xi_2, \dots, x = \xi_{m-1}$ (كما فى الفصل ٣٣) . ولنقسم الفترة $c \leq y \leq d$ إلى n من الفترات الجزئية k_1, k_2, \dots, k_n أطوالها $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \dots, \Delta_n y$ على الترتيب ولتكن نقط التقسيم هى $y = \eta_1, y = \eta_2, \dots, y = \eta_{n-1}$. لنرمز بـ λ_m لأطول فترة من $\Delta_i x$ و μ_n لأطول فترة من $\Delta_j y$ لنرسم بعد ذلك المستقيمتين المتوازيتين $x = \xi_1, x = \xi_{m-1}$ والمستقيمتين المتوازيتين $y = \eta_1, y = \eta_{n-1}$ فتقسم بذلك المنطقة R إلى مجموعة مستطيلات R_{ij} مساحتها $\Delta_i x \Delta_j y$ وإلى مجموعة من المستطيلات الناقصة سنبملها فيما يلى . لنختار على كل فترة جزئية h_i نقطة $x = x_i$ وعلى كل فترة جزئية k_j نقطة $y = y_j$ فتحدد بذلك فى كل منطقة جزئية R_{ij} نقطة $P_{ij}(x_i, y_j)$ لنلحق بكل منطقة جزئية R_{ij} بواسطة معادلة السطح ، عدداً $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ ولتشكل المجموع :

$$\sum_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1,2,\dots,n} f(x_i, y_j) \Delta_i x \cdot \Delta_j y \quad (٣)$$

ليست (٣) التى حصلنا عليها إلا مجرد حالة خاصة من (١) ، وبالتالي فإنه إذا ازداد عدد المستطيلات إلى ما لا نهاية بحيث يتحول كل من λ_m و μ_n إلى الصفر فإنه ينبغي أن تساوى نهاية (٣) التكامل الثنائي (٢) .



شكل ٦٣ - ٢

لإجراء هذه النهاية ، نختار أولاً أحد الفترات الجزئية وليكن h_i ونشكل المجموع .

$$\left\{ \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y \right\} \Delta x, \quad (i \text{ ثابتة})$$

الذي يمتد إلى جميع المستطيلات التي أحد أبعادها h_i ، أي يمتد إلى جميع المستطيلات في العمود i . فإذا جعلنا $n \rightarrow +\infty$ فإن $\mu_n \rightarrow 0$ وإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y \right\} \Delta x = \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y) dy \Delta x = \phi(x_i) \Delta x$$

لنجمع بعد ذلك على الـ m عموداً ولنجعل $m \rightarrow +\infty$ فنحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \phi(x_i) \Delta x &= \int_a^b \phi(x) dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (1)$$

ومع أننا سوف نستغنى عن الأقواس من الآن فإنه ينبغي أن نفهم (٤) باستمرار على أنها حساب قيمة تكاملين محدودين بسيطين وفق الترتيب المذكور . أي أننا تكامل $f(x, y)$ أولاً بالنسبة لـ y (معتبرين x ثابتة) من $y = g_1(x)$ الحد الأدنى لـ R إلى $y = g_2(x)$ الحد الأعلى لـ R . ثم تكامل بعد ذلك النتيجة بالنسبة لـ x من $x = a$ لأقصى نقطة من R يساراً إلى $x = b$ لأقصى نقطة من R يميناً . يسمى التكامل (٤) التكامل المكرر .

يترك للقارئ ، على شكل تمرين ، أن يشكل أولاً المجموع الممتد على جميع المستطيلات في كل صف ثم يشكل المجموع الممتد على جميع الصفوف ليحصل على التكامل المكرر المكافئ .

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (٥)$$

حيث $x = h_1(y)$ و $x = h_2(y)$ معادلتا المنحنيين المستويين MKN و MLN على الترتيب .

سنرى في المسألة ١ وبطريقة مختلفة كيف أن التكامل المكرر (٤) يقيس الحجم الذي نحن بصدده . وللتعرف على حساب قيم التكاملات المكررة أنظر المسائل ٢ - ٦ .

إن الصعوبة الرئيسية التي تصادفنا عند تشكيل التكاملات المكررة في الفصول التالية تكمن في تحديد حدود التكامل اللازمة لتغطية المنطقة R والمناقشة التي قدمناها ارتكزت على مناطق بسيطة ، وإذا أردت أن تشمل المناقشة مناطق أكثر تعقيداً فانظر . المسائل ٧ - ٩ .

مسائل محلولة

١- لتكن $z = f(x, y)$ دالة غير سالبة ومتصلة في المنطقة R من المستوى xOy ، ولنفرض أن حدود المنطقة تتكون من قوسى المنحنيين $y = g_1(x)$ و $y = g_2(x)$ المتلاقين عند النقطتين K و L كما في الشكل ٦٣ - ٤ . لننظر في الحجم V الواقع تحت السطح .

لنفرض أن مقطع هذا الحجم مع المستوى $x = x_i$ ، حيث $a < x_i < b$ يلاقى محيط R في النقطتين $S [x_i, g_1(x_i)]$ و $T [x_i, g_2(x_i)]$ ويلاقى السطح $z = f(x, y)$ في القوس UV الذي يكون عليه $z = f(x, y)$. إن مساحة هذا المقطع $STUV$ تعطى بـ

$$A(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy$$

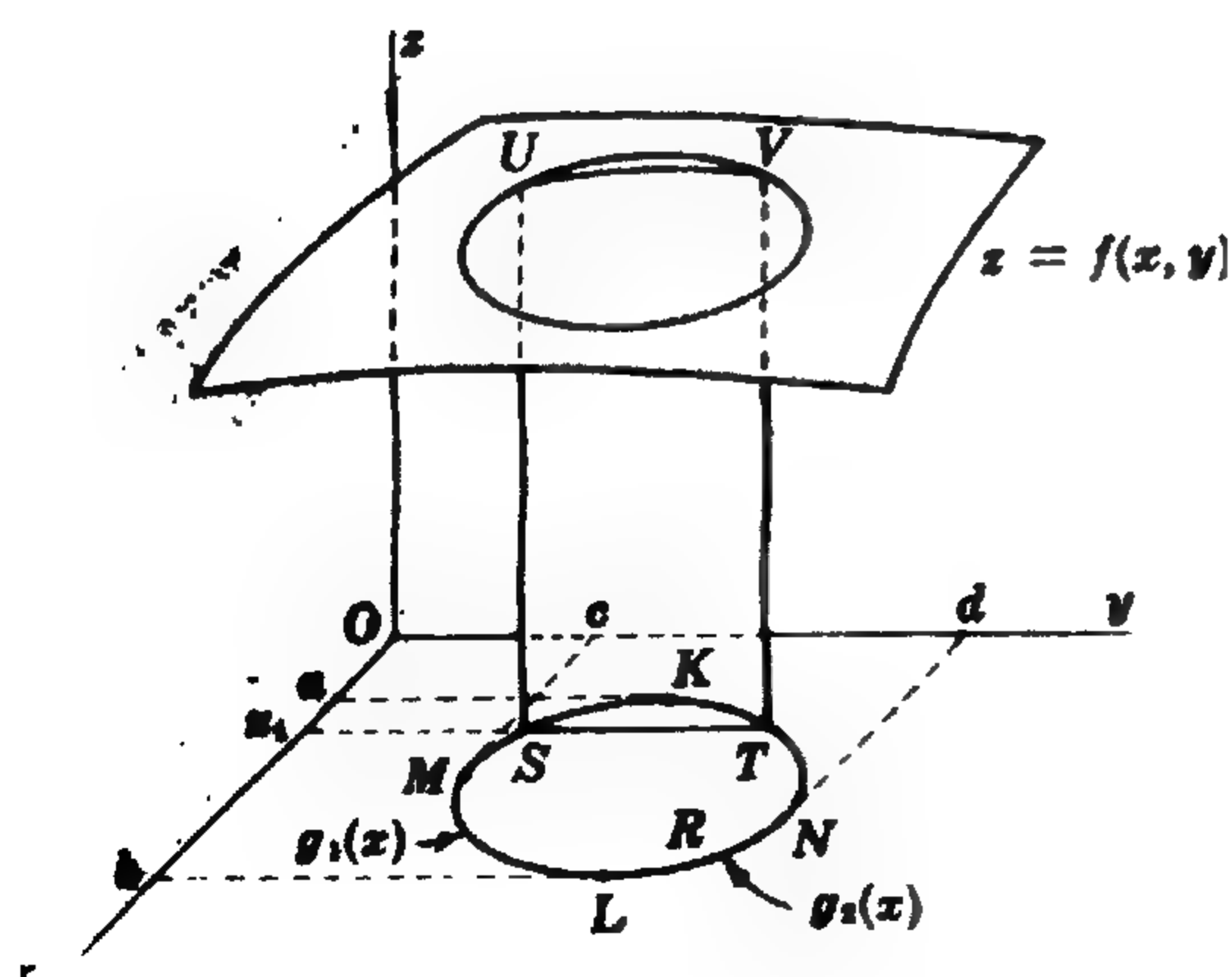
وهكذا نرى أن مساحات مقاطع الحجم بمستويات موازية للمستوى yOz هي دوال معلومة في x :

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

حيث x بعد المستوى القاطع عن نقطة الأصل واستناداً إلى الفصل ٣٦ يكون الحجم المطلوب هو :

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

وهذا هو التكامل المكرر الوارد في المعادلة (٤)



شكل ٦٣ - ٤

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 \left[y \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \text{٧}$$

$$\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y) dx dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 + xy \right) \Big|_y^{3y} dy = \int_1^2 6y^2 dy = 2y^3 \Big|_1^2 = 14 - \text{٨}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2-2}^{x^2+x} x dy dx = \int_{-1}^1 (xy) \Big|_{x^2-2}^{x^2+x} dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x) dx = \frac{9}{4} - \text{٩}$$

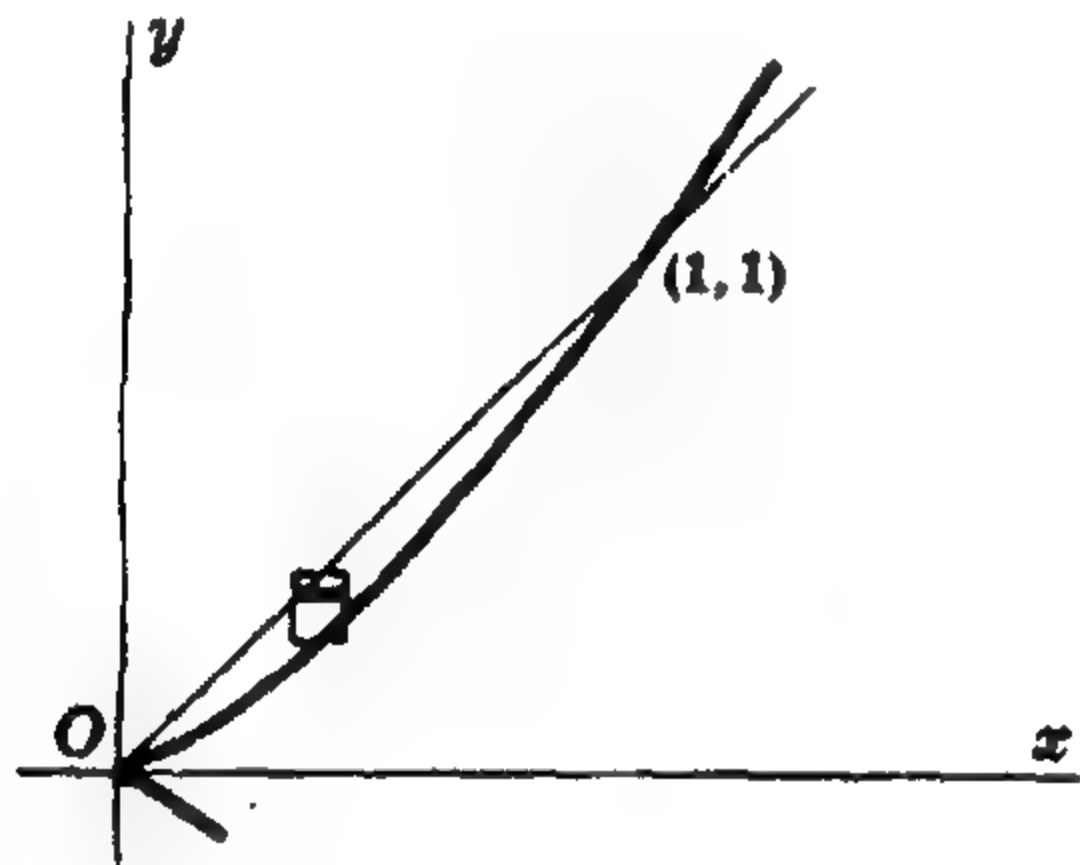
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} \rho \sin \theta d\rho d\theta &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \rho^2 \sin \theta \right) \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta - \text{١٠} \\ &= \left(-\frac{1}{6} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_2^{4 \cos \theta} \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_2^{4 \cos \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} (64 \cos^4 \theta - 4) d\theta - \text{١١}$$

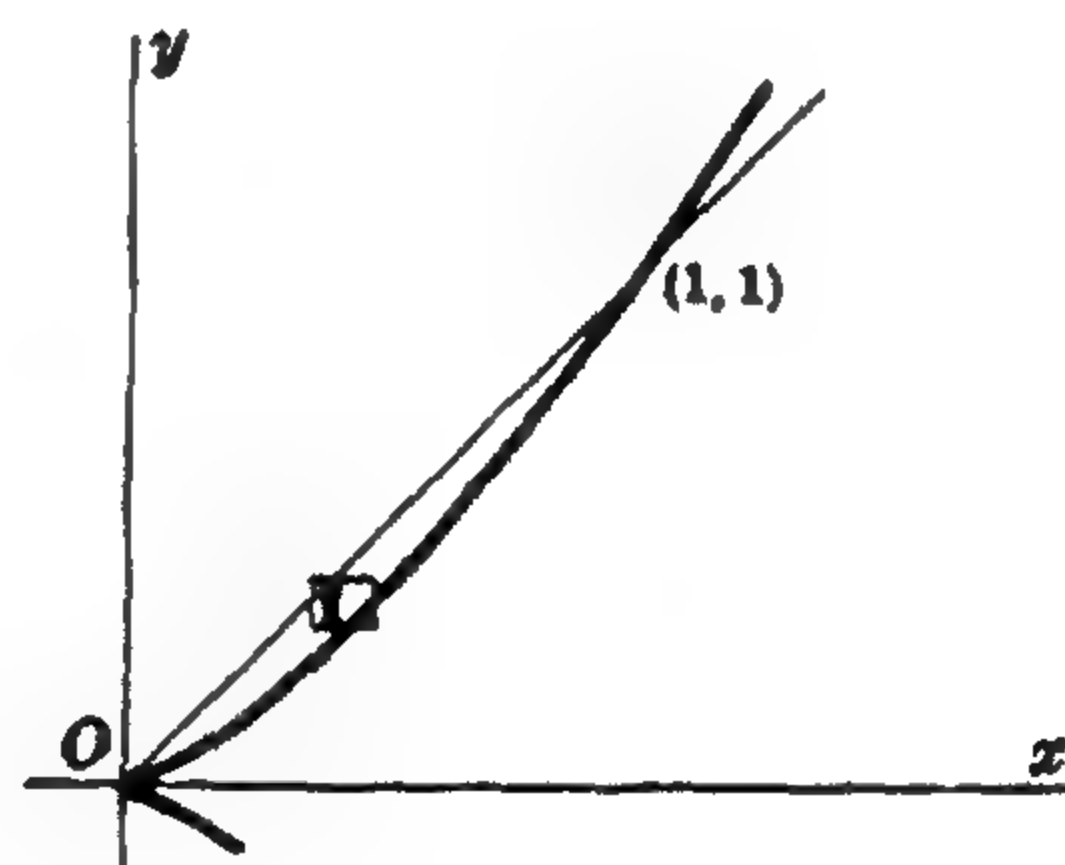
$$= \left[64 \left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \right) - 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 10\pi$$

٧ - احسب قيمة $\iint_R dA$ حيث R هي المنطقة الواقعة في الربع الأول بين القطع المكافئ نصف المكعب $y^2 = x^3$ والمستقيم $y = x$.

يتقاطع القطع المكافئ مع المستقيم في النقطتين $(0, 0)$ و $(1, 1)$ اللتين تحددان القيم القصوى لـ x و y في المنطقة R .



شكل ٦٣ - ٦



شكل ٦٣ - ٥

حل أول : أنظر الشكل ٦٣ - ٥ لتكامل أولاً على شريط أفقي ، أي بالنسبة لـ x من $x = y$ (المستقيم) إلى $x = y^{2/3}$ (القطع المكافئ) ثم تكامل بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = 1$.

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y) dy = \left[\frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

حل ثان : أنظر الشكل ٦٣ - ٦ لتكامل أولاً على شريط رأسي ، أي بالنسبة لـ y من $y = x^{3/2}$ (القطع المكافئ) إلى $y = x$ (المستقيم) ثم تكامل بالنسبة لـ x من $x = 0$ إلى $x = 1$.

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^{3/2}) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

٨ - احسب قيمة $\iint_R dA$ حيث R هي المنطقة الواقعة بين $y = 2x$ و $y = x^2$ إلى يمينه x .

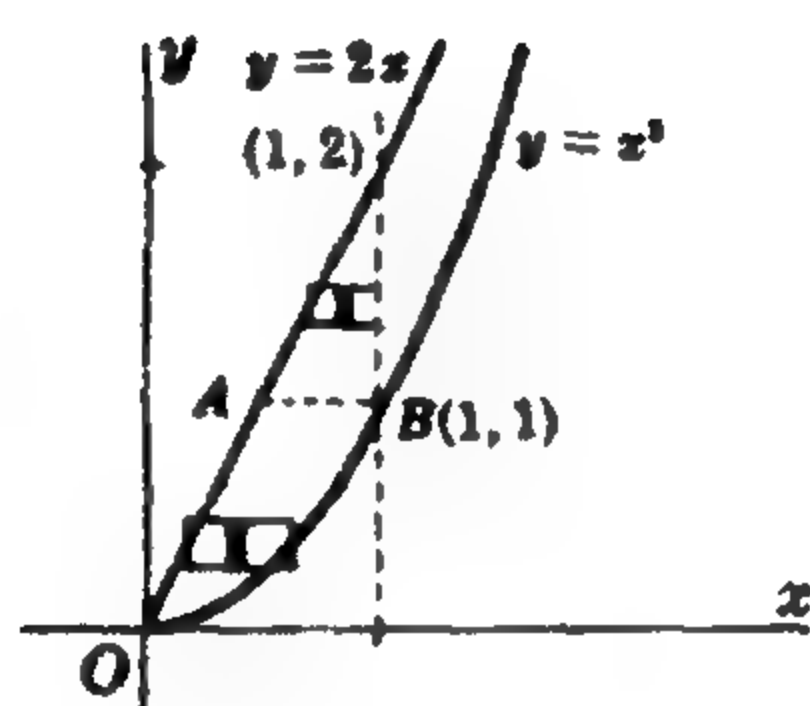
لتكامل أولاً على شريط رأسي (أنظر الشكل ٦٣ - ٧) فنجد :

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy dx = \int_0^1 (2x - x^2) dx = \frac{2}{3}$$

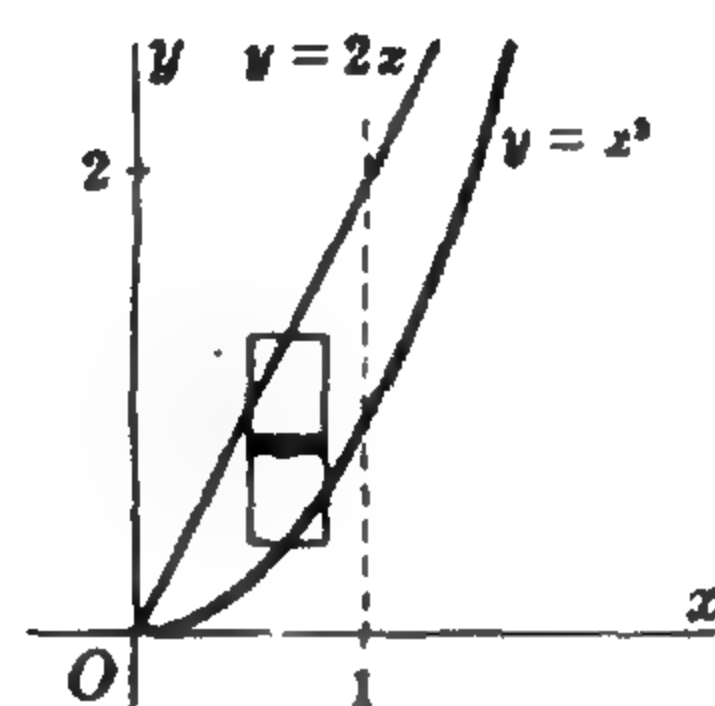
أما إذا استخدمنا الأشرطة الأفقية (أنظر الشكل ٦٣ - ٨) فنحتاج إلى تكاملين متتاليين. لرمز R_1 لذلك الجزء من R الواقع تحت AB وب R_2 .

لذلك للجزء الواقع فوق AB عندئذ يكون :

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y/2}^1 dx dy = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$



شكل ٦٣ - ٨



شكل ٦٣ - ٧

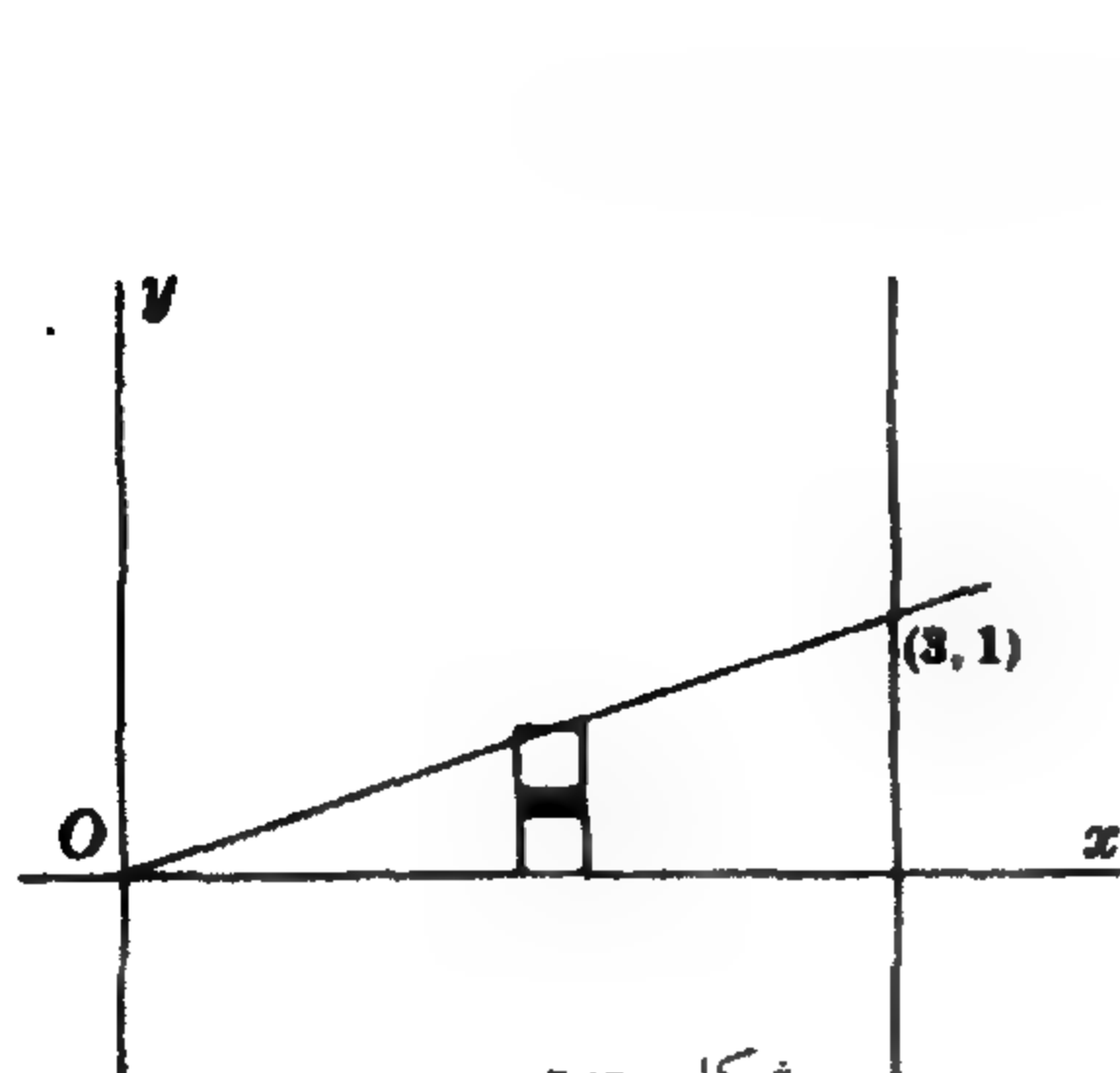
٩ - احسب قيمة $\iint_R x^2 dA$ حيث R هي المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين القطع الزائد $xy = 16$ والمستقيمتين $y = x$, $y = 0$, $x = 8$. أنظر الشكل ٦٣ - ٩.

يتضح من الشكل ٦٣ - ٩ أنه ينبغي تجزئة المنطقة R إلى منطقتين وأن تحسب قيمة التكامل المكرر في كل منهما. لرمز R_1 لتلك المنطقة من R الواقعة فوق المستقيم $y = 2$ وب R_2 للمنطقة الواقعة تحت ذلك المستقيم عندئذ :

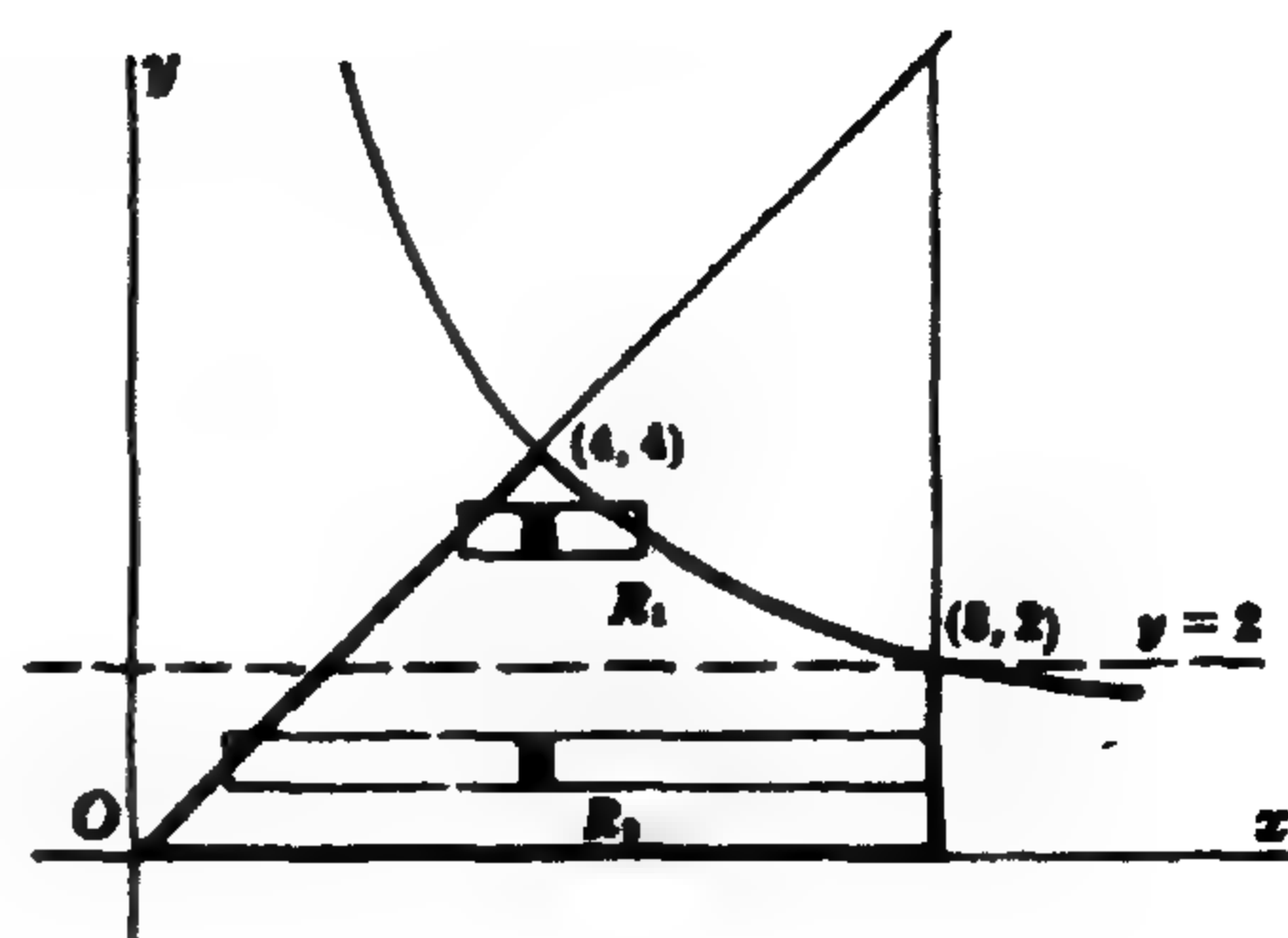
$$\begin{aligned} \iint_R x^2 dA &= \iint_{R_1} x^2 dA + \iint_{R_2} x^2 dA = \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2 dx dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{3} \int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} - y^3 \right) dy + \frac{1}{3} \int_0^2 (8^3 - y^3) dy = 448 \end{aligned}$$

ويمكن أن نقوم المنطقة R بالمستقيم $x=4$ ، وهذا ما نتركه للقارئ كتمرين ، فنحصل على :

$$\iint_R x^2 dA = \int_0^4 \int_y^{16/y} x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2 dy dx$$



شكل ٦٣ - ١٠



شكل ٦٣ - ٩

١٠ - احسب قيمة $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ بأن تعكس أولاً ترتيب التكامل

لا يمكن حساب التكامل المقروض مباشرة لأنه لا يمكن التعبير عن $\int e^{x^2} dx$ بدوال ابتدائية. إن المنطقة R محصورة بين المستقيمتين $x = 3y$, $x = 3$, $y = 0$ وإذا أردنا أن نعكس ترتيب التكامل فعلينا أن نكامل أولاً بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = x/3$ ثم بالنسبة لـ x من $x = 0$ إلى $x = 3$ فنجد .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy &= \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^3 e^{x^2} y \Big|_0^{x/3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 e^{x^2} x dx = \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_0^3 = \frac{1}{6} (e^9 - 1) \end{aligned}$$

مسائل إضافية

١١ - احسب قيمة التكاملات المكررة التالية :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{x^2} x e^y dy dx &= \frac{1}{2} e - 1 \quad (أ) \\ \int_0^1 \int_1^2 dx dy &= 1 \quad (ب) \\ \int_2^4 \int_y^{4-y} y dx dy &= \frac{32}{3} \quad (ج) \\ \int_0^{\text{Arc tan } 3/2} \int_0^{2 \sec \theta} \rho d\rho d\theta &= 3 \quad (د) \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta &= \frac{8}{3} \quad (هـ) \\ \int_0^{\pi/4} \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta &= \frac{1}{20} \quad (و) \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta &= \frac{49}{32} \pi \quad (ز) \\ \int_0^1 \int_1^2 (x+y) dx dy &= 9 \quad (ح) \\ \int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) dy dx &= \frac{70}{3} \quad (ط) \\ \int_0^1 \int_{x^2}^x x y^2 dy dx &= \frac{1}{40} \quad (ي) \\ \int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2 dx dy &= \frac{3}{4} \quad (ك) \\ \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3) dy dx &= \frac{7}{60} \quad (ل) \end{aligned}$$

١٢ – احسب كلا من التكاملات الثنائية التالية باستخدام التكاملات المكررة .

احسب قيمة التكامل المكرر بكلا الترتيبين إذا كان الأمر سهلاً .

(أ) الدالة x والمنطقة محصورة بين $y = x^2$ و $y = x^3$. ج : $1/20$

(ب) الدالة y والمنطقة هي المذكورة في (أ) . ج : $1/35$

(ج) الدالة x^2 والمنطقة محصورة بين المستقيمتين $x = 2$ ، $y = 2x$ ، $y = x$. ج : 4

(د) الدالة 1 والمنطقة واقعة في الربع الأول بين $2y = x^2$ ، $y = 3x$ ، و $x + y = 4$. ج : $46/4$ ؛ $8/3$

(هـ) الدالة y والمنطقة واقعة فوق $y = 0$ ومحصورة بين $y^2 = 4x$ و $y^2 = 5 - x$. ج : 5

(و) الدالة $\frac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ والمنطقة في الربع الأول محددة بـ $x^2 = 4 - 2y$. ج : 4

١٣ – اعكس في المسائل ١١ (أ) - (ح) ترتيب التكامل واحسب التكاملات المكررة الناتجة .

الفصل الرابع والستون

المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية

حساب مساحة السطح بالتكامل الثنائي • إذا جعلنا $f(x, y) = 1$ في التكامل الثنائي الوارد في الفصل

٦٣ فإن هذا التكامل يأخذ الشكل $\iint_R dA$. ويقاس هذا التكامل بالوحدات المكعبة حجم اسطوانة طولها يساوي وحدة الأطوال ، ويقاس بالوحدات المربعة مساحة المنطقة R .

انظر المسائل ١ - ٢

يكون الاحداثيات القطبية $A = \iint_R dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho d\theta$ حيث نأخذ $\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$ $\theta = \alpha, \theta = \beta$ بحيث تغطي المنطقة R فعلا .

انظر المسائل ٣ - ٥

المراكز المتوسطة • إن الاحداثيين (x, y) للمركز المتوسط للمنطقة المستوية R التي مساحتها $A = \iint_R dA$ يحققان العلاقات :

$$A \cdot \bar{y} = M_x \quad \text{و} \quad A \cdot \bar{x} = M_y$$

$$\bar{y} \cdot \iint_R dA = \iint_R y dA \quad \text{و} \quad \bar{x} \cdot \iint_R dA = \iint_R x dA \quad \text{أو}$$

انظر المسائل ٦ - ٩

عزما القصور الذاتي . لمنطقة مستوية R بالنسبة للمحورين الاحداثيين يعطيان ب :

$$I_y = \iint_R x^2 dA \quad \text{و} \quad I_x = \iint_R y^2 dA$$

أما عزم القصور الذاتي القطبي (أى عزم القصور الذاتي بالنسبة لمستقيم مار بنقطة الأصل وعمودى على مستوى السطح) للسطح المستوي R فيعطى ب :

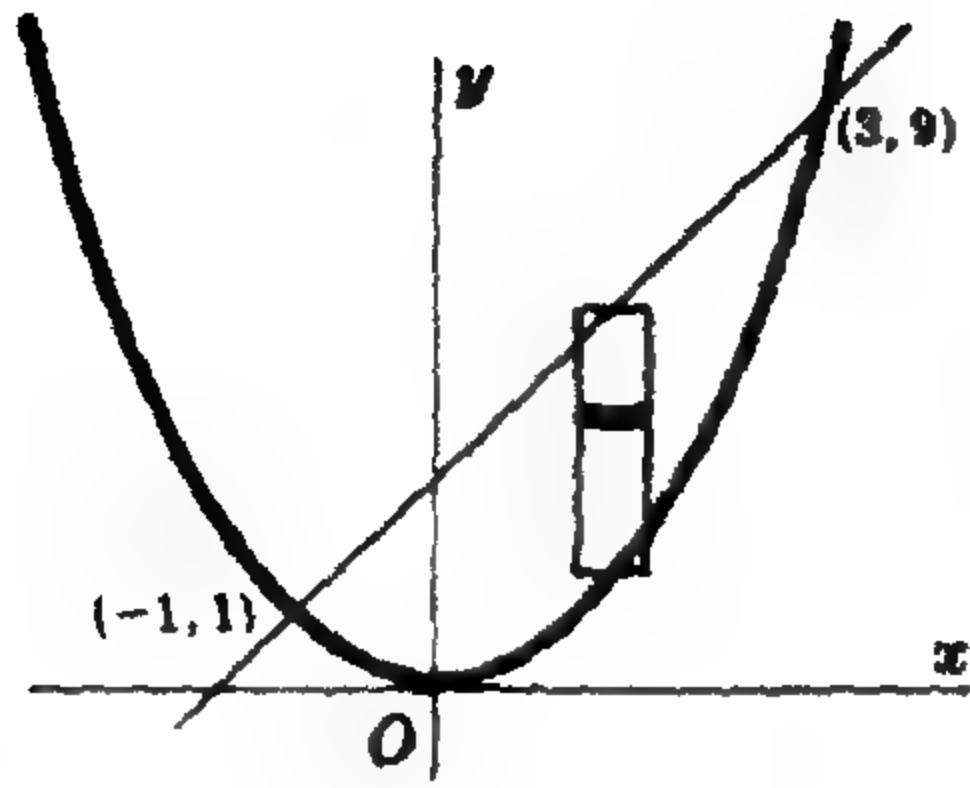
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) dA$$

انظر المسائل ١٠ - ١٢

مسائل محلولة

١ - احسب مساحة السطح الواقع بين القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم $y = 2x + 3$.

باستخدام الشرائح الرأسية (انظر الشكل ٦٤ - ١) نجد أن :



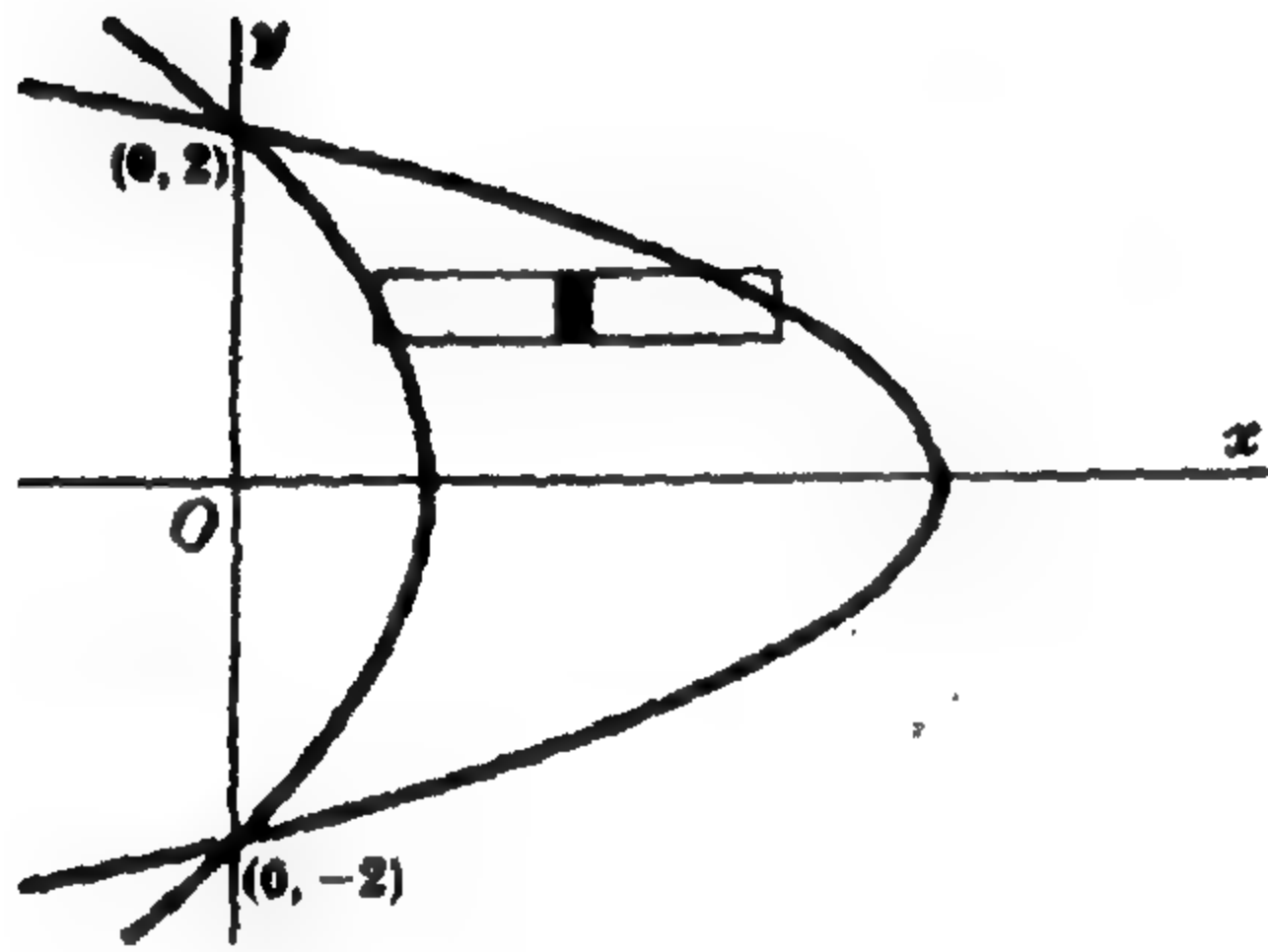
شكل ٦٤ - ١

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 \int_{x^2}^{2x+3} dy dx \\ &= \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx \\ &= 32/3 \text{ square units} \end{aligned}$$

٢ - احسب مساحة السطح المحصورة بين القطعين المكافئين

$$y^2 = 4 - 4x \text{ و } y^2 = 4 - x$$

باستخدام الشرائح الأفقية (انظر الشكل ٦٤ - ٢) والاستفادة من التناظر .



شكل ٦٤ - ٢

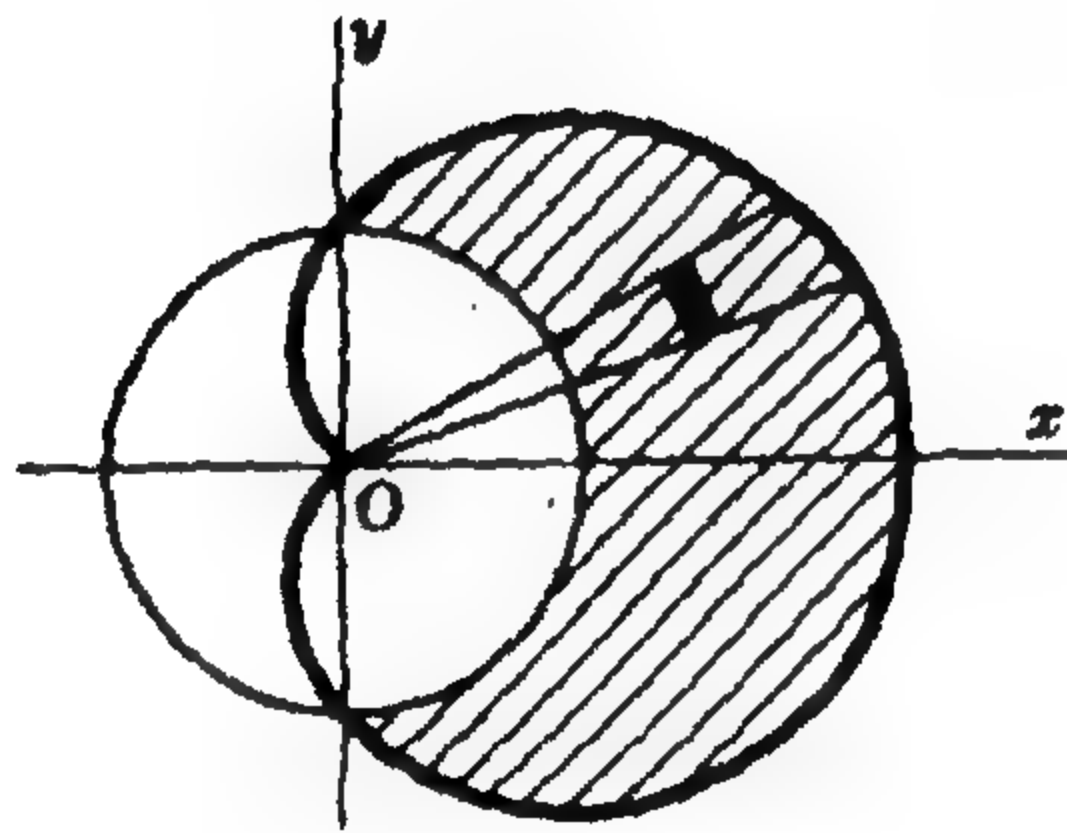
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^2 [(4 - y^2) - (1 - \frac{1}{4}y^2)] dy \\ &= 6 \int_0^2 (1 - \frac{3}{4}y^2) dy \\ &= 8 \text{ square units} \end{aligned}$$

٣ - احسب مساحة السطح الواقعة خارج الدائرة $\rho = 2$ وداخل منحنى

$$\text{القلب } \rho = 2(1 + \cos \theta)$$

إن المساحة المطلوبة ، بسبب التناظر ، تساوى ضعف المساحة التي

يمسحها نصف القطر المتجه عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 1/2\pi$ وهكذا فإن :



شكل ٦٤ - ٣

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_2^{2(1+\cos \theta)} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \left[2 \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = (\pi + 8) \text{ square units} \end{aligned}$$

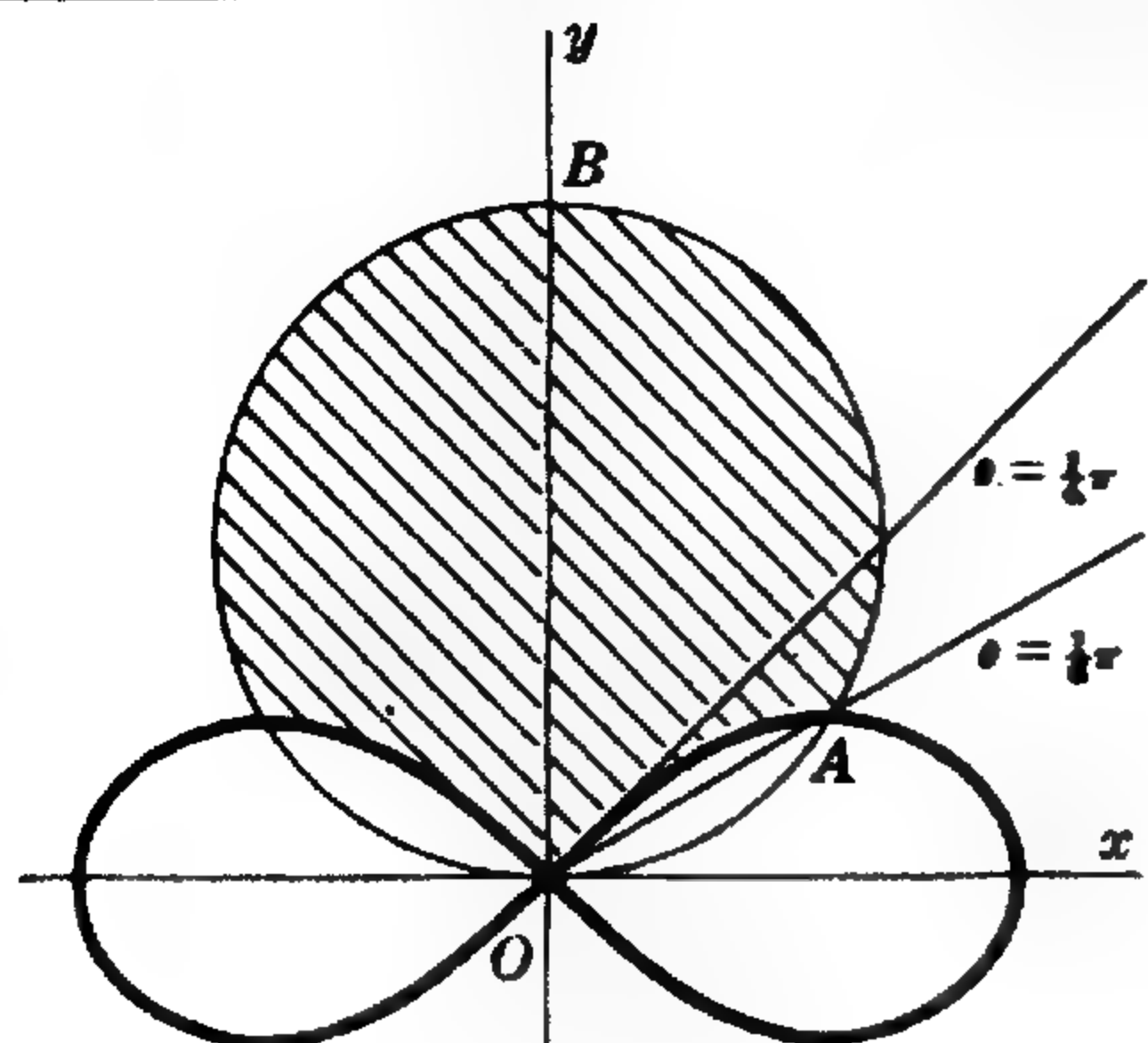
٤ - احسب مساحة السطح الواقع داخل الدائرة $\rho = 4 \sin \theta$ وخارج المنحنى ذو العروتين (الليمسكات)

$$\rho^2 = 8 \cos 2\theta$$

(إن المساحة المطلوبة تساوى ضعف مساحة قطعة السطح في الربع الأول بين المنحنيين والمستقيم $\theta = 1/2\pi$. يلاحظ أن نصف

القطر المتجه OA يرسم قوس الدائرة عندما تتغير θ من $\theta = \pi/6$ إلى $\theta = \pi/2$ وعلى هذا فإنه ينبغي أن نعتبر المنطقة

مكونه من منطقتين إحداها تحت المستقيم $\theta = \pi/4$ والأخرى فوقه .
إذن :



شكل ٦ - ١

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{2\sqrt{2}\cos 2\theta}^{4\sin \theta} \rho \, d\rho \, d\theta + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{4\sin \theta} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16 \sin^2 \theta - 8 \cos 2\theta) \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16 \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4\right) \end{aligned}$$

$$N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx. \quad \text{و - احسب قيمة}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy, \quad \text{بحال أن}$$

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \iint e^{-(x^2+y^2)} \, dA \end{aligned} \quad \text{فإن}$$

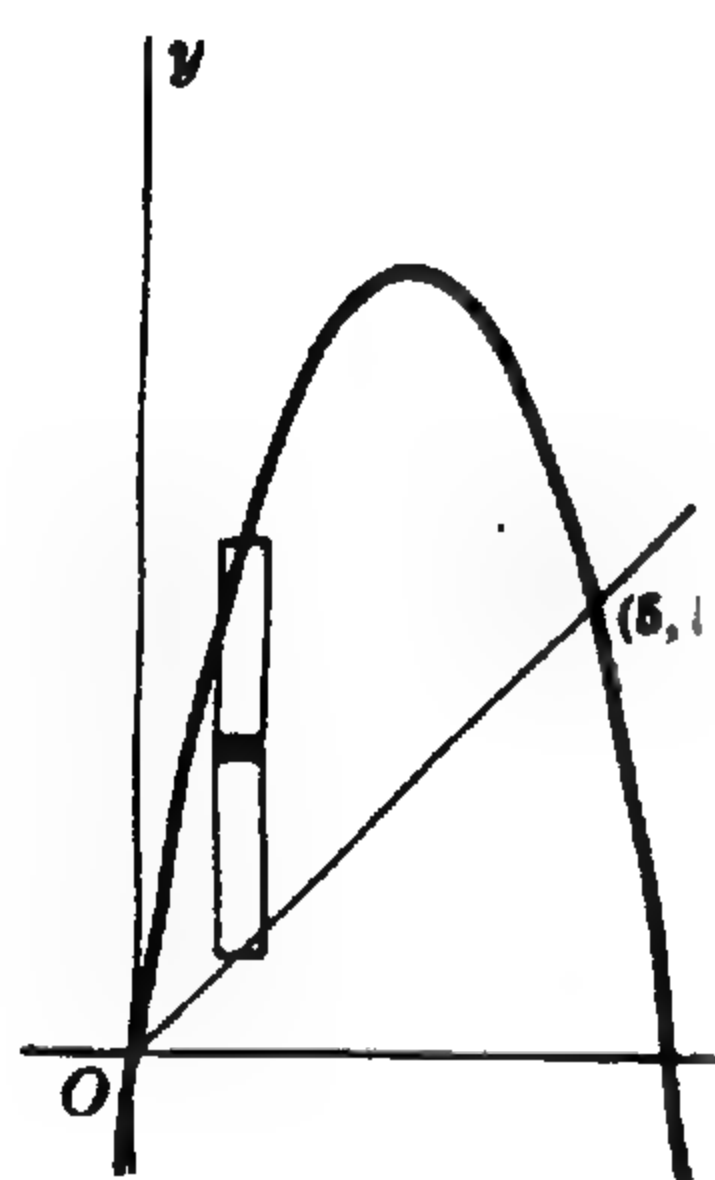
وبالانتقال إلى الإحداثيات القطبية ($x^2 + y^2 = \rho^2$, $dA = \rho \, d\rho \, d\theta$),

$$N^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right) \right\}_0^a d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ومنه } N = \sqrt{\pi}/2$$

٦ - عين المركز المتوسط للسطح المستوي المحصور بين القطع المكافئ

$$y = 6x - x^2 \quad \text{و المستقيم } y = x$$



شكل ٦ - ٦

$$A = \iint_R dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy \, dx = \int_0^5 (5x - x^2) \, dx = \frac{125}{6}$$

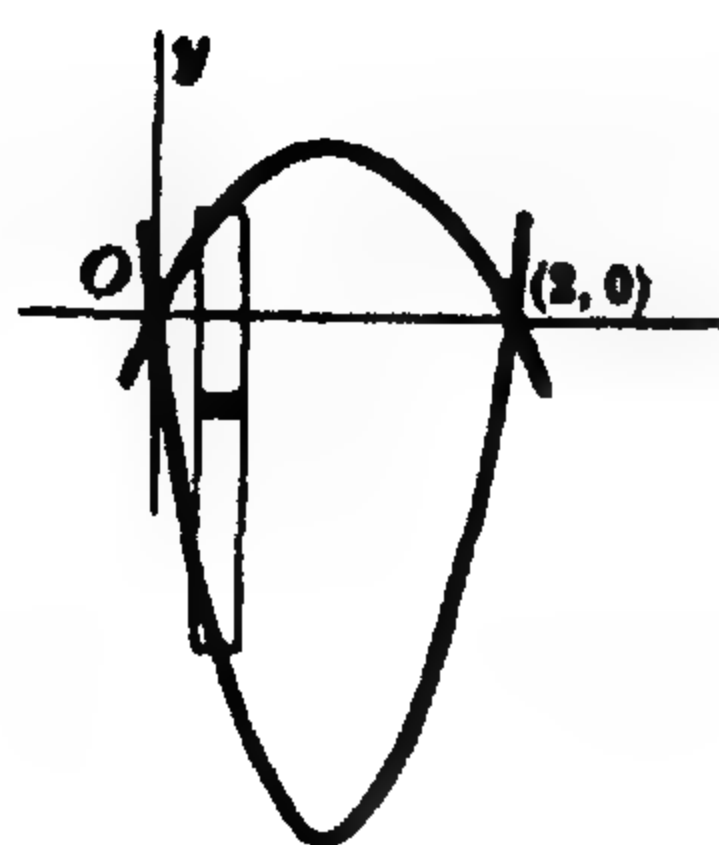
$$M_y = \iint_R x \, dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x \, dy \, dx = \int_0^5 (5x^2 - x^3) \, dx = \frac{625}{12}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y \, dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^5 \{(6x - x^2)^2 - x^2\} \, dx = \frac{625}{6} \end{aligned}$$

$$\text{وعلى هذا فإن } \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{5}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 5, \quad \text{والمركز}$$

المتوسط هو النقطة (5/2 , 5) .

٧ - عين المركز المتوسط للسطح المستوي المحصور بين القطعين المكافئين $y = 2x - x^2$ و $y = 3x^2 - 6x$



شكل ٦٤ - ٧

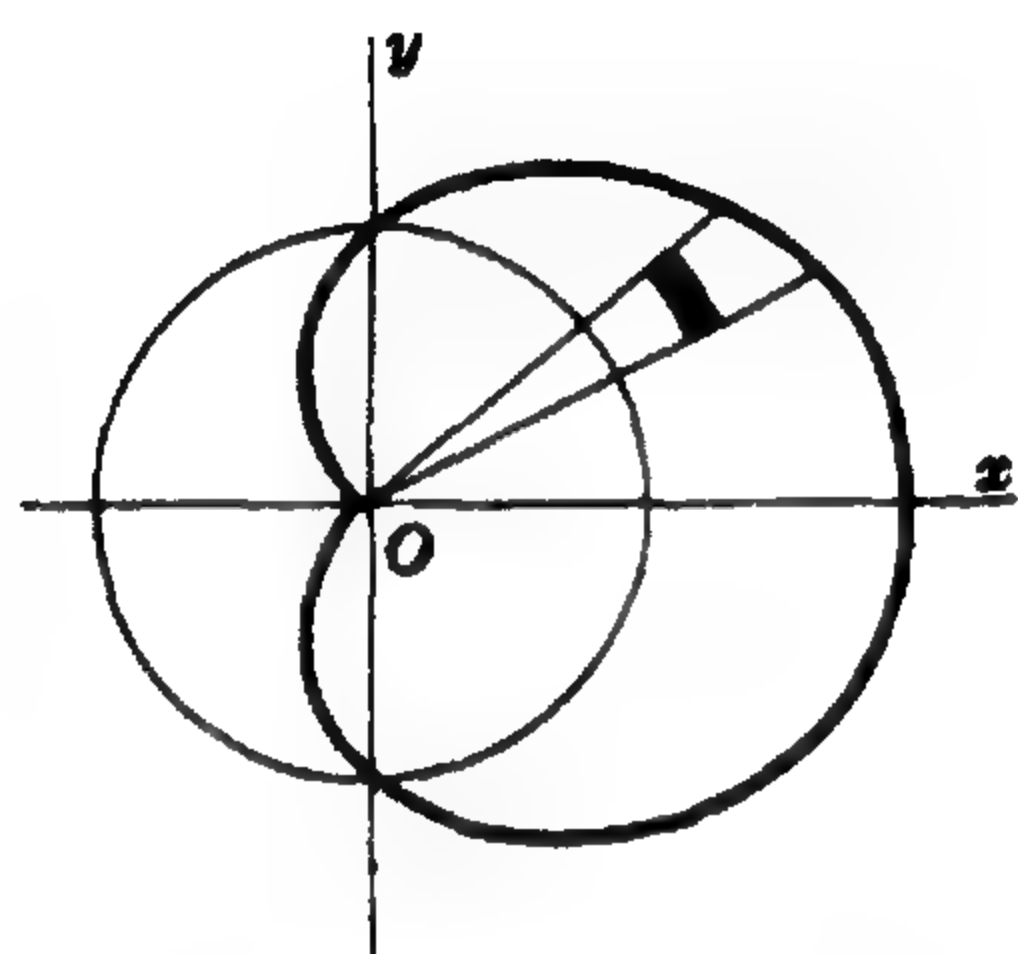
$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy dx = \int_0^2 (8x - 4x^2) dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R x dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x dy dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3) dx = \frac{16}{3}$$

$$M_z = \iint_R y dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y dy dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^2 \{(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2\} dx = -\frac{64}{15}$$

وبالتالي فإن $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1$, $\bar{y} = \frac{M_z}{A} = -\frac{4}{5}$, والمركز المتوسط

هو النقطة $(1, -4/5)$



شكل ٦٤ - ٨

٨ - عين المركز المتوسط للسطح المستوي الواقع خارج الدائرة $\rho = 1$ وداخل منحنى القلب $\rho = 1 + \cos \theta$ (انظر الشكل ٦٤ - ٨).

يتضح من الشكل ٦٤ - ٨ أن $\bar{y} = 0$ وأن \bar{x} هي نفسها سواء حسبناها للسطح المفروض أو لنصفه الواقع فوق المحور القطبي.

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} \rho d\rho d\theta \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \{(1 + \cos \theta)^2 - 1^2\} d\theta = \frac{\pi + 8}{8}$$

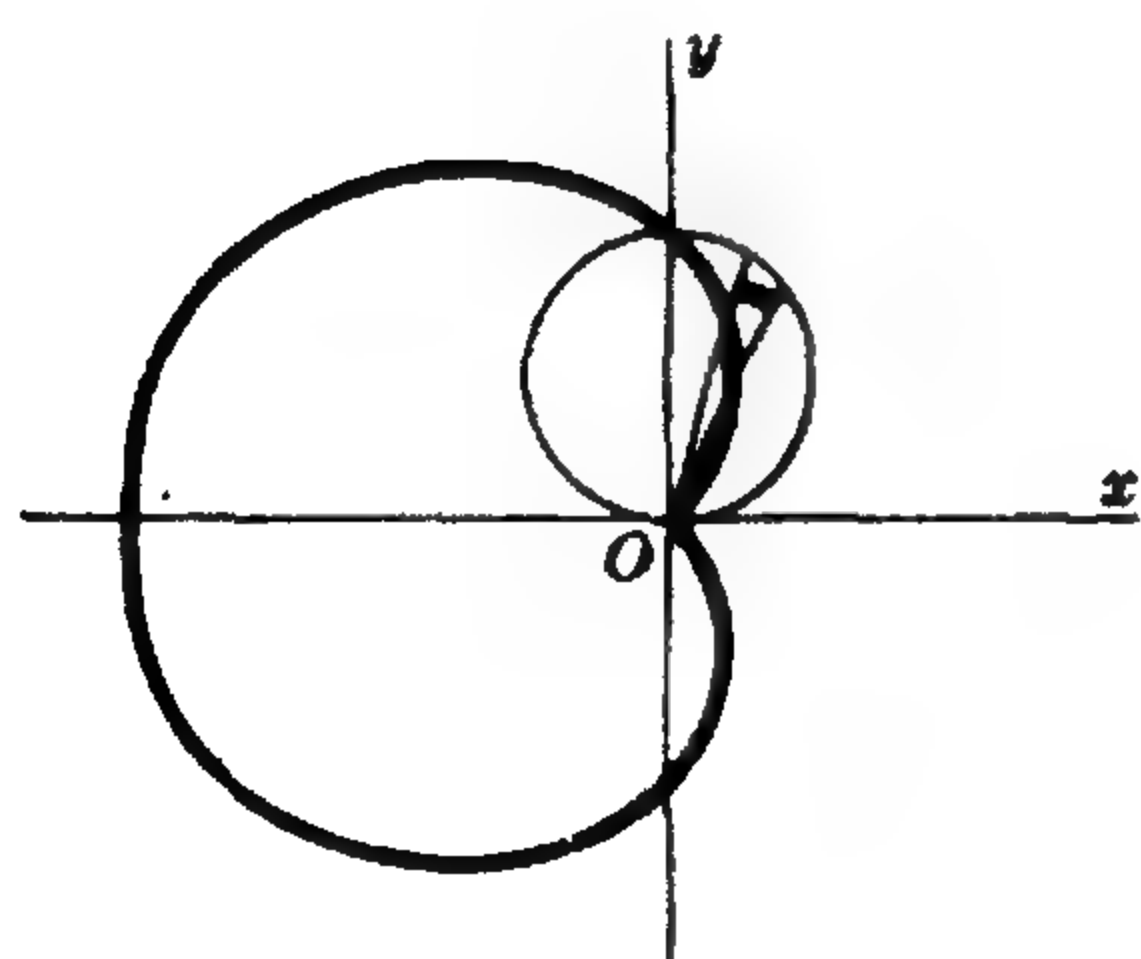
$$M_y = \iint_R x dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} (\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta \\ = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (3 \cos^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} \theta + \frac{3}{4} \sin 2\theta + 3 \sin \theta - \sin^3 \theta + \frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi + 32}{48}$$

والمساحة الأخيرة يكون المركز المتوسط هو النقطة $\left(\frac{15\pi + 32}{6(\pi + 8)}, 0\right)$

٩ - عين المركز المتوسط للسطح الواقع داخل $\rho = \sin \theta$ وخارج $\rho = 1 - \cos \theta$ انظر الشكل ٦٤ - ٩

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos \theta}^{\sin \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta - 1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{4 - \pi}{4}$$

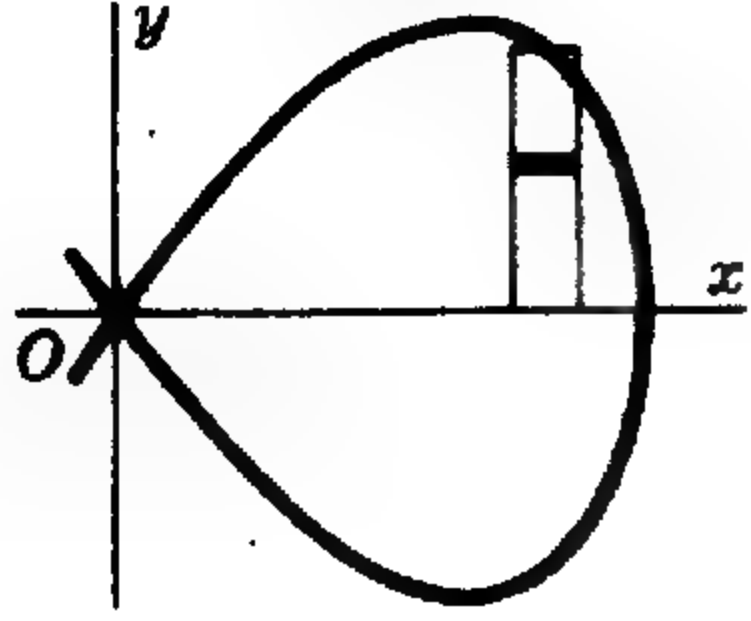


شكل ٦٤ - ٩

$$M_y = \iint_R x dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos \theta}^{\sin \theta} (\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta \\ = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1 + 3 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) \cos \theta d\theta \\ = \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_z = \iint_R y dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos \theta}^{\sin \theta} (\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1 + 3 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) \sin \theta d\theta \\ = \frac{3\pi - 4}{48}$$

فالمرکز المتوسط هو النقطة $\left(\frac{15\pi - 44}{12(4 - \pi)}, \frac{3\pi - 4}{12(4 - \pi)}\right)$.



شكل ٦٤ - ١٠

١٠ - احسب I_x, I_y, I_0 لسطح الذي يحدد بمقدرة المنحنى $y^2 = x^2(2-x)$.

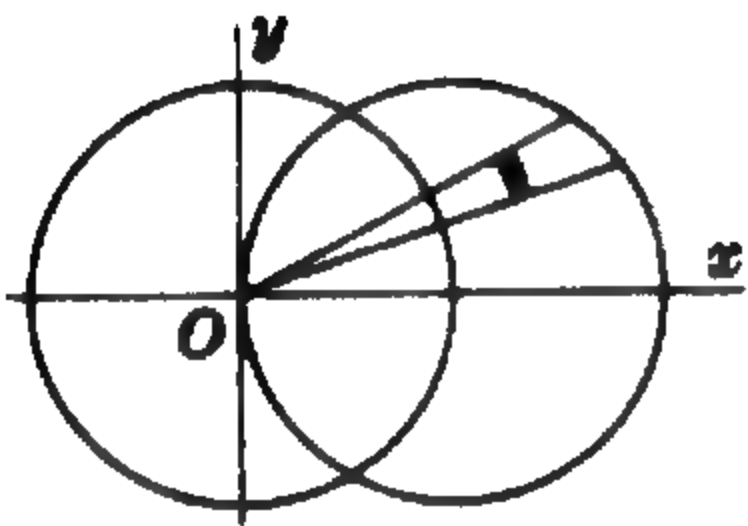
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = 2 \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy dx = 2 \int_0^2 x\sqrt{2-x} dx \\ &= -4 \int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4) dz = -4 \left[\frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

وذلك باستخدام التحويل $2-x = z^2$.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2 dA = 2 \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2 dy dx = \frac{2}{3} \int_0^2 x^3(2-x)^{3/2} dx \\ &= -\frac{4}{3} \int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^4 dz = -\frac{4}{3} \left[\frac{8}{5} z^5 - \frac{12}{7} z^7 + \frac{2}{3} z^9 - \frac{1}{11} z^{11} \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_R x^2 dA = 2 \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2 dy dx = 2 \int_0^2 x^3\sqrt{2-x} dx \\ &= -4 \int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^2 dz = -4 \left[\frac{8}{3} z^3 - \frac{12}{5} z^5 + \frac{6}{7} z^7 - \frac{1}{9} z^9 \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21} A \end{aligned}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231} A.$$



شكل ٦٤ - ١١

١١ - احسب I_x, I_y, I_0 للسطح في الربع الأول خارج الدائرة $\rho = 2a$.

وداخل الدائرة $\rho = 4a \cos \theta$.

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a \cos \theta} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \{(4a \cos \theta)^2 - (2a)^2\} d\theta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3} a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2 dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a \cos \theta} (\rho \sin \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \{(4a \cos \theta)^4 - (2a)^4\} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 4a^4 \int_0^{\pi/3} (16 \cos^4 \theta - 1) \sin^2 \theta d\theta = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6} a^4 = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{2(2\pi + 3\sqrt{3})} a^2 A \end{aligned}$$

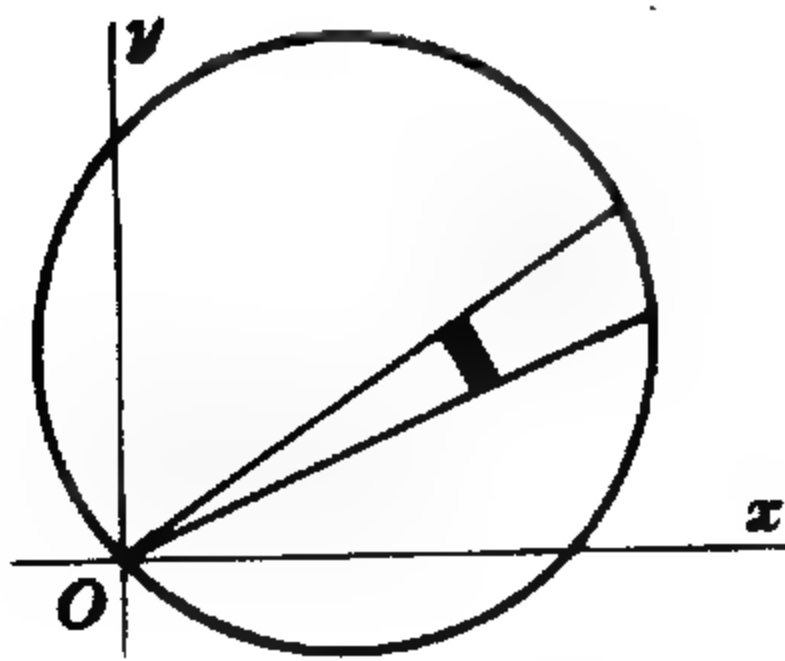
$$I_y = \iint_R x^2 dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a \cos \theta} (\rho \cos \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2} a^4 = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})} a^2 A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{3} a^4 = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}} a^2 A$$

١٢ - احسب I_x, I_y, I_0 للسطح الواقع داخل الدائرة $\rho = 2(\sin \theta + \cos \theta)$.

بما أن $x^2 + y^2 = \rho^2$ فإن

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin \theta + \cos \theta)^4 d\theta \\ &= 4 \left[\frac{3}{2} \theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 6\pi = 3A \end{aligned}$$



شكل ٦٤ - ١٢

ويتضح من الشكل ١٢-٦٤ أن $I_x = I_y$ وبالتالي فإن $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{2} A$.

مسائل إضافية

١٣ - باستخدام التكاملات الثنائية احسب مساحات السطوح التالية :

- (أ) المحصورة بين $3x + 4y = 24, x = 0, y = 0$. ج : 24 sq. un.
 (ب) المحصورة بين $x + y = 2, 2y = x + 4, y = 0$. ج : 6 sq. un.
 (ج) المحصورة بين $x^2 = 4y, 8y = x^2 + 16$. ج : $32/3$ sq. un.
 (د) داخل $\rho = 2(1 - \cos \theta)$. ج : 6π sq. un.
 (هـ) المحددة بـ $\theta = \pi/3$ و $\rho = \tan \theta \sec \theta$. ج : $1/2 \sqrt{3}$ sq. un.
 (و) خارج $\rho = 4$. خارج $\rho = 8 \cos \theta$. ج : $8^{2/3}\pi + \sqrt{3}$ sq. un.

١٤ - عين المركز المتوسط لكل من السطوح التالية :

- (أ) سطح المسألة ١٣ (أ) . ج : (8/3, 2)
 (ب) سطح المسألة ١٣ (ج) الواقع في الربع الأول . ج : (3/2, 8/5)
 (ج) السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ $y^2 = 6x, y = 0, x = 6$. ج : (18/5, 9/4)
 (د) السطح المحدد بـ $y^2 = 4x, x^2 = 5 - 2y, x = 0$. ج : (13/40, 26/15)
 (هـ) السطح الواقع في الربع الأول المحدد بـ $x^2 - 8y + 4 = 0, x^2 = 4y, x = 0$. ج : (3/4, 2/5)
 (و) سطح المسألة ١٣ (هـ) . ج : $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 6/5)$
 (ز) السطح الواقع في الربع الأول من سطح المسألة ١٣ (و) . ج : $(\frac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \frac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}})$

$$١٥ - \text{تحقق من أن} \quad \frac{1}{2} \int_a^b [\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)] d\theta = \int_a^b \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho d\theta = \iint_R dA ;$$

$$\text{ثم استنتج} \quad \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

١٦ - احسب I_x, I_y لكل من السطوح التالية :

- (أ) المسألة ١٣ (أ) . ج : $I_x = 6A, I_y = \frac{32}{3}A$
 (ب) السطح المقطوع من $y^2 = 8x$ بالوتر البؤري العمودي . ج : $I_x = \frac{16}{5}A, I_y = \frac{12}{7}A$
 (ج) السطح المحدد بـ $y = x$ و $y = x^2$. ج : $I_x = \frac{3}{11}A, I_y = \frac{3}{10}A$
 (د) السطح المحدد بـ $y = x$ و $y = 4x - x^2$. ج : $I_x = \frac{458}{70}A, I_y = \frac{27}{10}A$

$$١٧ - \text{احسب} \quad I_x, I_y \quad \text{لعقدة واحدة من المنحنى} \quad \rho^2 = \cos 2\theta \quad \text{ج :} \quad I_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}\right)A, \quad I_y = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}\right)A$$

١٨ - احسب I_0 للسطحين التاليين :

- (أ) عقد المنحنى $\rho = \sin 2\theta$. ج : $3/8A$
 (ب) داخل المنحنى $\rho = 1 + \cos \theta$. ج : $35/24A$

الفصل الخامس والستون

الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي

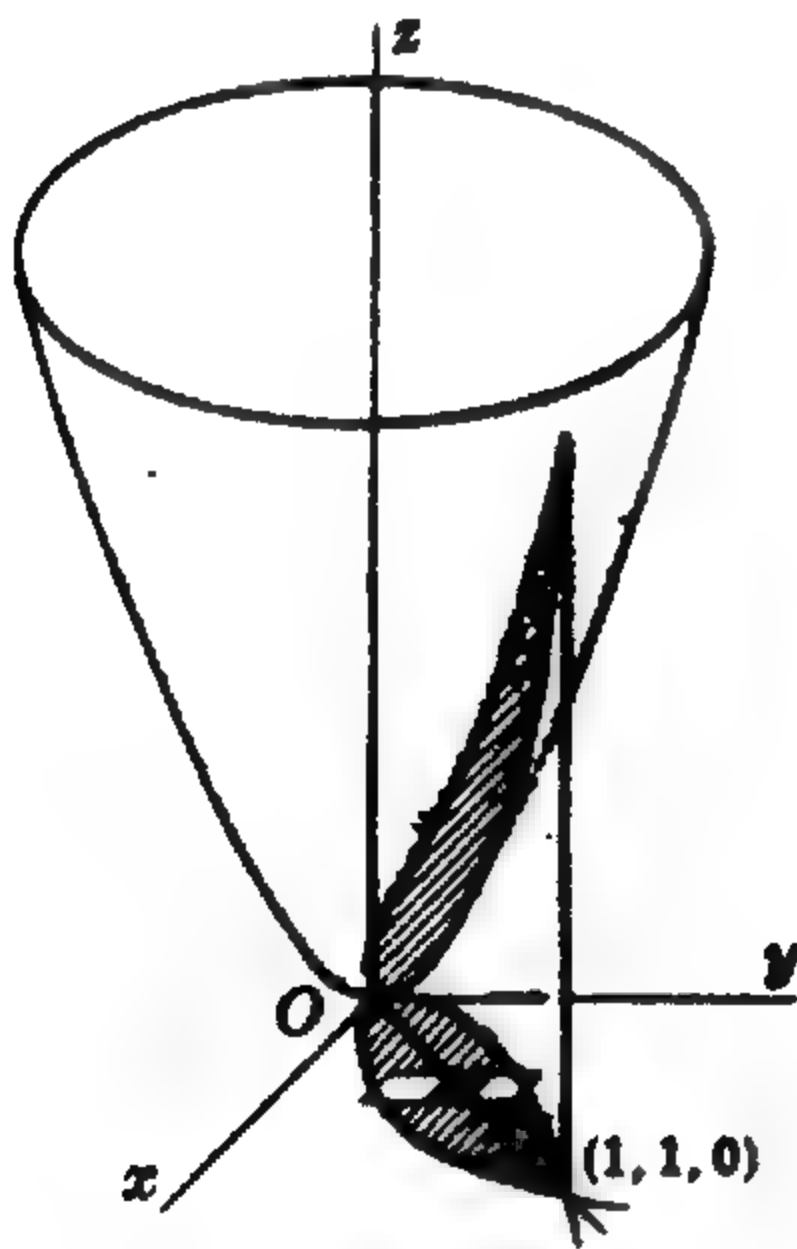
يعرف الحجم الواقع تحت السطح $z = f(x, y)$ أو $z = f(\rho, \theta)$ أى حجم العمود الرأسى الذى قاعدته العليا على السطح وقاعدته السفلى على المستوى xOy بالتكامل $V = \iint_R z dA$ حيث المنطقة R القاعدة السفلى للعمود.

مسائل محلولة

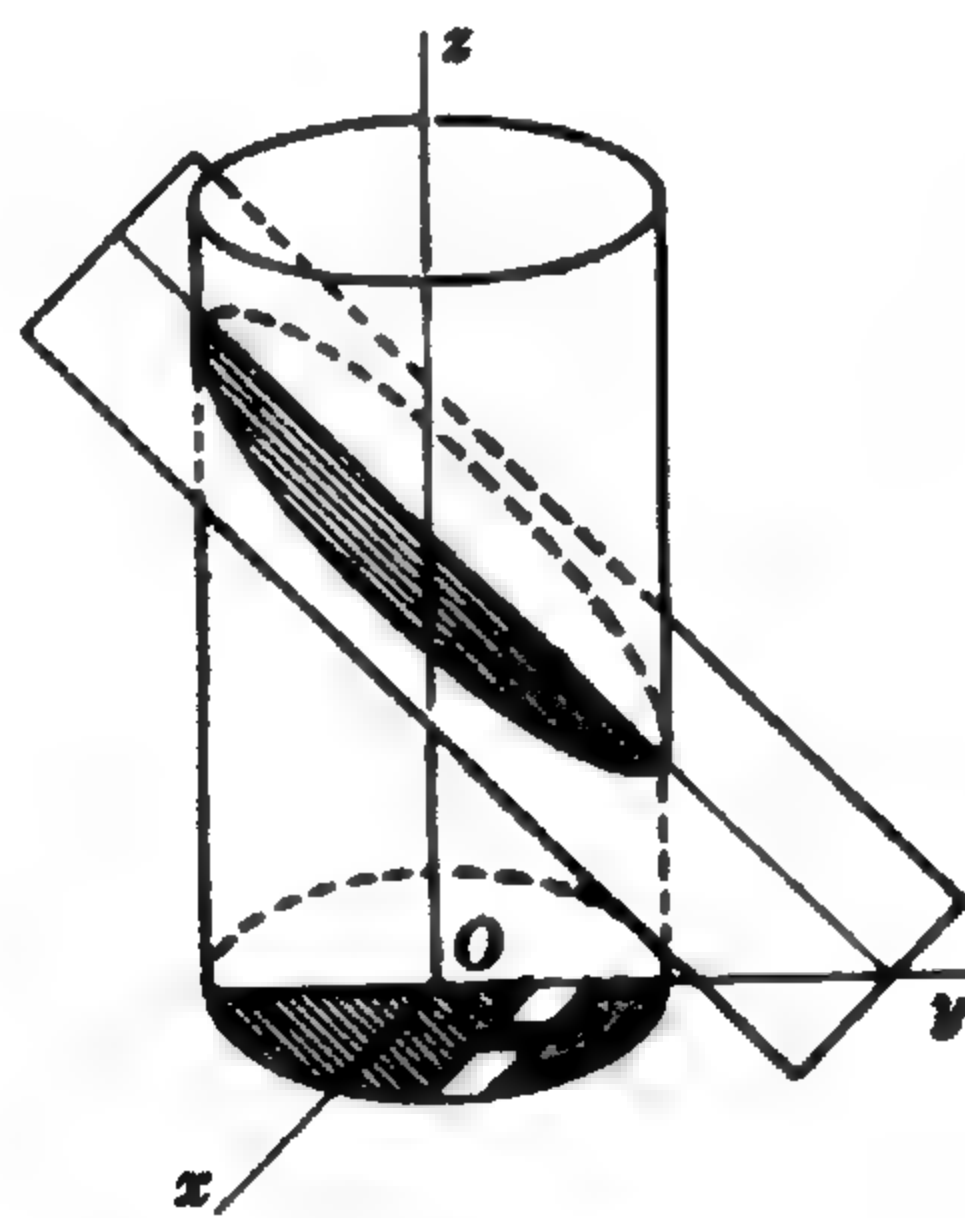
١ - احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ وبين المستويين $z = 0$ و $z = x + y + 2$.

يتضح من الشكل ١ - ٦٥ أنه ينبغى تكامل $z = x + y + 2$ على ربع الدائرة $x^2 + y^2 = 16$ فى المستوى xOy لذلك فإن :

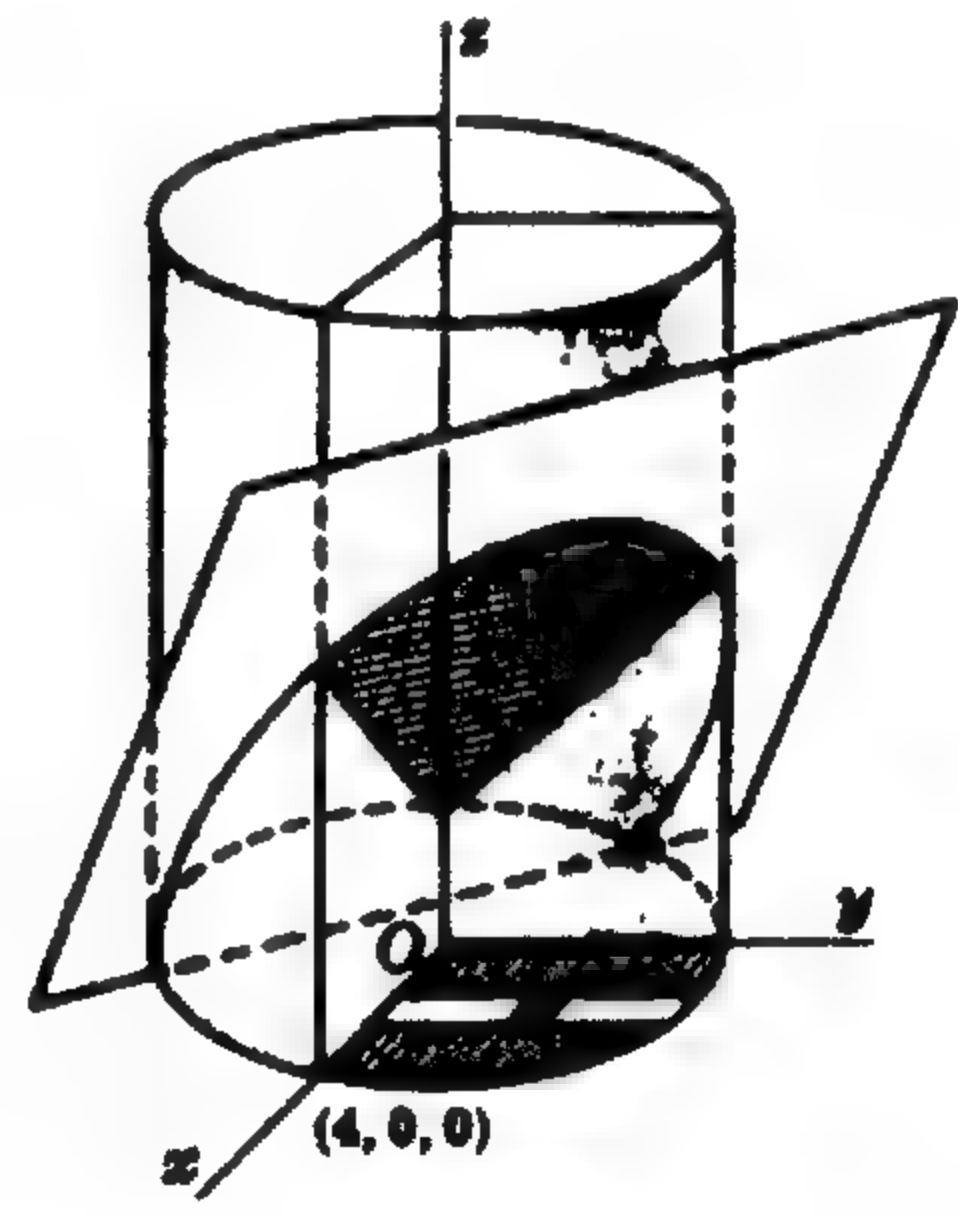
$$\begin{aligned} V &= \iint_R z dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x+y+2) dy dx = \int_0^4 (x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16-x^2}) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16-x^2} + 16 \arcsin \frac{1}{4}x \right]_0^4 = \left(\frac{128}{3} + 8\pi \right) \text{ cubic units} \end{aligned}$$



شكل ١ - ٦٥



شكل ٢ - ٦٥



شكل ٣ - ٦٥

٢ - أوجد الحجم المحدود بالاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ والمستويين $z = 0$ و $y + z = 4$.

يتضح من الشكل ٢ - ٦٥ أنه ينبغى تكامل $z = 4 - y$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ فى المستوى xOy وبالتالى فإن :

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy = 2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy = 16\pi \text{ cubic units}$$

٣ - أوجد الحجم المحدود من أعلاه بمجسم القطع المكافئ $x^2 + 4y^2 = z$ ومن أسفل بالمستوى $z = 0$ ومن الجوانب بالاسطوانتين $x^2 = y$, $y^2 = x$ انظر الشكل ٦٥ - ٣ .

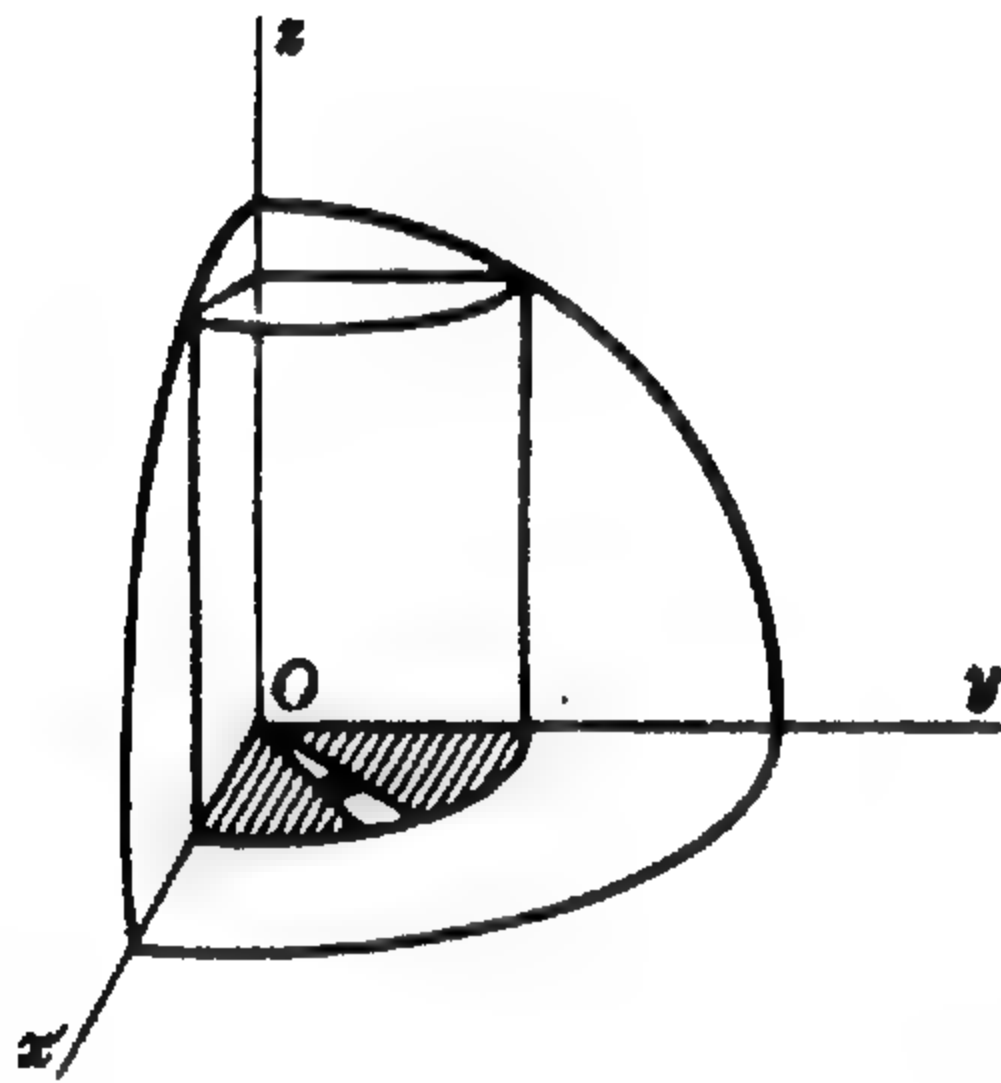
نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = x^2 + 4y^2$ على المنطقة R الواقعة بين القطعين المكافئين $x^2 = y$, $y^2 = x$ فى المستوى xOy وبالتالى فإن :

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \text{ cubic units}$$

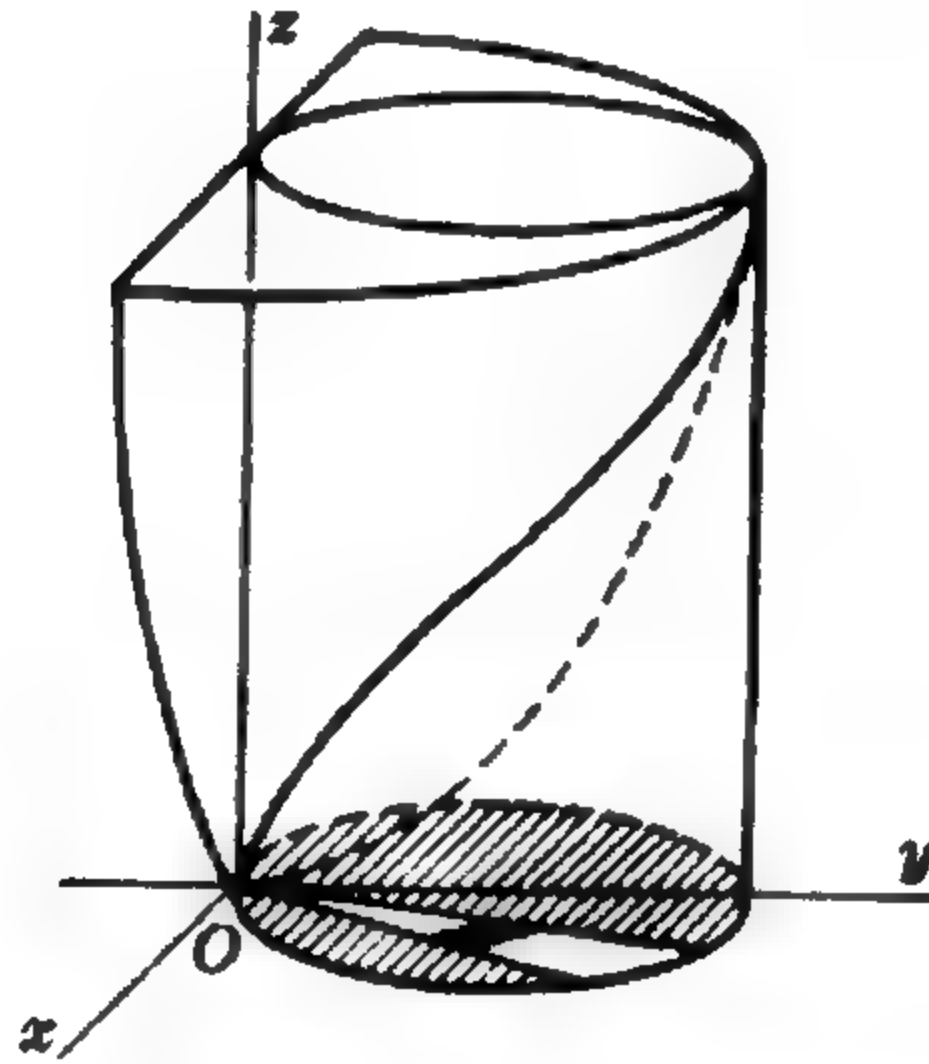
٤ - احسب حجم أحد القسمين المقطعين من الاسطوانة $4x^2 + y^2 = a^2$ بالمستويين $z = 0$ ، $z = my$ (انظر الشكل ٦٥ - ٤) .

نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = my$ على نصف القطع الناقص $4x^2 + y^2 = a^2$ ولذلك فإن

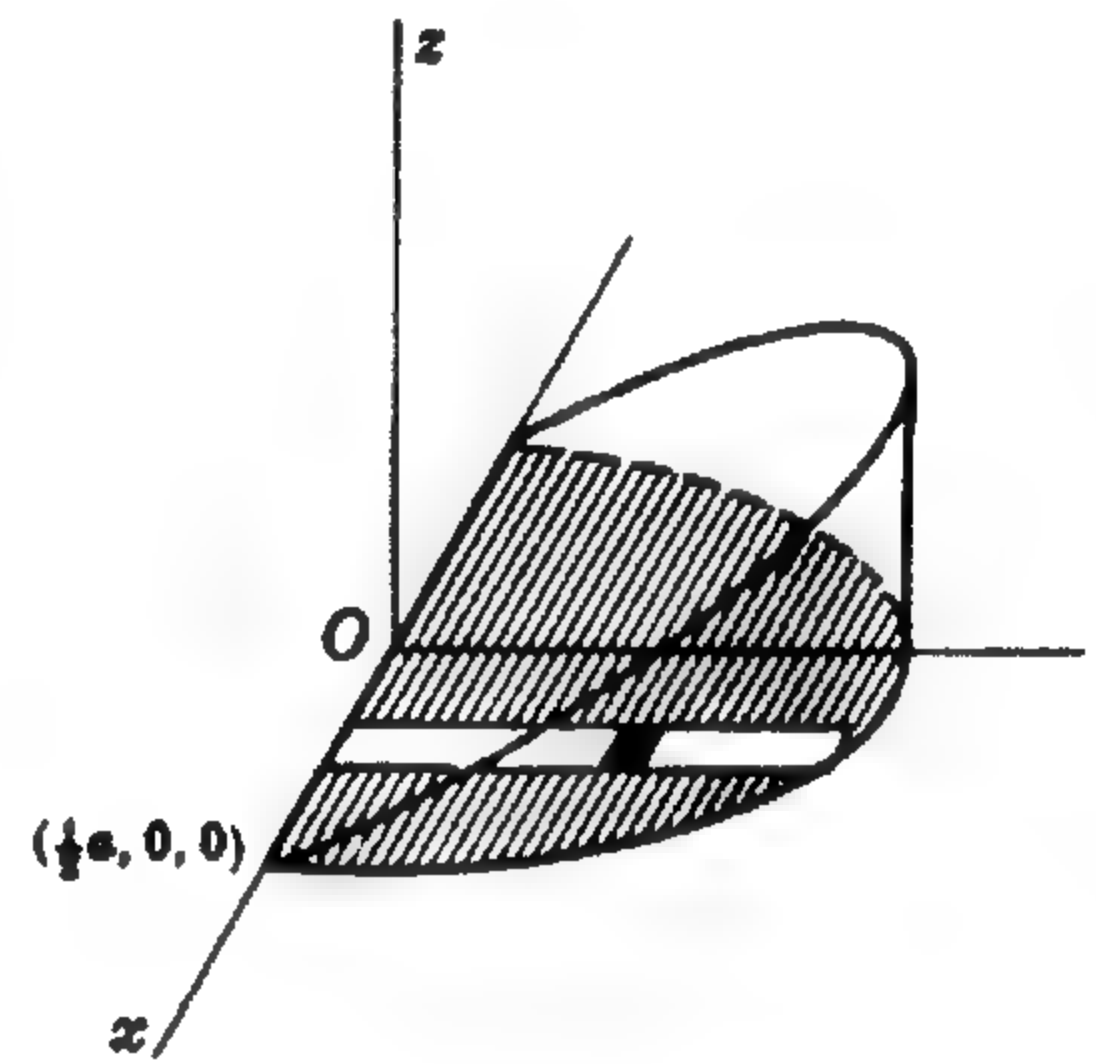
$$V = 2 \int_0^{a/2} \int_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} my dy dx = m \int_0^{a/2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ cubic units}$$



شكل ٦٥ - ٦



شكل ٦٥ - ٥



شكل ٦٥ - ٤

٥ - احسب الحجم بين مجسم القطع المكافئ $x^2 + y^2 = 4z$ والاسطوانة $x^2 + y^2 = 8y$ والمستوى $z = 0$ انظر الشكل ٦٥ - ٥ .

نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = \frac{1}{4} (x^2 + y^2)$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 8y$ وإذا استخدمنا الاحداثيات القطبية فإننا نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = \frac{1}{4} \rho^2$ على الدائرة $\rho = 8 \sin \theta$ إذن :

$$\begin{aligned} V &= \iint_R z dA = \int_0^\pi \int_0^{8 \sin \theta} z \rho d\rho d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_0^{8 \sin \theta} \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_0^\pi \rho^4 \Big|_0^{8 \sin \theta} d\theta = 256 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = 96\pi \text{ cubic units} \end{aligned}$$

٦ - احسب الحجم الذى نزيله من كرة نصف قطرها $2a$ إذا حفرنا بها ثقباً يجتاز الكرة نصف قطره a وينطبق على أحد أقطار الكرة (انظر الشكل ٦٥ - ٦)

يبدو من الشكل أن الحجم المطلوب هو ثمانى مرات قدر الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحصور بين الاسطوانة $p^2 = a^2$ والكرة $p^2 + z^2 = 4a^2$ والمستوى $z = 0$ ونحصل على الحجم الاخير بتكامل $z = \sqrt{4a^2 - p^2}$ على ربع الدائرة $p = a$ وبالتالى فإن :

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{4a^2 - p^2} p \, dp \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3} a^3) d\theta = \frac{4}{3} (8 - 3\sqrt{3}) a^3 \pi \text{ cubic units}$$

مسائل اضافية

- ٧- احسب الحجم الذى يقطعه المستوى $z = 0$ من $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ ج : 3π cubic units .
- ٨- احسب الحجم الواقع تحت المستوى $z = 3x$ وفوق السطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بـ $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x^2 + y^2 = 25$ ، $x = 4$ ج : 98 cubic units .
- ٩- احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد بـ $z = 0$ ، $x^2 + z = 9$ ، $3x + 4y = 24$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ج : $1485/16$ cubic units .
- ١٠- احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد بـ $xy = 4z$ ، $y = x$ ، $x = 4$ ج : 8 cubic units .
- ١١- احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد بـ $z = y$ و $x^2 + y^2 = 25$ ج : $125/3$ cubic units .
- ١٢- احسب الحجم المشترك بين اسطوانتين $x^2 + z^2 = 16$ و $x^2 + y^2 = 16$ ج : $1024/3$ cubic units .
- ١٣- احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول داخل $y^2 + z^2 = 9$ وخارج $y^2 = 3x$ ج : $27\pi/16$ cubic units .
- ١٤- احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد بـ $x^2 + z^2 = 16$ و $x - y = 0$ ج : $64/3$ cubic units .
- ١٥- احسب الحجم المشترك بين $y^2 + z^2 = 4$ و $y^2 + z^2 + 2x = 16$ والواقع أمام المستوى $x = 0$ ج : 28π cubic units .
- ١٦- احسب الحجم الواقع داخل $p = 2$ وخارج المخروط $z^2 = p^2$ ج : $32\pi/3$ cubic units .
- ١٧- احسب الحجم الواقع داخل $y^2 + z^2 = 2$ وخارج $x^2 - y^2 - z^2 = 2$ ج : $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$ cubic units .
- ١٨- احسب الحجم المشترك بين $p^2 + z^2 = a^2$ و $p = a \sin \theta$ ج : $2(3\pi - 4)a^3/9$ cubic units .
- ١٩- احسب الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ والمحدد من أسفل بـ $x^2 + y^2 + 4z = 16$ ج : $81\pi/8$ cubic units .
- ٢٠- احسب الحجم الذى يقطعه المستوى $z - y = 2$ من جسم القطع المكافئ $4x^2 + y^2 = 4z$ ج : 9π cubic units .

٢١ - احسب الحجم الناتج عن دوران منحنى القلب $\rho = 2(1 - \cos \theta)$ حول المحور القطبي

$$V = 2\pi \iint \rho \, d\rho \, d\theta = 64\pi/3 \text{ cu. un.} \quad \text{ج :}$$

٢٢ - احسب الحجم الناتج عن دوران إحدى أوراق الزهرة $\rho = \sin 2\theta$ حول أحد المحاور

$$\text{ج : } 32\pi/105 \text{ cubic units}$$

٢٣ - حفر ثقب مربع طول ضلعه 2 units بشكل متناظر مجتازاً كرة نصف قطرها 2 units ، بين أن الحجم

المقطوع هو :

$$\frac{4}{3}(2\sqrt{2} + 19\pi - 54 \text{ Arc tan } \sqrt{2}) \text{ cubic units} \quad \text{ج :}$$

الفصل السادس والستون

مساحة سطح منحنى

التكامل الثنائي

عند حساب طول قوس (١) أسقطنا القوس على محور إحداثي مناسب محددين بذلك فترة على المحور ، (٢) كاملت

الدالة $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ على هذه الفترة إذا كان الإسقاط على المحور x أو الدالة $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ إذا كان الإسقاط على المحور y .

ويمكن بطريقة مماثلة حساب المساحة S لقطعة R' من سطح $z = f(x, y)$ (١) نسقط R' على مستو إحداثي مناسب محددين بذلك منطقة R على هذا المستوى .

(٢) تكامل دالة تكامل على R

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA.$$

فإذا أسقطنا R' على xOy فإن

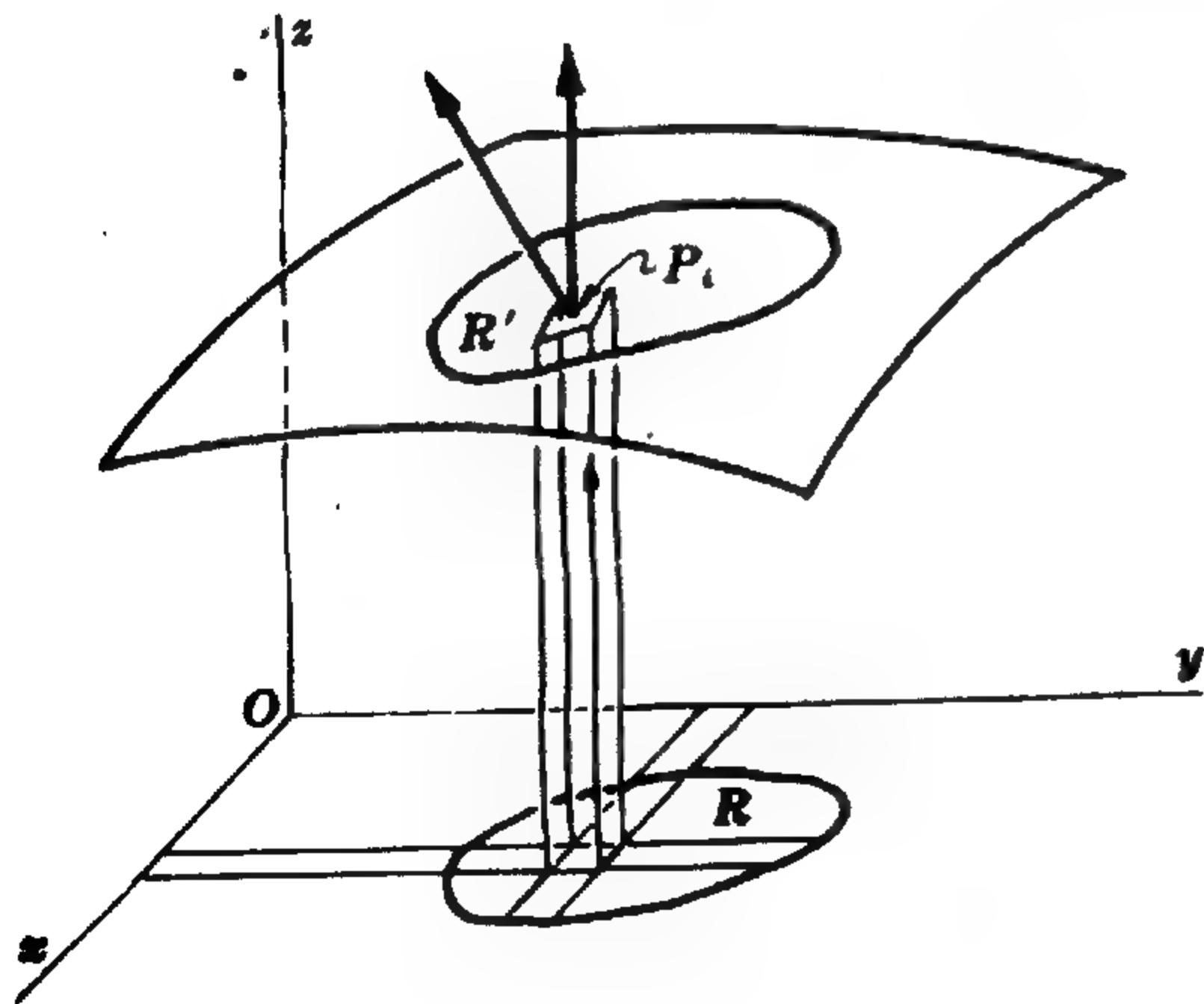
$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dA.$$

وإذا أسقطنا R' على yOz فإن

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dA.$$

أما إذا أسقطنا R' على zOx فإن

مسائل محلولة



شكل ٦٦ - ١

١ - لننظر في منطقة R' مساحتها S من السطح $z = f(x, y)$. لنفرض بحدود R' اسطوانة رأسيّة (انظر الشكل ٦٦ - ١) فتقطع المستوى xOy منطقة R . لتقسم الآن R إلى n منطقة جزئية ΔA_i (مساحتها ΔA_i) ولنرمز بـ ΔS_i لمساحة مسقط ΔA_i على R' . لنختار في كل منطقة جزئية نقطة P_i ولنرسم هناك المستوى المماس للسطح ونرمز لمساحة مسقط ΔA_i على المستوى المماس بـ ΔT_i . نستخدم ΔT_i كتقريب لمساحة السطح المقابلة لـ ΔS_i .

لننظر بعد ذلك في الزاوية بين المستوى xOy

والمستوى المماس عند P_i إن هذه الزاوية تساوى الزاوية γ_i بين المحور z [0,0,1] والعمود :

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{على السطح عند } P_i \text{ ومنه} \quad \left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right],$$

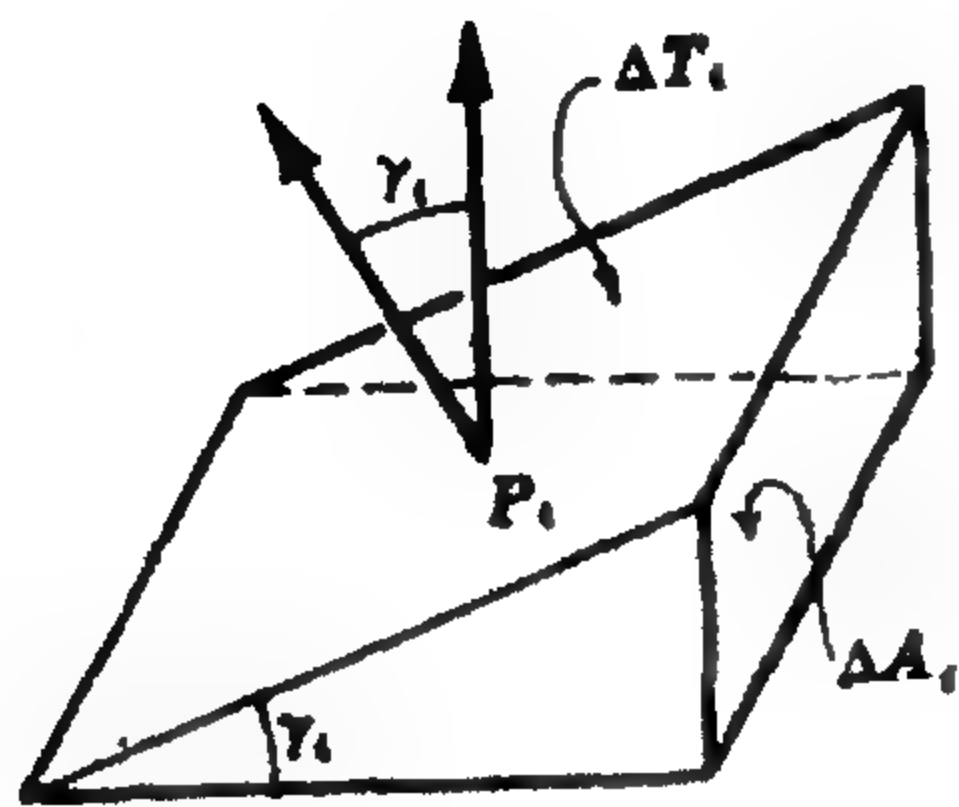
إذن (انظر الشكل ٦٦ - ٢)

$$\Delta T_i = \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i \quad , \quad \Delta T_i \cdot \cos \gamma_i = \Delta A_i$$

وبالتالى فإن $\sum_{i=1}^n \Delta T_i = \sum_{i=1}^n \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i$ تعطينا تقريبا لـ S ومنه :

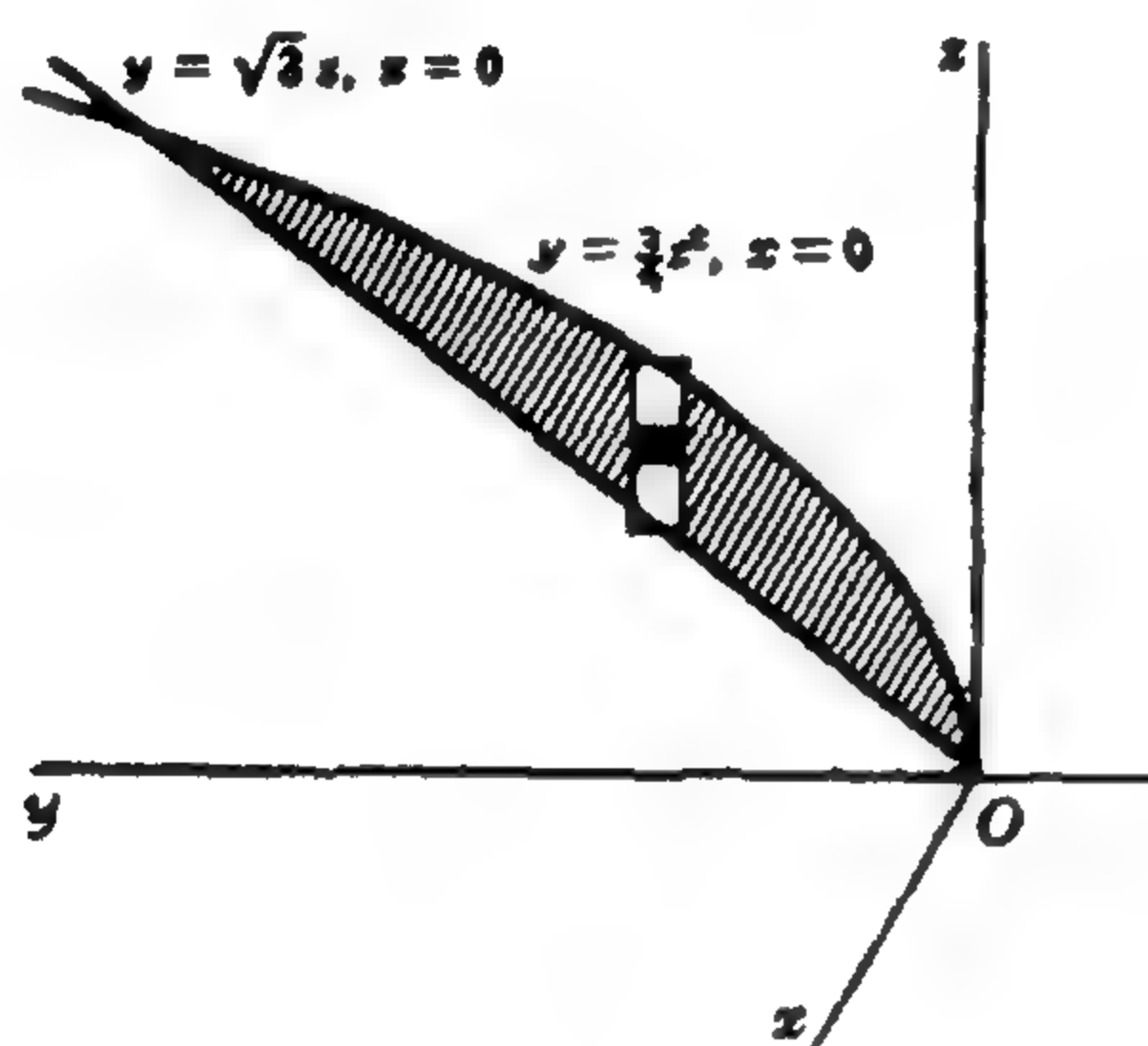
$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i = \iint_R \sec \gamma \cdot dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

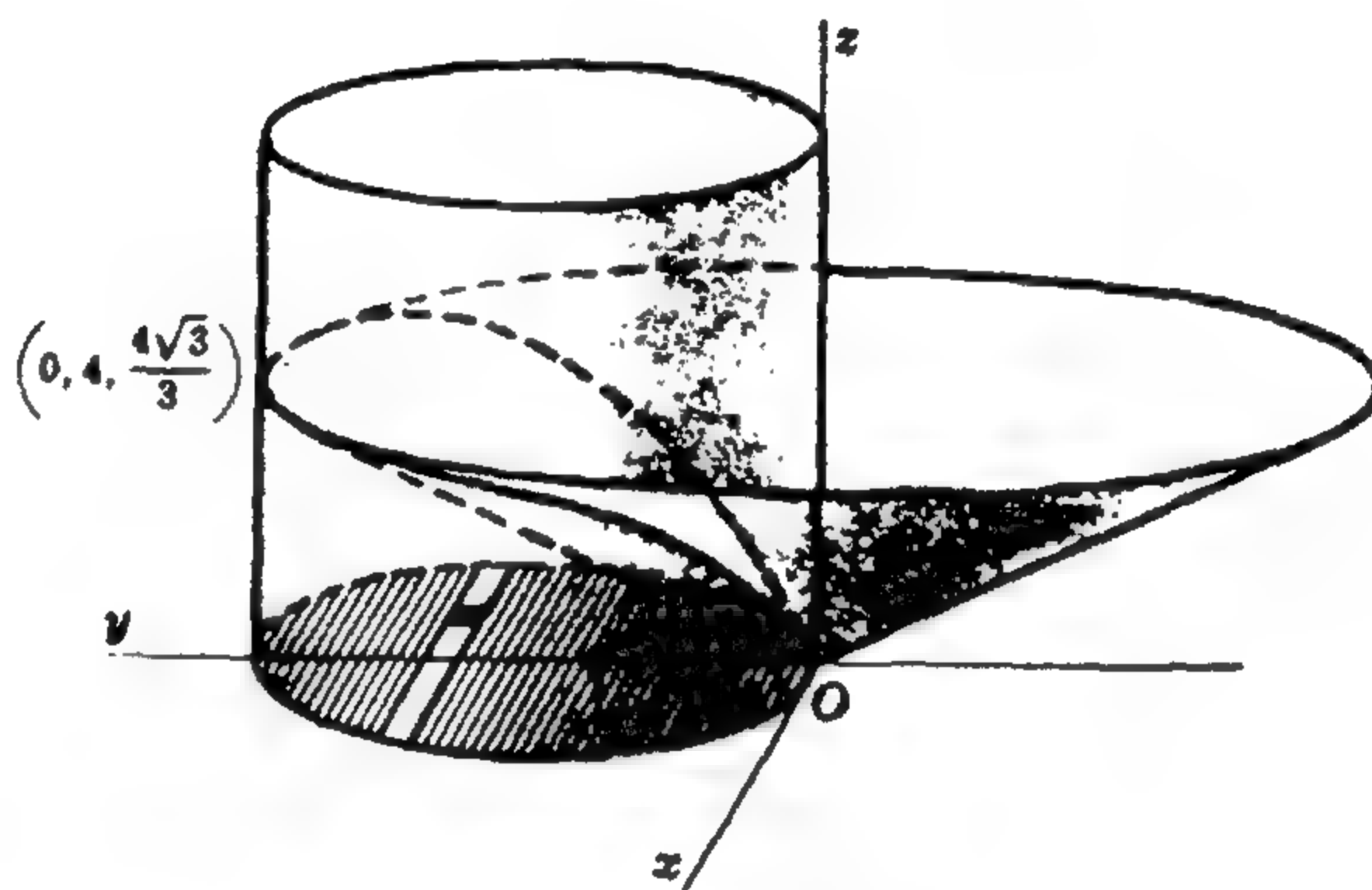


شكل ٦٦ - ٢

٢ - احسب مساحة قطعة المخروط $x^2 + y^2 = 3z^2$ الواقعة فوق المستوى xOy وداخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4y$



شكل ٦٦ - ٢



شكل ٦٦ - ٣

حل أول : انظر إلى الشكل ٦٦ - ٢ إن إسقاط قطعة السطح المفروضة على المستوى xOy هو المنطقة R المحاطة بالدائرة $x^2 + y^2 = 4y$ للمخروط يكون .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{z}, \quad \text{and} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx dy = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \sqrt{4y-y^2} dy = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ square units}$$

حل ثان : انظر إلى الشكل ٦٦ - ٤ إن إسقاط نصف السطح المفروضة على المستوى yOz هو المنطقة R المحددة بالمستقيم $y = \sqrt{3}z$ والقطع المكافئ $y = 3/4z^2$ حيث حصلنا على المنحنى الأخير بحذف x من معادلتى السطحين . للمخروط يكون :

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2 - y^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x}.$$

وبالتالى :

$$S = 2 \int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{3z^2 - y^2}} dz dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \left[\sqrt{3z^2 - y^2} \right]_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2} dy$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{حل ثالث : باستخدام الاحداثيات الاسطوانية في الحل الأول نجد أنه ينبغي تكامل}$$

على المنطقة R المحاطة بالدائرة $\rho = 4 \sin \theta$ ومنه :

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}} dA = \int_0^\pi \int_0^{4 \sin \theta} \frac{2}{\sqrt{3}} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \rho^2 \Big|_0^{4 \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{16}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ square units} \end{aligned}$$

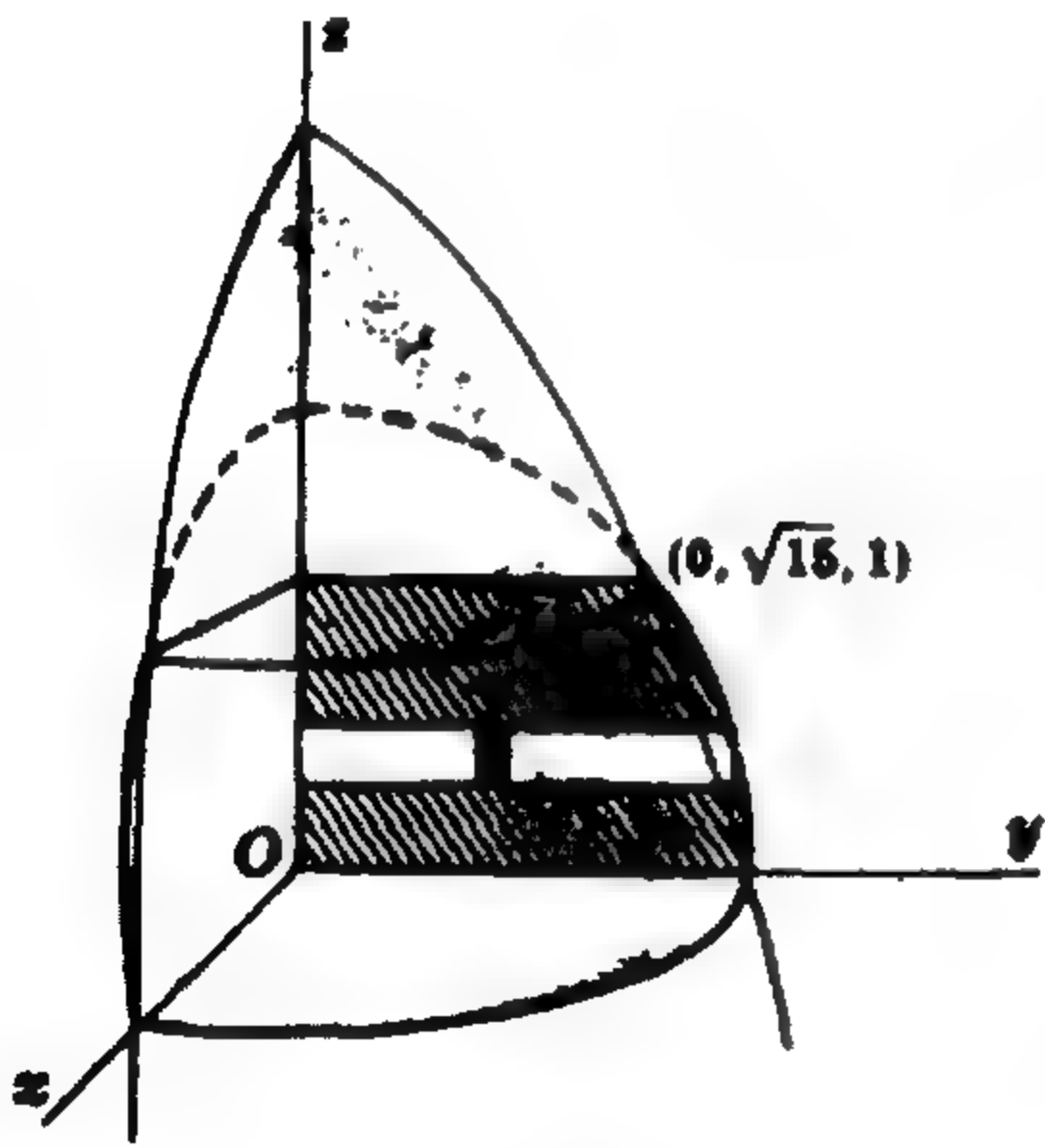
٣ - احسب مساحة قطعة الاسطوانة $x^2 + z^2 = 16$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 16$.

يوضح الشكل ٦٦ - هـ من القطعة المطلوب حساب مساحتها . إن مسقط هذه القطعة على المستوى xOy هو ربع الدائرة $x^2 + y^2 = 16$ للأسطوانة $x^2 + z^2 = 16$ يكون :

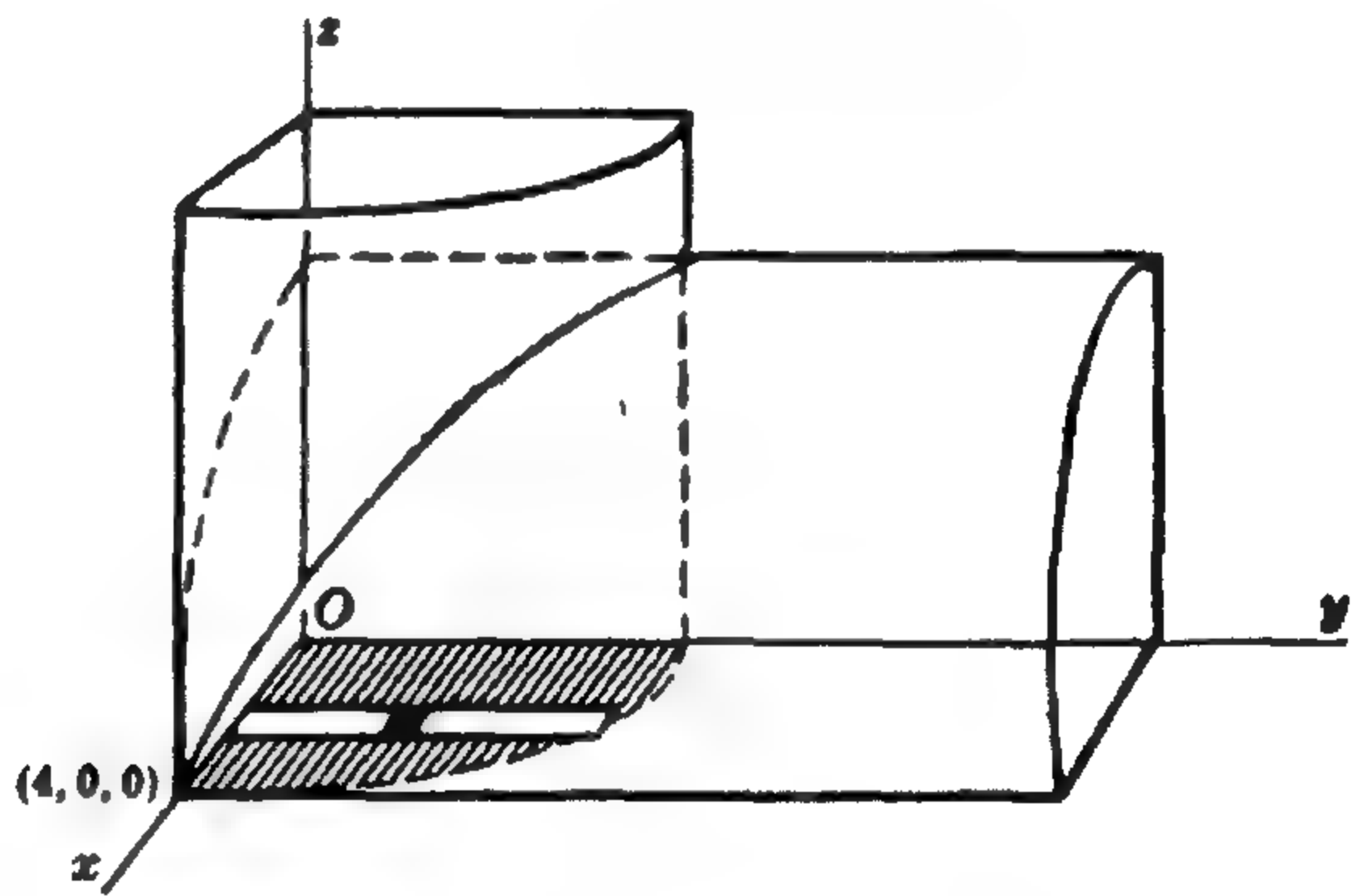
$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2 + z^2}{z^2} = \frac{16}{16 - x^2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

ومنه :

$$S = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} dy dx = 32 \int_0^4 dx = 128 \text{ square units}$$



شكل ٦٦ - ٦



شكل ٦٦ - ٥

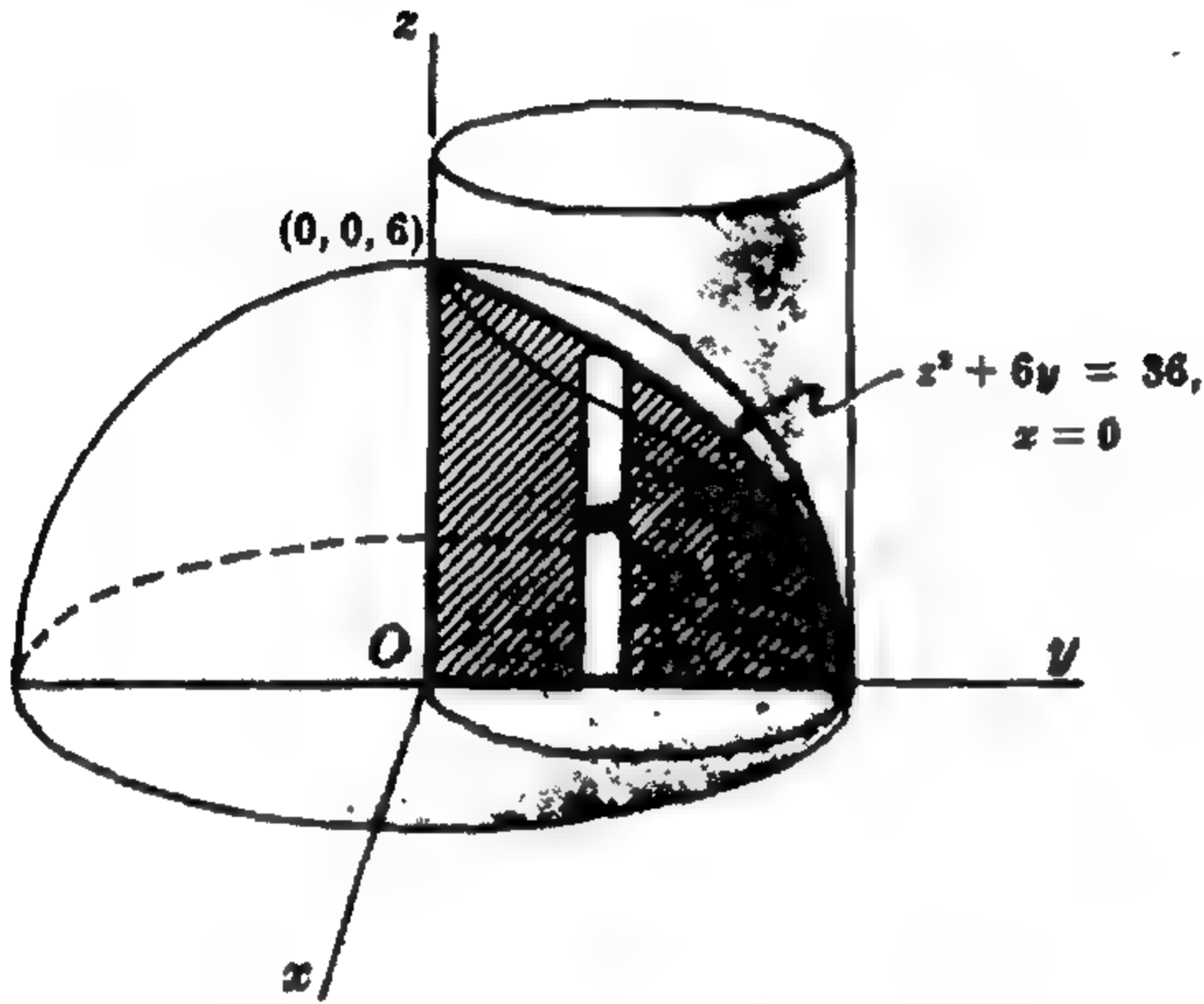
٤ - احسب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ الواقعة خارج مجسم القطع المكافئ $x^2 + y^2 + z = 16$.

يوضح الشكل ٦٦ - ٦ ربع قطعة السطح المطلوب حساب مساحتها إن مسقط هذه القطعة على المستوى yOz هو المنطقة R المحددة بالدائرة $y^2 + z^2 = 16$ والمحورين y و z والمستقيم $z = 1$. للكرة يكون :

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2} = \frac{16}{16 - y^2 - z^2} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x},$$

ومنه :

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dA = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-z^2}} dy dz \\
 &= 16 \int_0^1 \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{16-z^2}} \right]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz = 16 \int_0^1 \frac{1}{2} \pi dz = 8\pi \text{ square units}
 \end{aligned}$$



شكل ٦٦ - ٧

٥ - احسب مساحة قطعة الاسطوانة $x^2 + y^2 = 6y$ الواقعة داخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

يوضح الشكل ٦٦ - ٧ ربع قطعة السطح المطلوب حساب مساحتها . إن مسقط هذه القطعة على المستوى yOz هو المنطقة R المحددة بالمحورين z و x والقطع المكافئ $z^2 + 6y = 36$. ولقد حصلنا على هذا المنحنى الأخير بحذف x من معادلتى السطحين . للاسطوانة يكون :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3-y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + 9 - 6y + y^2}{x^2} = \frac{9}{6y - y^2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-6y}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}} dz dy \\
 &= 12 \int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}} dy = 144 \text{ square units}
 \end{aligned}$$

مسائل إضافية

٦ - احسب مساحة قطعة المخروط $x^2 + y^2 = z^2$ الواقعة داخل المنشور الرأسى الذى قاعدته المثلث المحدد بالمستقيمات $y = x, x = 0, y = 1$ فى المستوى xOy .

ج : $\frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ sq. un.}$

٧ - احسب مساحة قطعة المستوى $x + y + z = 6$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$.

ج : $4\sqrt{3}\pi \text{ sq. un.}$

٨ - احسب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ الواقعة داخل الاسطوانة $z^2 + y^2 = 6y$.

ج : $72(\pi - 2) \text{ sq. un.}$

٩ - احسب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ الواقعة داخل مجسم القطع المكافئ $x^2 + y^2 = z$.

ج : $4\pi \text{ sq. un.}$

١٠ - احسب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ الواقعة بين المستويين $z = 2$ و $z = 4$.

ج : $20\pi \text{ sq. un.}$

١١ - احسب مساحة قطعة السطح $z = xy$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$.

ج : $2\pi (2\sqrt{2} - 1)/3$ sq. un. .

١٢ - احسب مساحة قطعة المخروط $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ الواقعة فوق المستوى $z = 0$ وداخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 6y$.

ج : $3\sqrt{10}\pi$ sq. un. .

١٣ - احسب مساحة ذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ الواقع داخل اسطوانة ناقصة المقطع $2x^2 + y^2 = 25$.

ج : 50π sq. un. .

١٤ - احسب مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 - az = 0$ الواقعة مباشرة فوق المنحنى ذو المروتين $4\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

ج : $S = \frac{4}{a} \iint \sqrt{4\rho^2 + a^2} \rho d\rho d\theta = \frac{a^2}{3} \left\{ \frac{5}{3} - \frac{\pi}{4} \right\}$ sq. un. .

١٥ - احسب مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الواقعة مباشرة فوق منحنى القلب $\rho = 1 - \cos \theta$.

ج : $8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ sq. un. .

الفصل السابع والستون

التكاملات الثلاثية

ان التكامل الثلاثي $\iiint_R f(x, y, z) dV$ للدالة في ثلاثة متغيرات مستقلة على منطقة R مكونة من النقط

(x, y, z) ، لحجم V ، يكون عليه الدالة المفروضة وحيدة القيمة ، ومتصلة ، هو امتداد لمفهوم التكاملات البسيطة والثنائية .

فإذا كان $f(x, y, z) = 1$ فمئذ يمكن تفسير التكامل $\iiint_R f(x, y, z) dV$ على أنه قياس حجم المنطقة R .

حساب قيمة التكامل الثلاثي $\iiint_R f(x, y, z) dV$ في الاحداثيات المتعامدة .

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy, \end{aligned}$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث يغطي المنطقة R .

حساب قيمة التكامل الثلاثي $\iiint_R f(\rho, \theta, z) dV$ في الاحداثيات الاسطوانية

$$\iiint_R f(\rho, \theta, z) dV = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho, \theta)}^{z_2(\rho, \theta)} f(\rho, \theta, z) \rho dz d\rho d\theta$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطي المنطقة R .

حساب قيمة التكامل الثلاثي $\iiint_R f(\rho, \phi, \theta) dV$ في الاحداثيات الكروية :

$$\iiint_R f(\rho, \phi, \theta) dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi, \theta)}^{\rho_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطي المنطقة R .

المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية : يحقق المركز المتوسط $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ لحجم ما العلاقات

$$\bar{x} \iiint_R dV = \iiint_R x dV, \quad \bar{y} \iiint_R dV = \iiint_R y dV, \\ \bar{z} \iiint_R dV = \iiint_R z dV$$

وأما عزوم التقصور الذاتية لحجم بالنسبة لمحاور الاحداثية فهي :

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \iiint_R (z^2 + x^2) dV, \\ I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) dV$$

مسائل محلولة

١ - لننظر في الدالة $f(x, y, z)$ المتصلة في منطقة R من الفراغ العادي . لنشطر R بالمستويات $x = \xi_i$ و $y = \eta_j$ و $z = \zeta_k$. ولنتابع شطر المناطق الجزئية التي حصلنا عليها بالمستويات $z = \zeta_k$. تجزئ هذه الطريقة المنطقة R إلى عدد من متوازيات المستطيلات حجوماتها $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ وإلى عدد من متوازيات المستطيلات الناقصة التي سبملها . لنختار في كل متوازي مستطيلات كامل نقطة $P_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$ ونحسب عندها $f(x_i, y_j, z_k)$ ثم نشكل المجموع :

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V_{ijk} = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (1)$$

يعرف التكامل الثلاثي لـ $f(x, y, z)$ على المنطقة R على أنه نهاية (١) عندما يزداد عدد متوازيات المستطيلات إلى ما لا نهاية بحيث تتول أبعاد كل منها إلى الصفر ويمكن عند حساب هذه النهاية أن نجمع أولاً على كل مجموعة متوازيات المستطيلات التي تشترك في $\Delta_i x$ و $\Delta_j y$ لقيم ثابتة لـ i و j ثم نبحث عن النهاية $\Delta_k z \rightarrow 0$ فينتج

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p f(x_i, y_j, z_k) \Delta_k z \Delta_i x \Delta_j y = \int_{x_1}^{x_2} f(x_i, y_j, z) dz \Delta_i x \Delta_j y$$

وهذه ليست إلا أعمدة ، المناطق الجزئية الأساسية ، التي رأيناها في الفصل ٦٣ وبالتالي :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \\ p \rightarrow +\infty}} \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V_{ijk} = \iiint_R f(x, y, z) dz dx dy = \iiint_R f(x, y, z) dz dy dx$$

٢ - احسب قيمة :

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx \quad (1) \\ = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} xyz dz \right\} dy \right] dx \\ = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \frac{xy z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \right\} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{xy(2-x)^2}{2} dy \right] dx \\ = \int_0^1 \left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5) dx = \frac{13}{240}$$

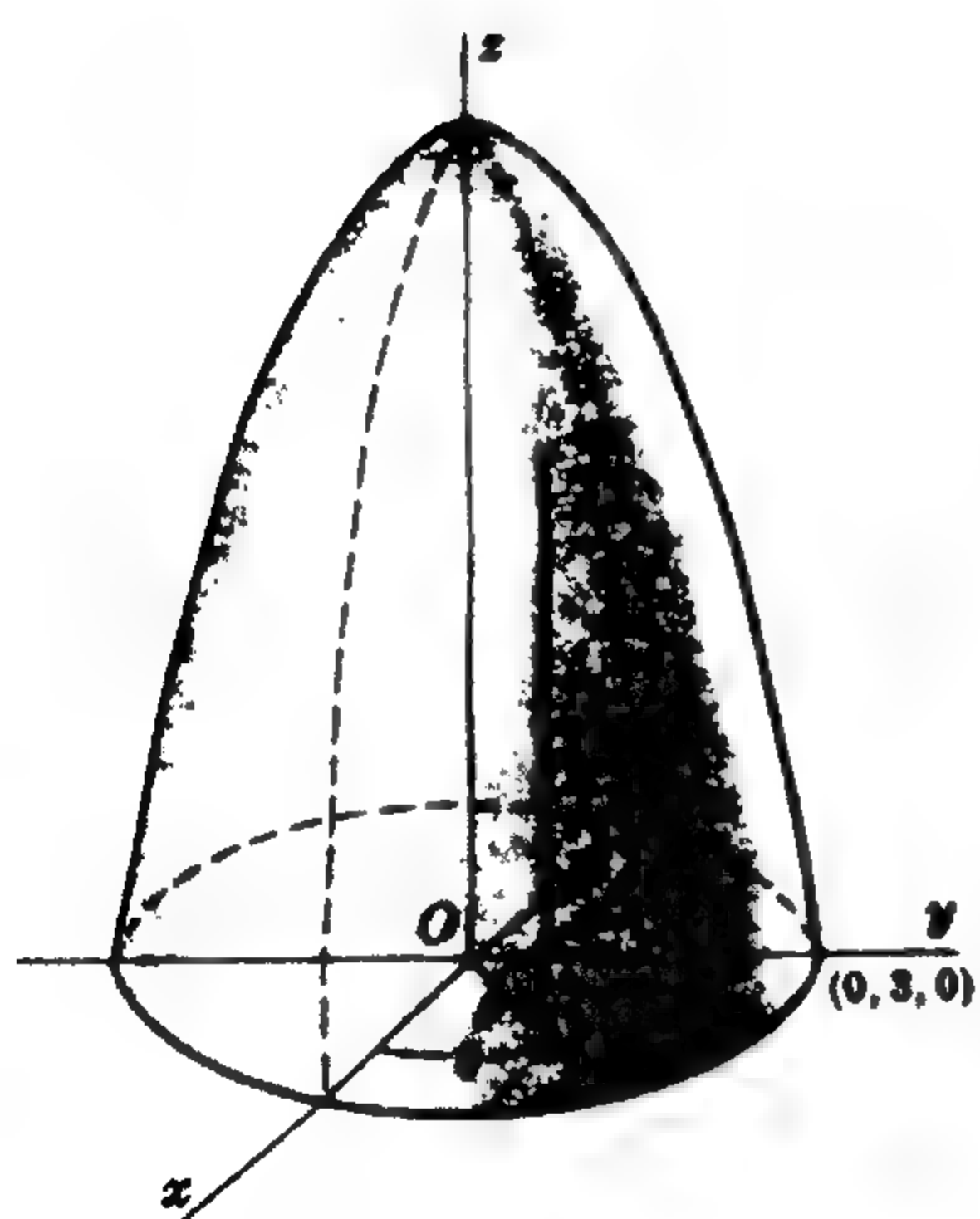
$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 z \rho^2 \sin \theta \, dz \, d\rho \, d\theta & \quad (ب) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_0^1 \sin \theta \, d\theta = -\frac{2}{3} \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = 2/3
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \sin 2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \, d\theta = (2 - \sqrt{2})\pi (\gamma)$$

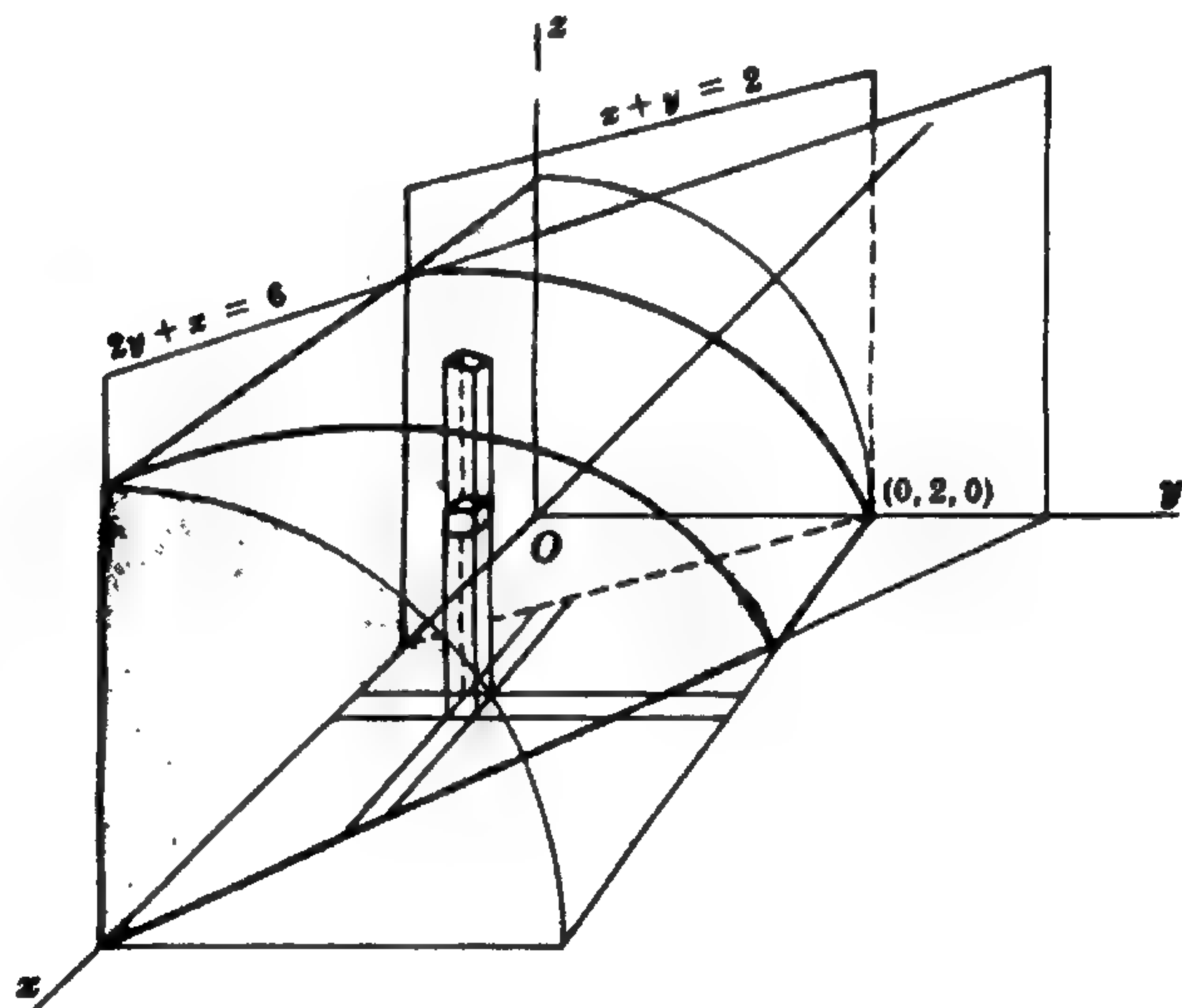
٣- احسب قيمة التكامل الثلاثي $F(x, y, z) = z$ على منطقة R الواقعة في الثمن الأول ومحددة بالمستويات $y=0$ و $z=0$ و $x+y=2$ و $2y+x=6$ والاسطوانة $y^2+z^2=4$. انظر الشكل ٦٧ - ١ .

لنكامل أولاً بالنسبة لـ z من $z=0$ (المستوى xOy) إلى $z=\sqrt{4-y^2}$ (الاسطوانة) ، ثم نكامل بالنسبة لـ x من $x=2-y$ إلى $x=6-2y$ وأخيراً نكامل بالنسبة لـ y من $y=0$ إلى $y=2$ إذن

$$\begin{aligned}
 \iiint_R z \, dV &= \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z \, dz \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4-y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (4-y^2)x \Big|_{2-y}^{6-2y} dy = \frac{26}{3}
 \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٢



شكل ٦٧ - ١

٤- احسب التكامل الثلاثي لـ $f(\rho, \theta, z) = \rho^2$ على المنطقة الواقعة R بين مجسم القطع المكافئ $\rho^2 = 9 - z$ والمستوى $z=0$ انظر الشكل ٦٧ - ٢ .

لنكامل أولاً بالنسبة لـ z من $z=0$ إلى $z=9-\rho^2$ ثم بالنسبة لـ ρ من $\rho=0$ إلى $\rho=3$ وأخيراً بالنسبة لـ θ من $\theta=0$ إلى $\theta=2\pi$ فيكون :

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho^3 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{9-\rho^2} \rho^3 \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 (9 - \rho^2) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{4} d\theta = \frac{243}{2} \pi \end{aligned}$$

• - بين أن التكاملات الثلاثية التالية تعطى نفس الحجم

$$4 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-z^2}} dy dx dz, \quad (ب) \quad 4 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \int_{(z^2+y^2)/4}^4 dz dy dx, \quad (١)$$

$$4 \int_0^4 \int_{y^2/4}^4 \int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx dz dy \quad (ج)$$

(١) بالنسبة لهذا التكامل تتغير z من $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ إلى $z = 4$ ؛ والحجم محدود بمجسم القطع المكافئ $4z = x^2 + y^2$ من أسفل والمستوى $z = 4$ من أعلى . أما مدى تغير x و y فهو بحيث يغطي ربع الدائرة $x^2 + y^2 = 16$ و $z = 0$ التي هي مسقط منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ مع المستوى $z = 4$ على المستوى xy . وعلى هذا فإن التكامل المفروض يعطى الحجم المقتطع من مجسم القطع المكافئ بالمستوى $z = 4$.

(ب) أما في التكامل الثاني فإن y تتغير من $y = 0$ إلى $y = \sqrt{4z - x^2}$ ؛ والحجم محدود من اليسار بالمستوى zOx ومن اليمين بمجسم القطع المكافئ $y^2 = 4z - x^2$. وأما مدى تغير x و z فهو بحيث تغطي النقطة (x, z) نصف قطعة السطح المقتطعة من القطع المكافئ $y = 0$ و $x^2 = 4z$ الذي هو منحنى تقاطع مجسم المكافئ والمستوى zOx مع المستوى $x = 4$.

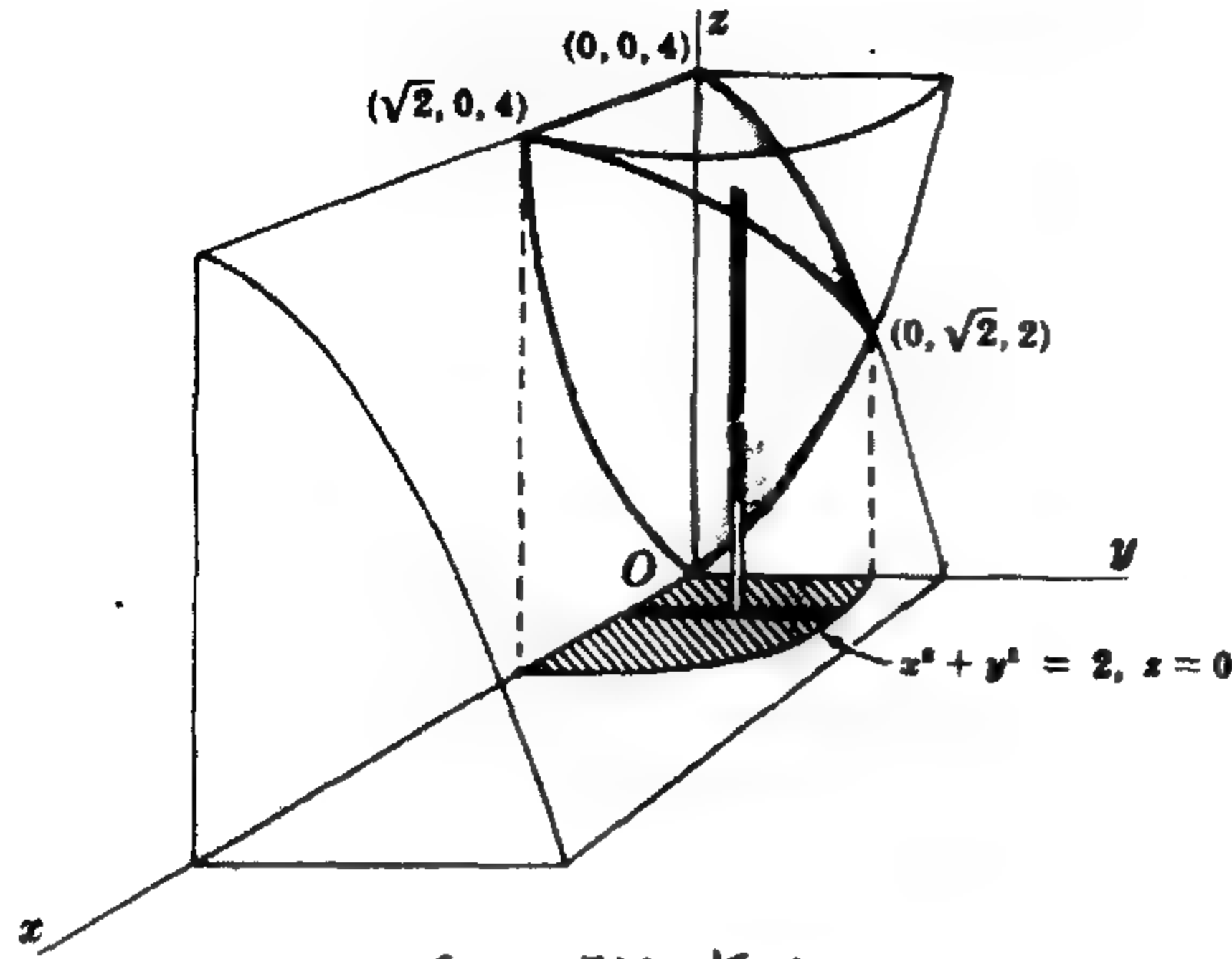
وعلى هذا فالمنطقة R هي نفس المنطقة في (١)

(ج) يحدد الحجم في التكامل الثالث من الخلف المستوى yOz ومن الأمام مجسم القطع المكافئ $4z = x^2 + y^2$. أما مدى تغير z و y فهو بحيث تغطي النقطة (z, y) نصف قطعة السطح المقتطعة من القطع المكافئ $x = 0$ و $y^2 = 4z$ الذي هو منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ والمستوى yOz مع المستوى $z = 4$. وعلى هذا فإن المنطقة R هي نفس المنطقة في (١) .

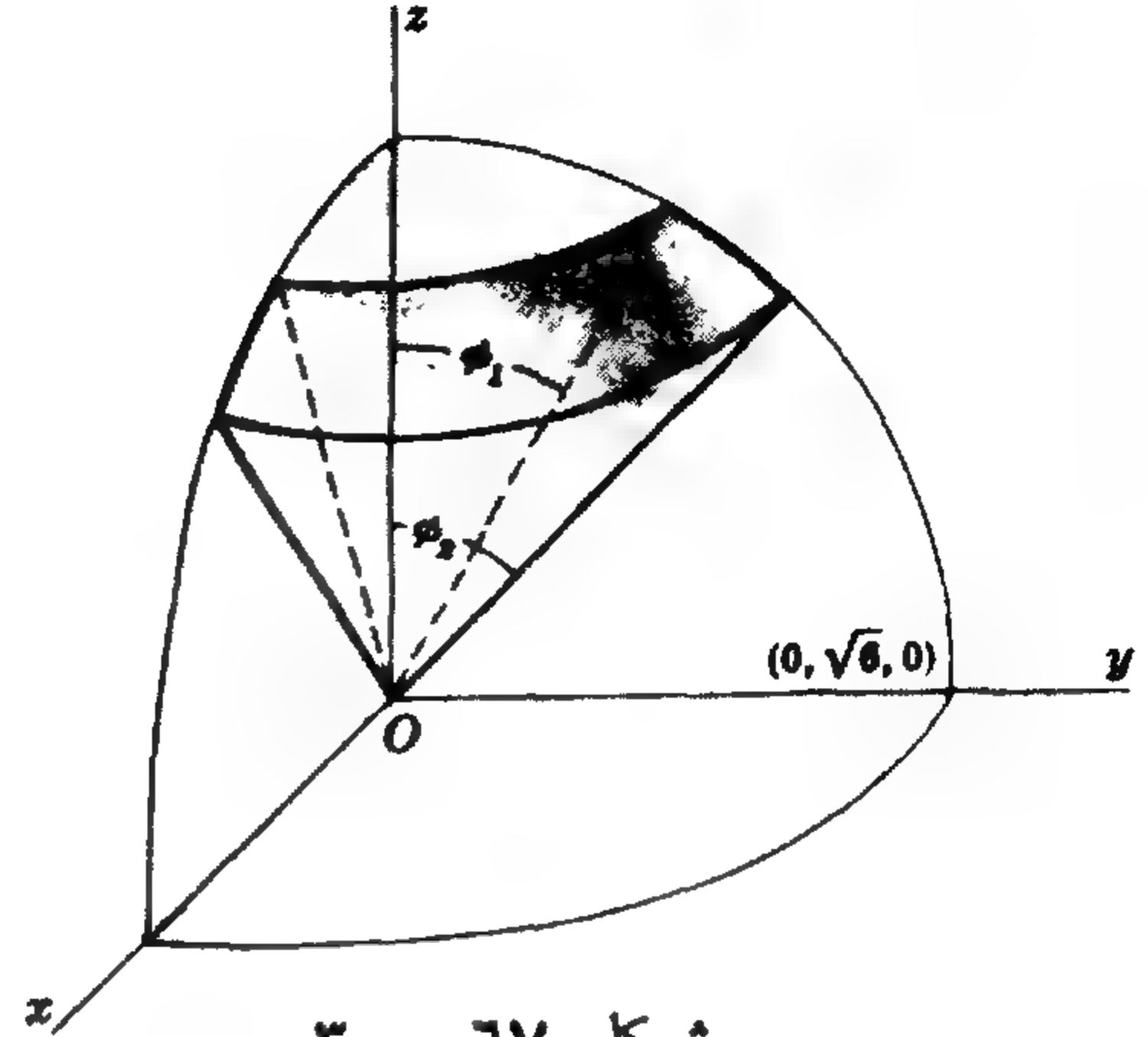
٦ - احسب التكامل الثلاثي لـ $F(\rho, \phi, \theta) = \frac{1}{\rho}$ الممتد على المنطقة R الواقعة في الثمن الأول بين المحاور x, y, z .
 و $\phi = \frac{1}{4}\pi$ و $\phi = \arctan 2$ ، والكرة $\rho = \sqrt{6}$. انظر الشكل ٦٧ - ٣ .

لنكامل أولاً بالنسبة لـ ρ من $\rho = 0$ إلى $\rho = \sqrt{6}$ ثم بالنسبة لـ ϕ من $\phi = \frac{1}{4}\pi$ إلى $\phi = \arctan 2$ ، وأخيراً بالنسبة لـ θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \frac{1}{2}\pi$. فنجد :

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{1}{\rho} dV &= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \sin \phi d\phi d\theta = -3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٤



شكل ٦٧ - ٣

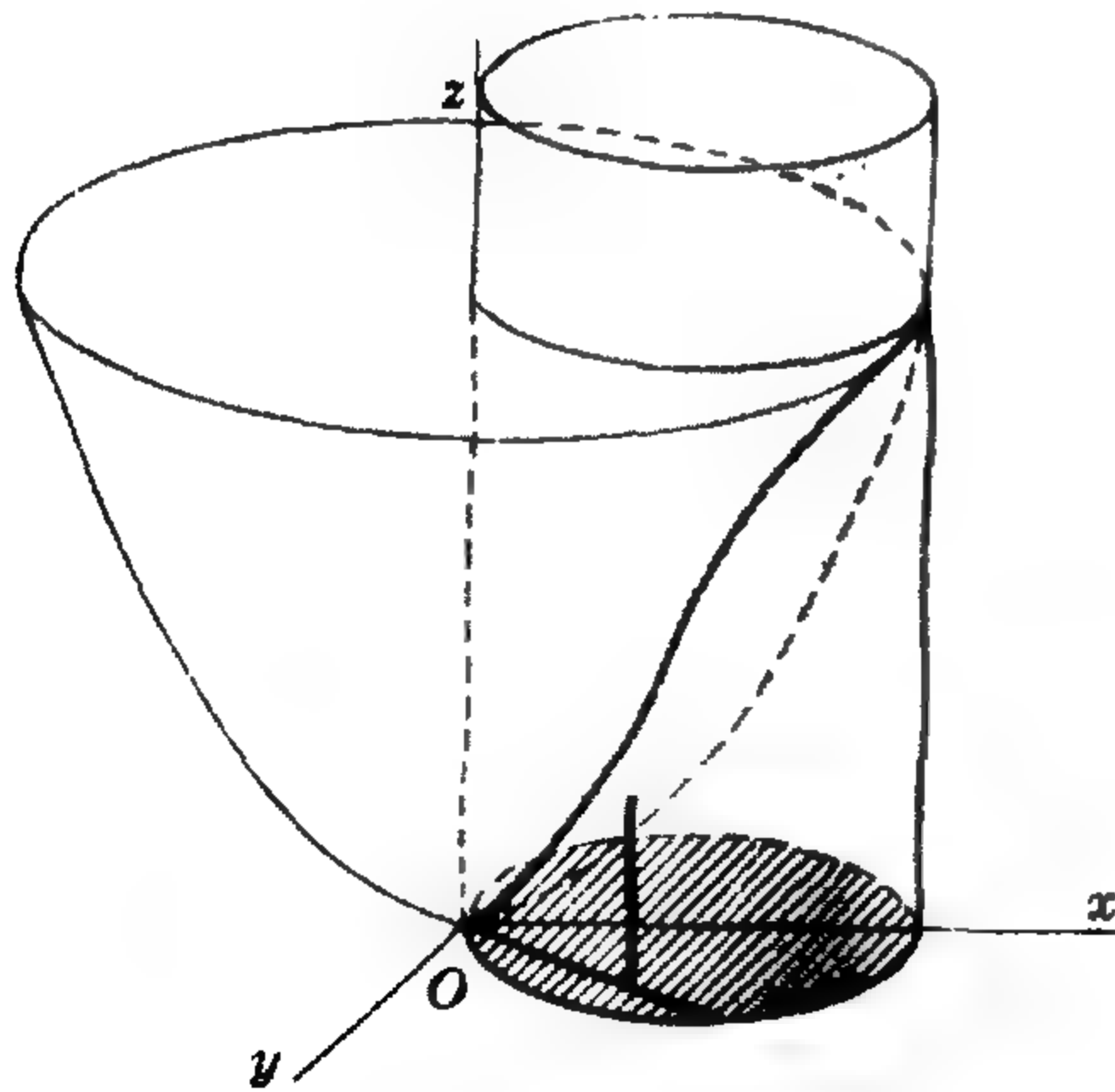
٧ - احسب الحجم الواقع بين مجسم القطع المكافئ $z = 2x^2 + y^2$ والاسطوانة $z = 4 - y^2$ انظر الشكل ٦٧ - ٤ لنكامل أولا بالنسبة لـ z من $z = 2x^2 + y^2$ إلى $z = 4 - y^2$ ثم بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = \sqrt{2 - x^2}$ ونحصل على $x^2 + y^2 = 2$ بحذف z من معادلتى السطحين (وأخيرا بالنسبة لـ x من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{2}$) نحصل على هذين الحدين بوضع $y = 0$ في $x^2 + y^2 = 2$ فنحصل بذلك على ربع الحجم المطلوب . وهكذا فإن :

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz dy dx = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \{(4-y^2) - (2x^2+y^2)\} dy dx \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \left(4y - 2x^2y - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2} dx = 4\pi \text{ cubic units} \end{aligned}$$

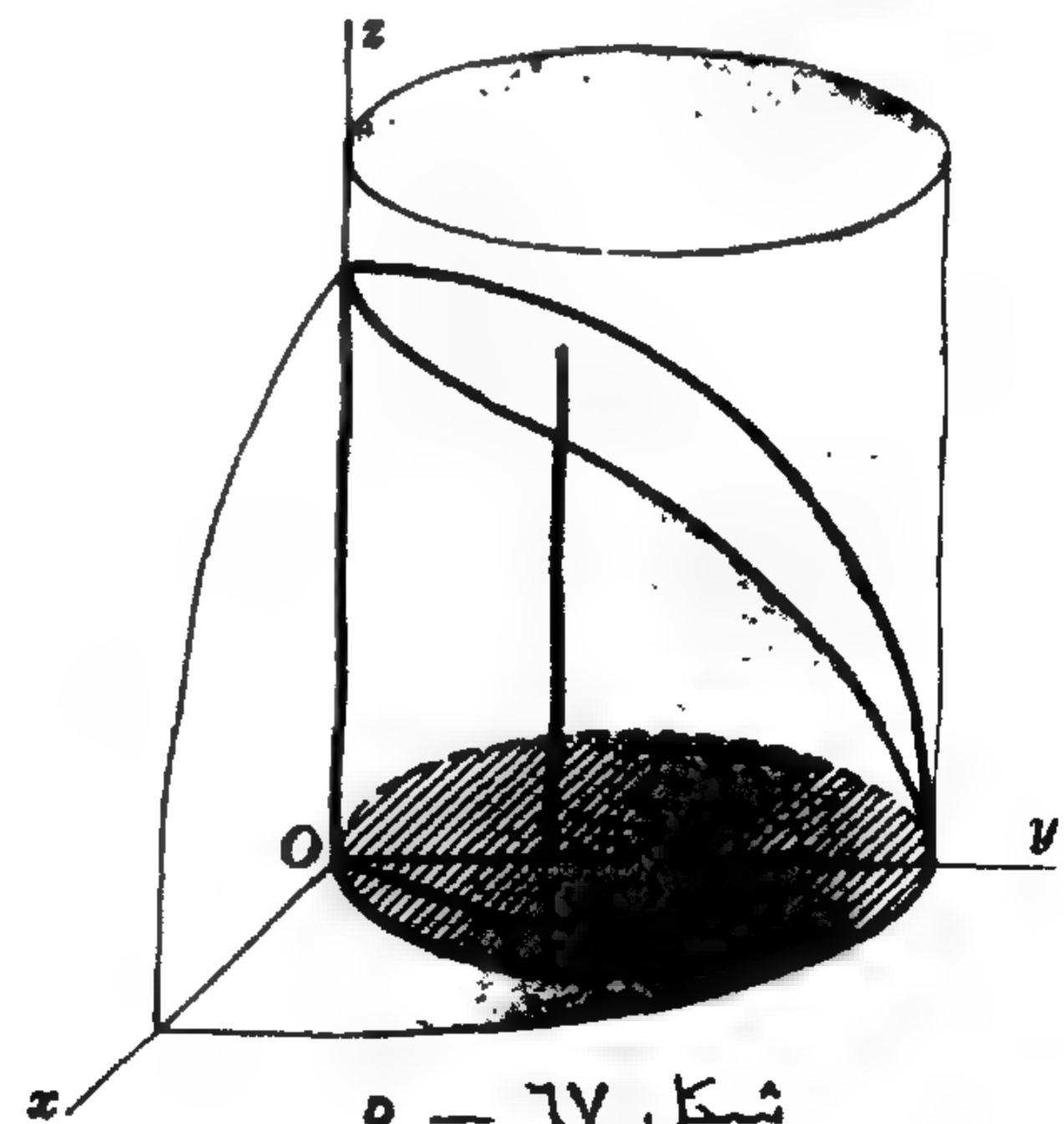
٨ - احسب الحجم داخل الاسطوانة $\rho = 4 \cos \theta$ والمحدد من أعلى بالكرة $\rho^2 + z^2 = 16$ ومن أسفل بالمستوى $z = 0$ انظر الشكل ٦٧ - ٥

لنكامل أولا بالنسبة لـ z من $z = 0$ إلى $z = \sqrt{16 - \rho^2}$ ثم بالنسبة لـ ρ من $\rho = 0$ إلى $\rho = 4 \cos \theta$ وأخيرا بالنسبة لـ θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$ فنحصل على الحجم المطلوب . وهو :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} \int_0^{4 \cos \theta} \int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \cos \theta} \rho \sqrt{16-\rho^2} d\rho d\theta \\ &= -\frac{64}{3} \int_0^{\pi} (\sin^3 \theta + 1) d\theta = \frac{64}{9} (3\pi - 4) \text{ cubic units} \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٦



شكل ٦٧ - ٥

٩ - عين المركز المتوسط للجسم الواقع داخل الاسطوانة $\rho = 2 \cos \theta$ والمحدد من أعلى بمجسم القطع المكافئ $z = \rho^2$ ومن أسفل بالمستوى $z = 0$. انظر الشكل ٦٧ - ٦.

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \rho^3 \, d\rho \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \rho^4 \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_R x \, dV = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{\rho^2} \rho \cos \theta \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \quad \text{ومنه} \\ \bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} &= \frac{4}{3} \quad \text{ومنه} \quad = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \rho^4 \cos \theta \, d\rho \, d\theta = \frac{64}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta = 2\pi, \end{aligned}$$

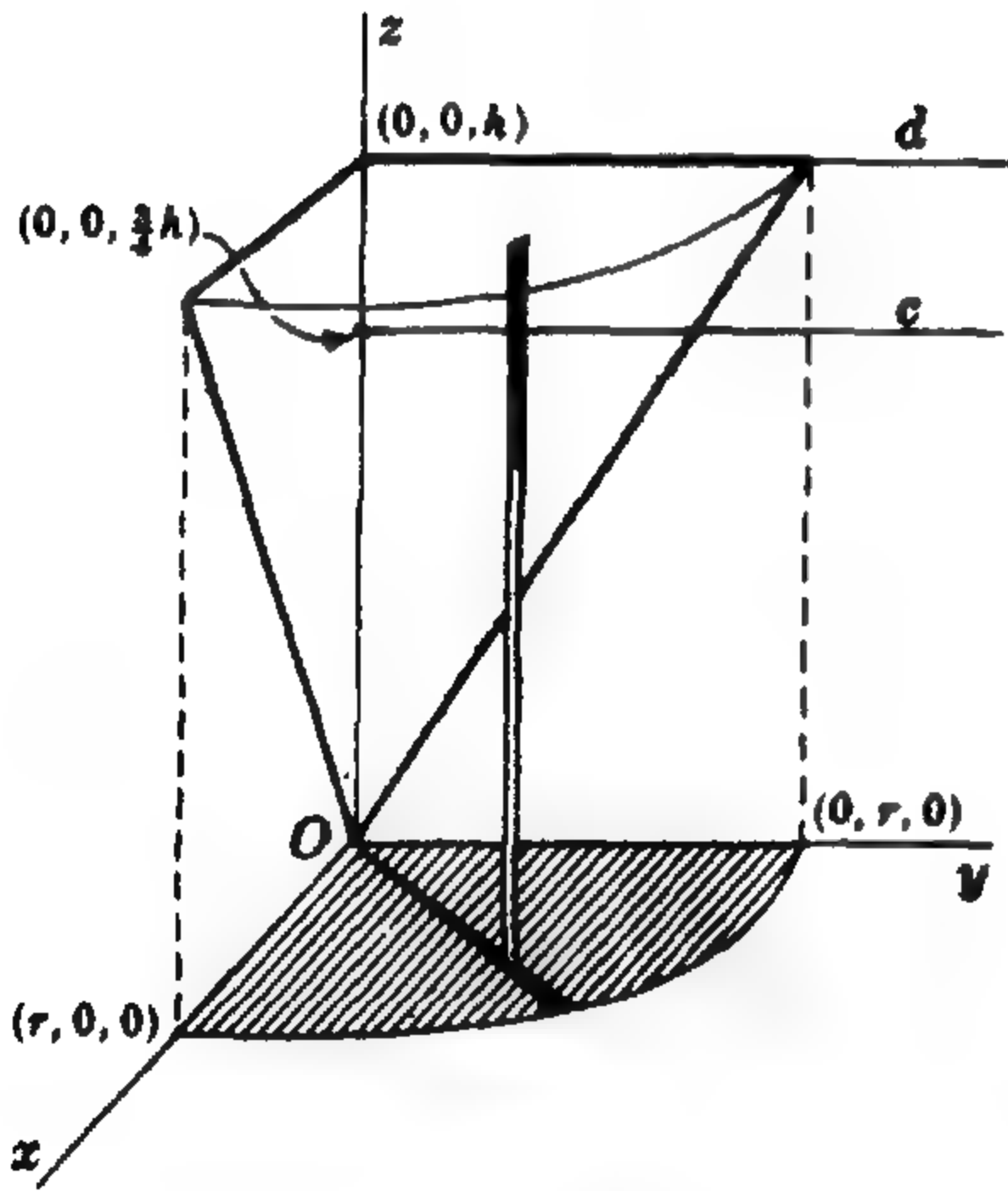
واستنادا إلى التناظر يكون $y = 0$ ثم إن .

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_R z \, dV = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{\rho^2} z \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \rho^5 \, d\rho \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \, d\theta = \frac{5}{3}\pi, \quad \text{ومنه} \quad \bar{z} = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

والمركز المتوسط له الإحداثيات $(4/3, 0, 10/9)$.

١٠ - لدينا مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h ، أوجد

(١) مركزه المتوسط (ب) عزم قصوره الذاتي بالنسبة لمحوره (ج) عزم قصوره الذاتي بالنسبة لأي مستقيم مار برأسه وعمودي على محوره . (د) عزم قصوره الذاتي بالنسبة لأي قطر لقاعدته .



شكل ٦٧ - ٧

لنأخذ المخروط كافي الشكل ٦٧ - ٧ فتكون معادلته $\rho = \frac{r}{h} z$.

وبالتالي :

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}\rho}^h \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \left(h\rho - \frac{h}{r}\rho^2 \right) d\rho \, d\theta \\ &= \frac{2}{3}hr^3 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}\pi hr^3 \end{aligned}$$

(١) يقع المركز المتوسط على المحور z

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_R z \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}\rho}^h z \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \left(h^2\rho - \frac{h^2}{r^2}\rho^3 \right) d\rho \, d\theta = \frac{1}{2}h^2r^3 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{4}\pi h^2r^3 \end{aligned}$$

ومنه $\bar{z} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{3}{4}h$. وعلى هذا يكون المركز المتوسط هو النقطة $(0, 0, 3/4h)$.

$$I_x = \iiint_V (x^2 + y^2) dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}}^h \rho^2 \cdot \rho dz d\rho d\theta = \frac{1}{10} \pi h r^4 = \frac{3}{10} r^2 V \quad (\text{ب})$$

(ج) لنأخذ المستقيم كمحور y فيكون :

$$\begin{aligned} I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}}^h (\rho^2 \cos^2 \theta + z^2) \rho dz d\rho d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \left\{ \left(h\rho^2 - \frac{h}{r} \rho^4 \right) \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \left(h^3 \rho - \frac{h^3}{r^3} \rho^4 \right) \right\} d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{5} \pi h r^3 \left(h^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) = \frac{3}{5} \left(h^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) V \end{aligned}$$

(د) ليكن المستقيم c المار بالمركز المتوسط موازيا لمحور y فيكون - استنادا إلى نظرية المستقيمت المتوازية

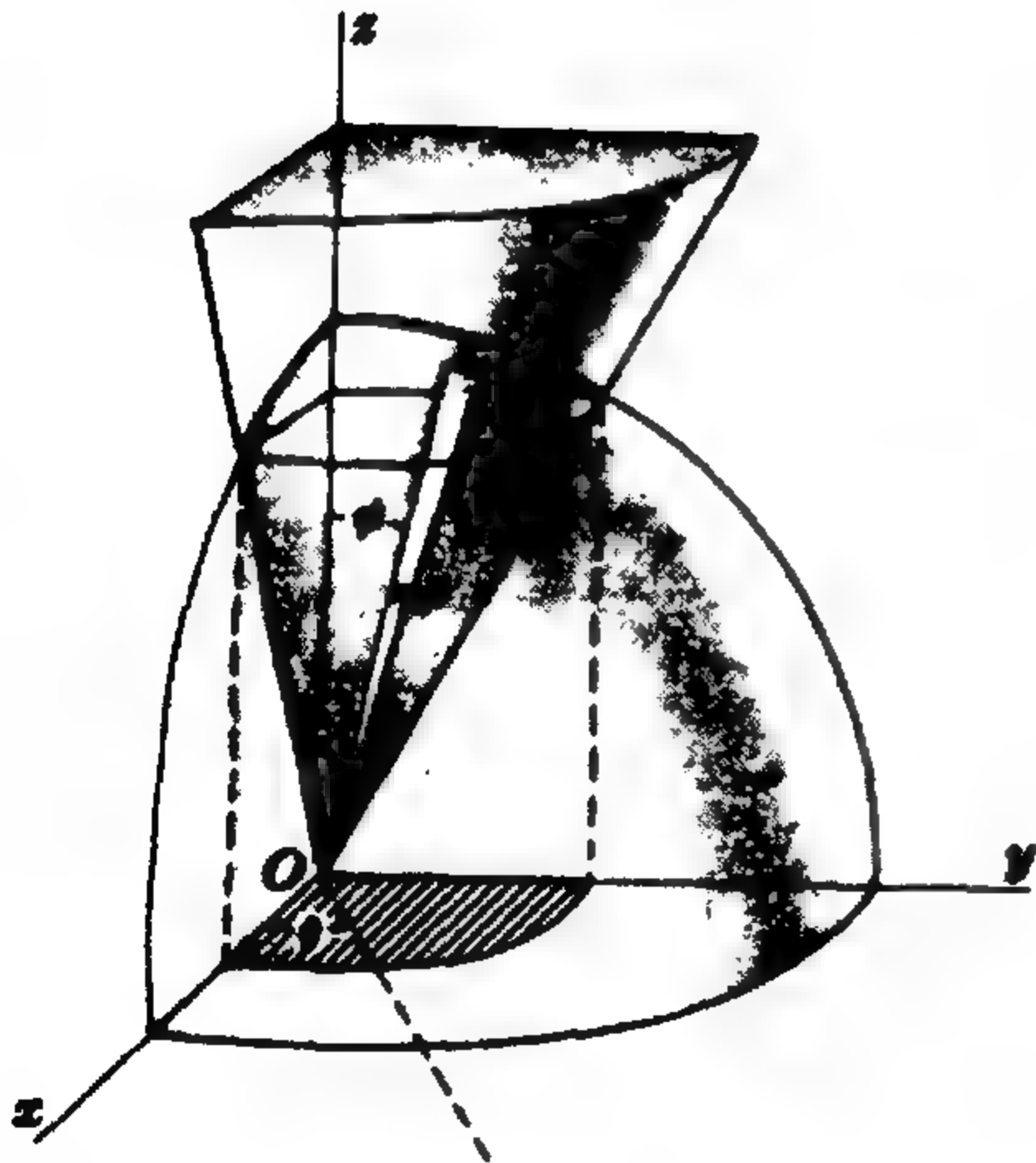
$$I_c = \frac{3}{5} \left(h^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) V - \frac{3}{16} h^2 V = \frac{3}{80} (h^2 + 4r^2) V \quad , \quad I_y = I_c + V \left(\frac{3}{4} h \right)^2$$

(هـ) لترمز بـ d لقطر قاعدة المخروط الموازي للمحور y فيكون :

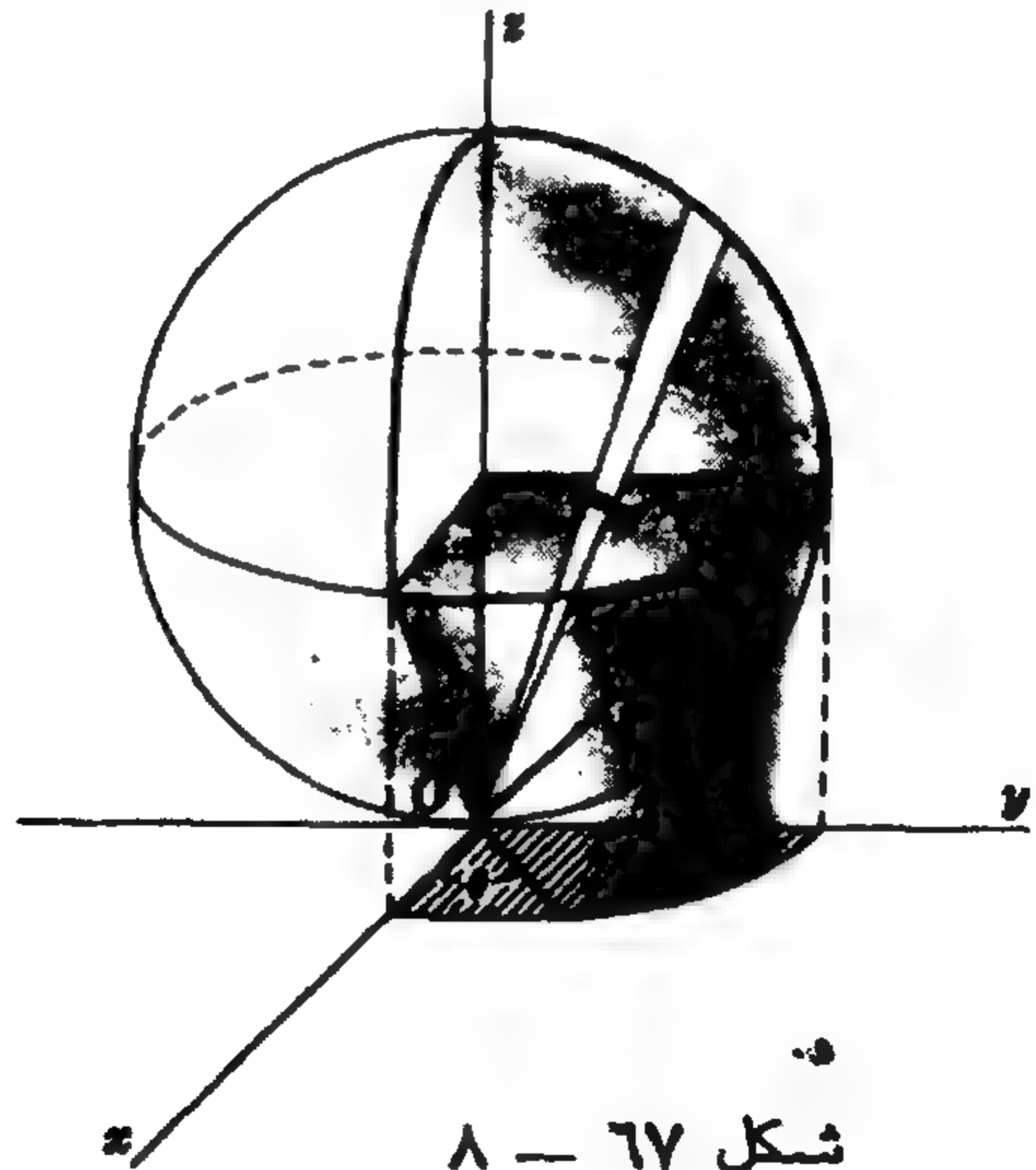
$$I_c = I_c + V \left(\frac{1}{4} h \right)^2 = \frac{3}{80} (h^2 + 4r^2) V + \frac{1}{16} h^2 V = \frac{1}{80} (2h^2 + 3r^2) V$$

١١ - احسب الحجم المقتطع من المخروط $\phi = \frac{1}{4}\pi$ بالكرة $\rho = 2a \cos \phi$. انظر الشكل ٦٧ - ٨ .

$$\begin{aligned} V &= 4 \iiint_V dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2a \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{32a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \phi \sin \phi d\phi d\theta = 2a^3 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi a^3 \text{ cubic units} \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٩



شكل ٦٧ - ٨

١٢ - عين المركز المتوسط للحجم المقتطع من أحد فرعي المخروط الذي زاوية رأسه 60° بالكرة التي نصف قطرها 2 والتي يقع مركزها على رأس المخروط . انظر الشكل ٦٧ - ٩ .

لنأخذ السطحين كما في الشكل ٦٧ - ٦٨ فيكون $\bar{x} = \bar{y} = 0$. وإذا استخدمنا الاحداثيات الكروية نجد معادلة المخروط $\phi = \pi/6$ ومعادلة الكرة $\rho = 2$.

$$V = \iiint_R dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho \cos \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{8} \quad , \quad = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin 2\phi \, d\phi \, d\theta = \pi$$

١٣ - احسب عزم القصور الذاتي للمجسم المحدد بالمسألة ١٢ بالنسبة للمحور z .

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin^2 \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{128}{5} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin^3 \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{128}{5} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8} \sqrt{3} \right) \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{15} (16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5} V$$

مسائل اضافية

١٤ - احسب قيم التكاملات الثلاثية التالية :

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 dz \, dx \, dy = 1 \quad (أ)$$

$$\int_0^1 \int_2^3 \int_0^{\pi} dz \, dy \, dx = 1/24 \quad (ب)$$

$$\int_0^8 \int_0^{12-2y} \int_0^{4-2y/3-z/3} x \, dz \, dx \, dy = 144 = \int_0^{12} \int_0^{8-x/2} \int_0^{4-2y/3-z/3} x \, dz \, dy \, dx \quad (ج)$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16 - \rho^2)^{1/2} \rho \, z \, d\rho \, dz \, d\theta = \frac{256}{5} \pi \quad (د)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^4 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2500\pi \quad (هـ)$$

١٥ - (أ) احسب قيمة تكامل المسألة ١٤ (ب) بعد تغيير الترتيب بحيث يصبح $dz \, dx \, dy$.

(ب) احسب قيمة تكامل المسألة ١٤ (ج) بعد تغيير الترتيب بحيث يصبح $dx \, dy \, dz$ وعندما يصبح أيضا

$dy \, dz \, dx$.

١٦ - احسب الحجم التالي مستخدما التكاملات الثلاثية في الاحداثيات المتعامدة :

(أ) الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوى $z = 0$ وتحت المستوى $x + z = 4$.

ج : 36π cu. un. .

(ب) الحجم المحدد بالمستويات الاحداثية والمستوى $6x + 4y + 3z = 12$

ج : 4 cu. un.

(ج) الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$ وتحت $x^2 + y^2 = 4z$.

ج : 6π cu. un.

١٧ - احسب الحجم التالى مستخدما التكاملات الثلاثية فى الاحداثيات الاسطوانية :

(ا) حجم المسألة هـ

(ب) حجم المسألة ١٦ (ج)

(ج) الحجم الواقع داخل $\rho^2 = 16$ وفوق $z = 0$ وتحت $2z = y$.

ج : $64/3$ cu. un.

١٨ - عين المركز المتوسط لكل من الحجم التالى :

(ا) الحجم الواقع تحت $z^2 = xy$ وفوق المثلث $y = x, y = 0, x = 4$

فى المستوى $z = 0$.

ج : $(3, 9/5, 9/8)$

ج : $(1/2, 3/4, 1)$

(ب) حجم المسألة ١٦ (ب)

ج : $\left(\frac{64 - 9\pi}{16(\pi - 1)}, \frac{23}{8(\pi - 1)}, \frac{73\pi - 128}{32(\pi - 1)} \right)$

(ج) حجم المسألة ١٦ (ا) الواقع فى الثمن الأول.

ج : $(8/3, 0, 10/9)$

(د) حجم المسألة ١٦ (ج)

ج : $(0, 3\pi/4, 3\pi/16)$

(هـ) حجم المسألة ١٧ (ج)

١٩ - احسب عزوم القصور الذاتية I_x, I_y, I_z للحجوم التالية :

ج : $I_x = I_y = \frac{32}{3}V, I_z = \frac{16}{3}V$

(ا) حجم المسألة هـ

ج : $I_x = \frac{5}{2}V, I_y = 2V, I_z = \frac{13}{18}V$

(ب) حجم المسألة ١٦ (ب)

ج : $I_x = \frac{55}{18}V, I_y = \frac{175}{18}V, I_z = \frac{80}{9}V$

(ج) حجم المسألة ١٦ (ج)

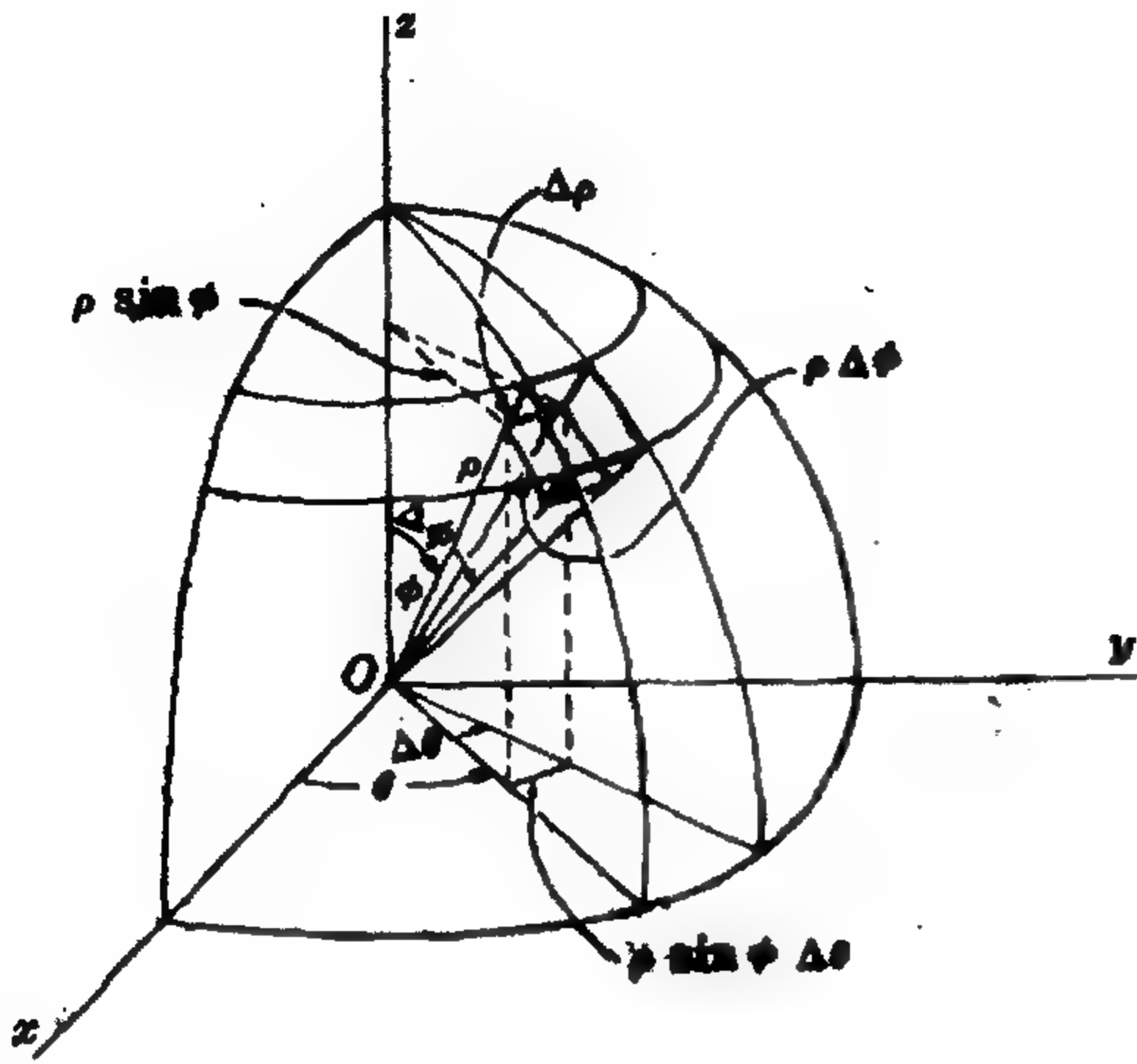
ج : $I_x = I_y = \frac{7}{3}V, I_z = \frac{8}{3}V$

(د) الحجم المقتطع من $z = \rho^2$ بالمستوى $z = 2$.

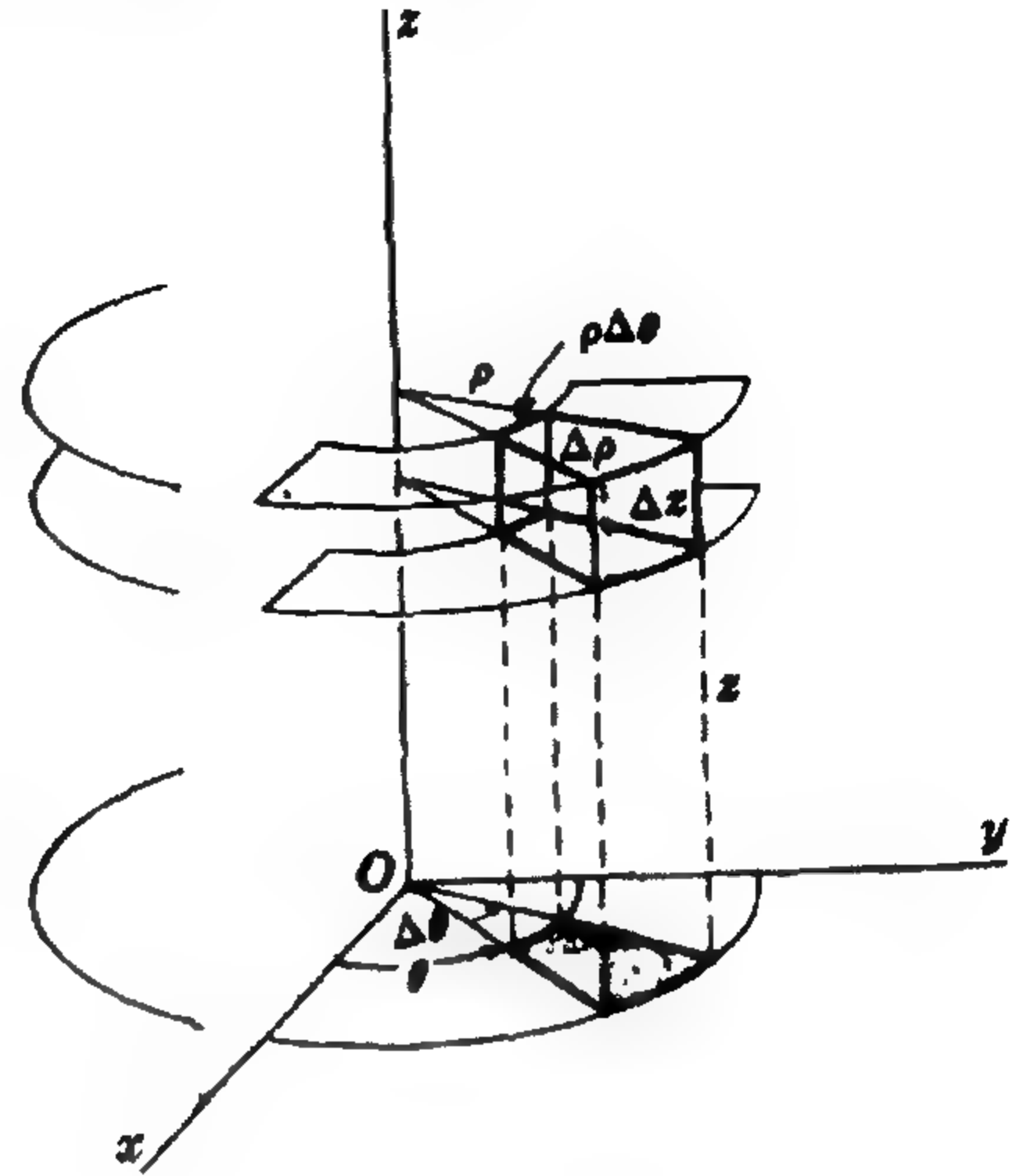
٢٠ - برهن أنه يمكن تمثيل تكامل الدالة $f(\rho, \theta, z)$ على منطقة R فى الاحداثيات الاسطوانية بـ

$$\int_a^b \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho, \theta)}^{z_2(\rho, \theta)} f(\rho, \theta, z) \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

إرشاد . اعتبر المنطقة الجزئية المثلثة بـ R (انظر الشكل ٦٧ - ١٠) والمحددة بالاسطوانتين اللتين محورهما Oz ونصفا قطريهما ρ و $\rho + \Delta$ على التوالي ، وبالمستويين الأفقيين المارين بـ $(0, 0, z)$ و $(0, 0, z + \Delta z)$ على التوالي ، والمستويين الرأسين المارين بـ Oz والذان يصنعان مع المستوى xOy الزاويتين θ و $\theta + \Delta\theta$ على التوالي ، ثم خذ $\Delta V = (\rho \Delta\theta) \Delta\rho \cdot \Delta z$ كتقريب لحجم هذه المنطقة الجزئية .



شكل ٦٧ - ١١



شكل ٦٧ - ١٠

٢١ - برهن أنه يمكن تمثيل تكامل $f(\rho, \phi, \theta)$ على منطقة R في الاحداثيات الكروية بـ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi, \theta)}^{\rho_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

إرشاد . اعتبر منطقة جزئية ممثلة بـ R (انظر الشكل ٦٧ - ١١) محددة بـ كرتين مركزهما O ونصف قطريهما ρ و $\rho + \Delta\rho$ على التوالي ومخروطي رأسيهما O ومحورهما Oz . ونصف زاويتي رأسيهما ϕ و $\phi + \Delta\phi$ على التوالي ، وبمستويين رأسيين مارين بـ Oz ويصنعان الزاويتين θ و $\theta + \Delta\theta$ على التوالي مع المستوى zOy . ثم خذ

$$\Delta V = (\rho \Delta\phi)(\rho \sin \phi \Delta\theta)(\Delta\rho) = \rho^2 \sin \phi \Delta\rho \Delta\phi \Delta\theta$$

كتقريب لحجم هذه المنطقة الجزئية .

الفصل الثامن والستون

الكتل ذات الكثافة المتغيرة

الكتل المتجانسة : سبق معالجتها في الفصول السابقة على أنها أشكال هندسية كثافتها $\delta = 1$. فكتلة جسم متجانس حجمه V وكثافته δ هي $m = \delta V$.

أما إذا كان لدينا كتلة غير متجانسة تتغير كثافتها δ بشكل مستمر من موضع لآخر فإن عنصر الكتلة dm يعطى بـ :

$\delta(x, y) ds$ لمنحنى مادي (مثل قطعة من سلك رفيع) .

$\delta(x, y) dA$ لجسم مادي ثنائي البعد (مثل صفيحة رقيقة من المعدن)

$\delta(x, y, z) dV$ لجسم مادي .

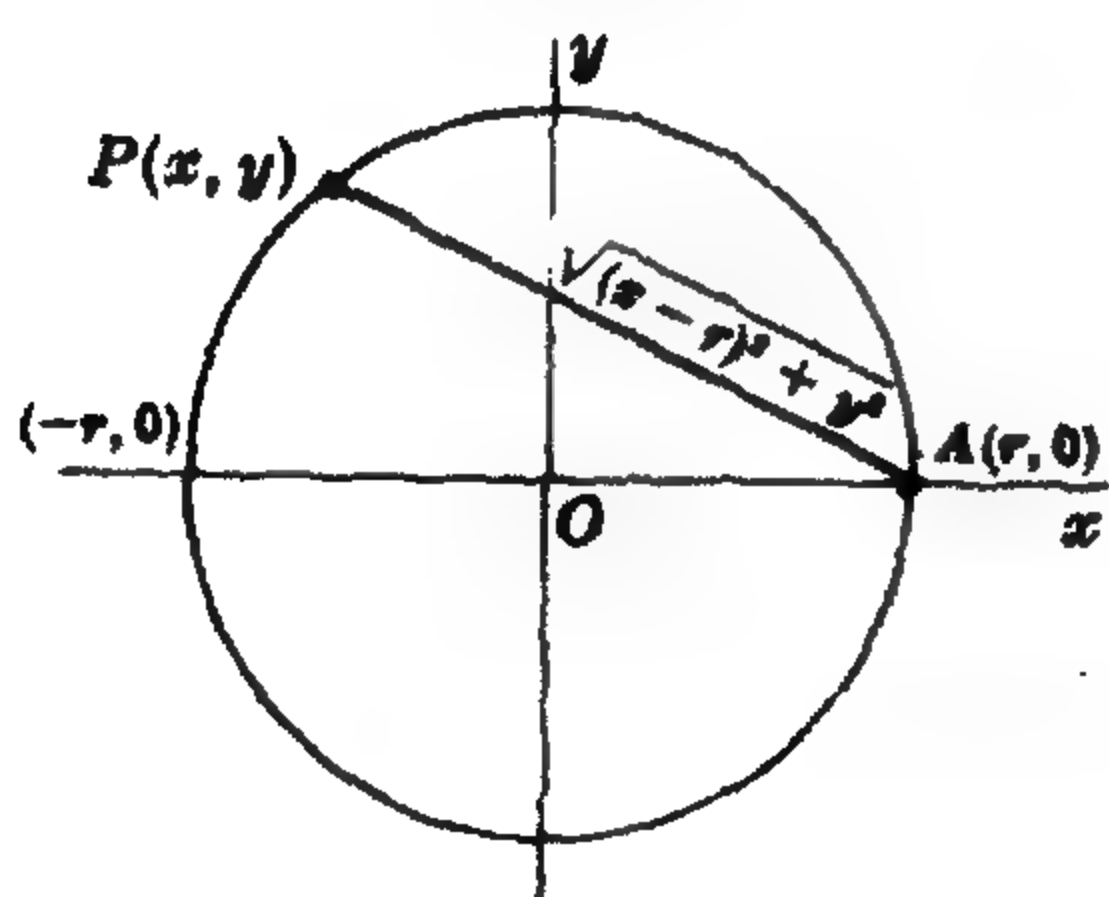
مسائل محلولة

١ - احسب كتلة سلك نصف دائري تتغير كثافته كتغير البعد عن القطر الذي يصل نهايتي السلك (انظر الشكل ٦٨ - ١) .

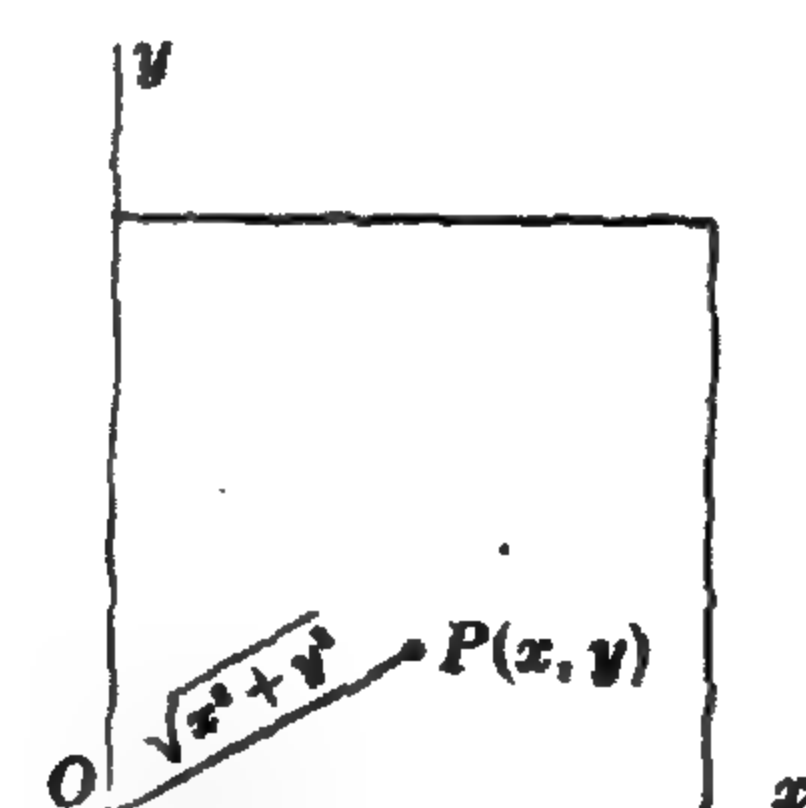
لنأخذ السلك كما في الشكل ٦٨ - ١ فيكون $\delta(x, y) = ky$ واستنادا إلى $x^2 + y^2 = r^2$ أن نجد

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{r}{y} dx$$

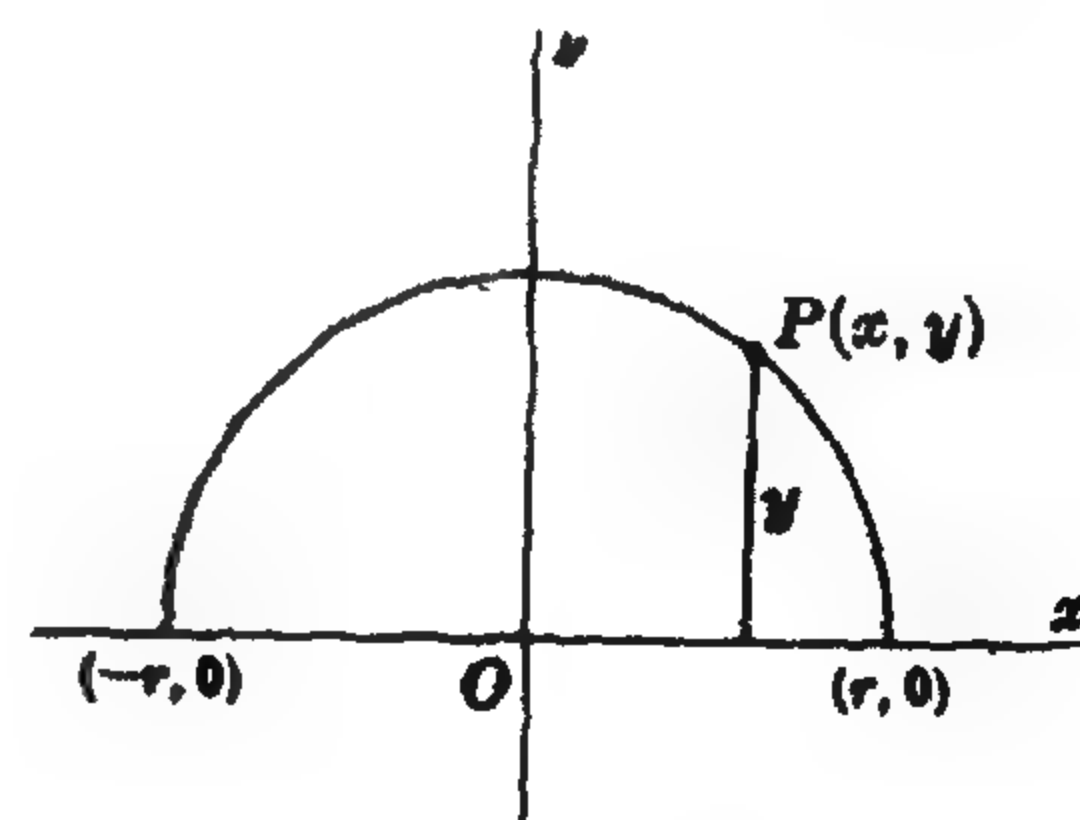
$$m = \int \delta(x, y) ds = \int_{-r}^r ky \cdot \frac{r}{y} dx = kr \int_{-r}^r dx = 2kr \text{ units ومنه}$$



شكل ٦٨ - ٢



شكل ٦٨ - ٢



شكل ٦٨ - ١

٢ — احسب كتلة صفيحة مربعة طول ضلعها a تتغير كثافتها كتغير مربع البعد عن أحد رؤوس المربع . انظر الشكل ٦٨ - ٢ .

لنأخذ المربع كما في الشكل ٦٨ - ٢ ولنجعل الرأس الذي نقيس منها الأبعاد نقطة الأصل . يكون عندئذ $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ويكون :

$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2) dx dy = k \int_0^a \left(\frac{1}{3} a^3 + ay^2 \right) dy = \frac{3}{2} ka^3 \text{ units}$$

٣ — احسب كتلة صفيحة دائرية نصف قطرها r وتتغير كثافتها كتغير مربع البعد عن إحدى نقط محيط الدائرة انظر الشكل ٦٨ - ٣ .

لنأخذ الدائرة كما في الشكل ٦٨ - ٣ ولتكن $A(r, 0)$ النقطة الثابتة على محيط الدائرة . عندئذ يكون $\delta(x, y) = k((x-r)^2 + y^2)$ ومنه :

$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = 2 \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k((x-r)^2 + y^2) dy dx = \frac{3}{2} k\pi r^3 \text{ units}$$

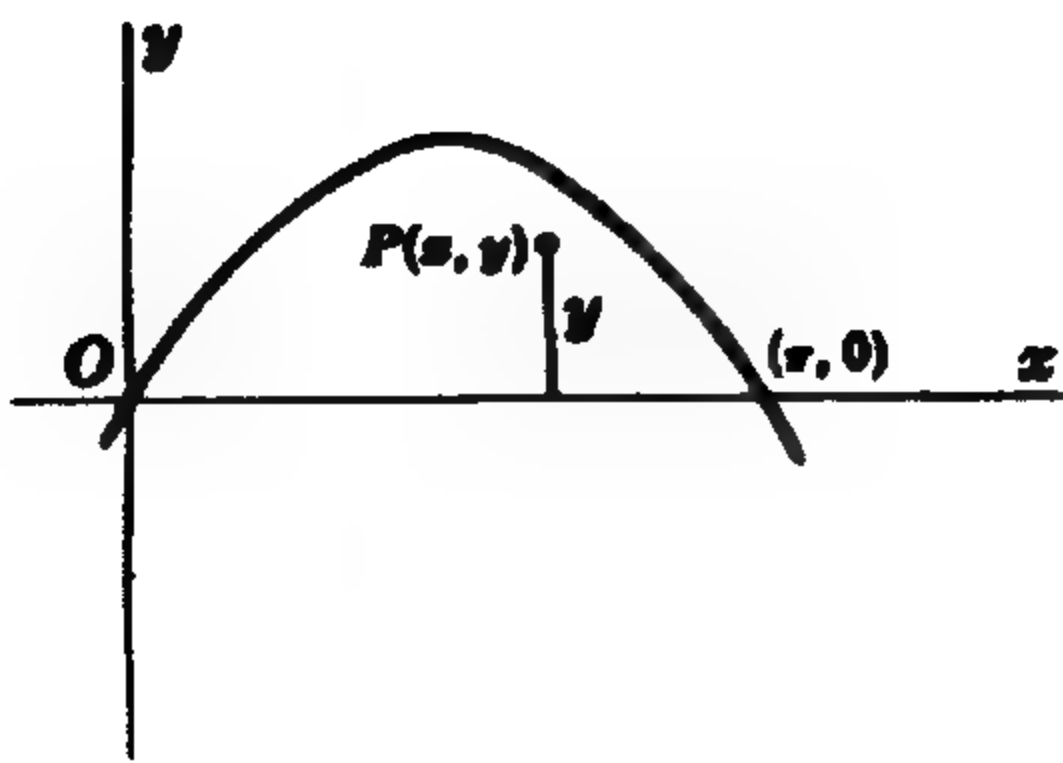
٤ — عين مركز صفيحة على شكل قطعة من القطع المكافئ $y^2 = 8x$ يقطعها منه المستقيم $x = 2$ إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن هذا المستقيم . انظر الشكل ٦٨ - ٨ .

إن $\delta(x, y) = 2 - x$ وبسبب التناظر $\bar{y} = 0$ ومن النصف العلوي من الصفيحة لدينا

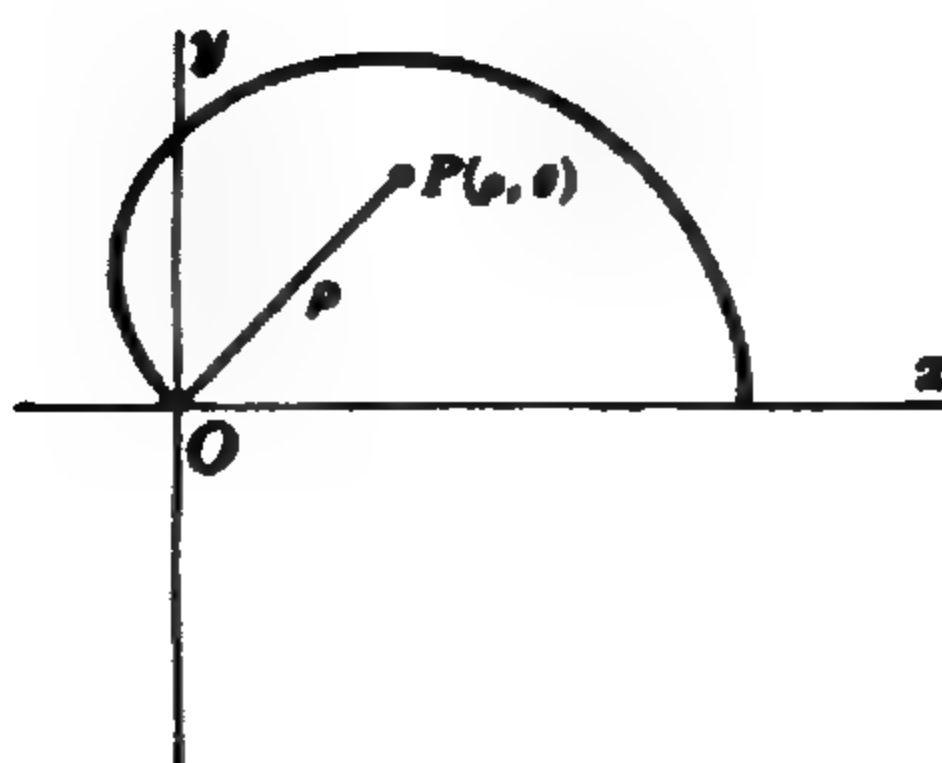
$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^2 k(2-x) dx dy = k \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{128} \right) dy = \frac{64}{15} k,$$

$$M_x = \iint_R \delta(x, y) x dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^2 k(2-x)x dx dy = k \int_0^4 \left(\frac{4}{3} - \frac{y^4}{64} + \frac{y^6}{24 \cdot 64} \right) dy = \frac{128}{35} k$$

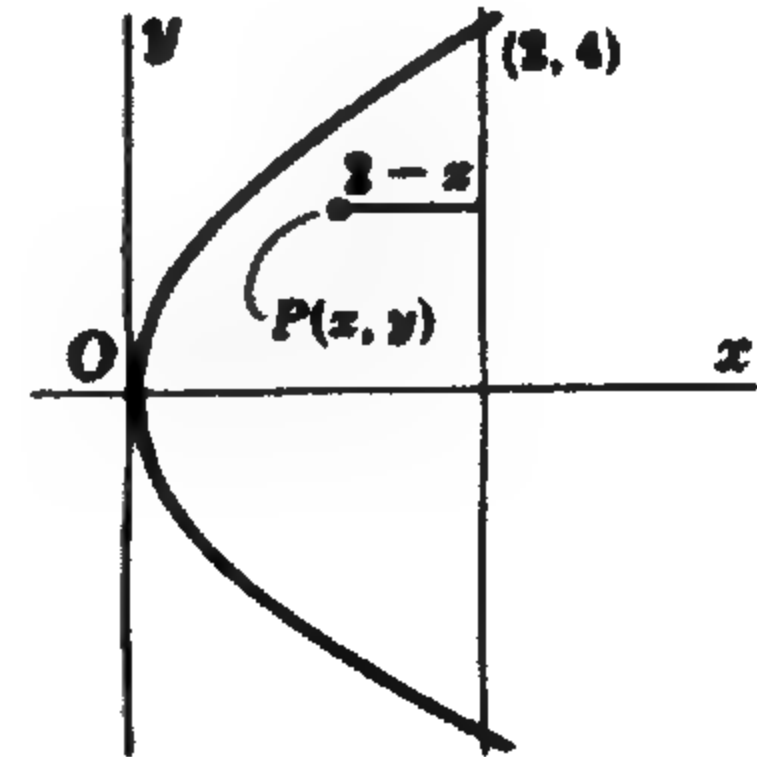
ومن $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{6}{7}$ ومركز الكتلة هو النقطة $(6/7, 0)$



شكل ٦٨ - ٦



شكل ٦٨ - ٧



شكل ٦٨ - ٨

٥ - عين مركز كتلة صفيحة على شكل النصف العلوي من منحنى القلب $\rho = 2(1 + \cos \theta)$ إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن القطب . انظر الشكل ٦٨ - ٥

$$m = \iint_R \delta(\rho, \theta) dA = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho \cdot \rho d\rho d\theta = \frac{8}{3}k \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{20}{3}k\pi,$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R \delta(\rho, \theta) y dA = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 4k \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{128}{5}k, \end{aligned}$$

$$M_y = \iint_R \delta(\rho, \theta) x dA = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho \cdot \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta = 14k\pi$$

وعلى هذا فإن $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{21}{10}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{96}{25\pi}$, ومركز الكتلة هو النقطة $\left(\frac{21}{10}, \frac{96}{25\pi} \right)$

٦ - احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x لصفيحة حدودها قوس واحد من المنحنى $y = \sin x$ والمحور x إذا كانت الكثافة تتغير البعد عن المحور x . انظر الشكل ٦٨ - ٦ .

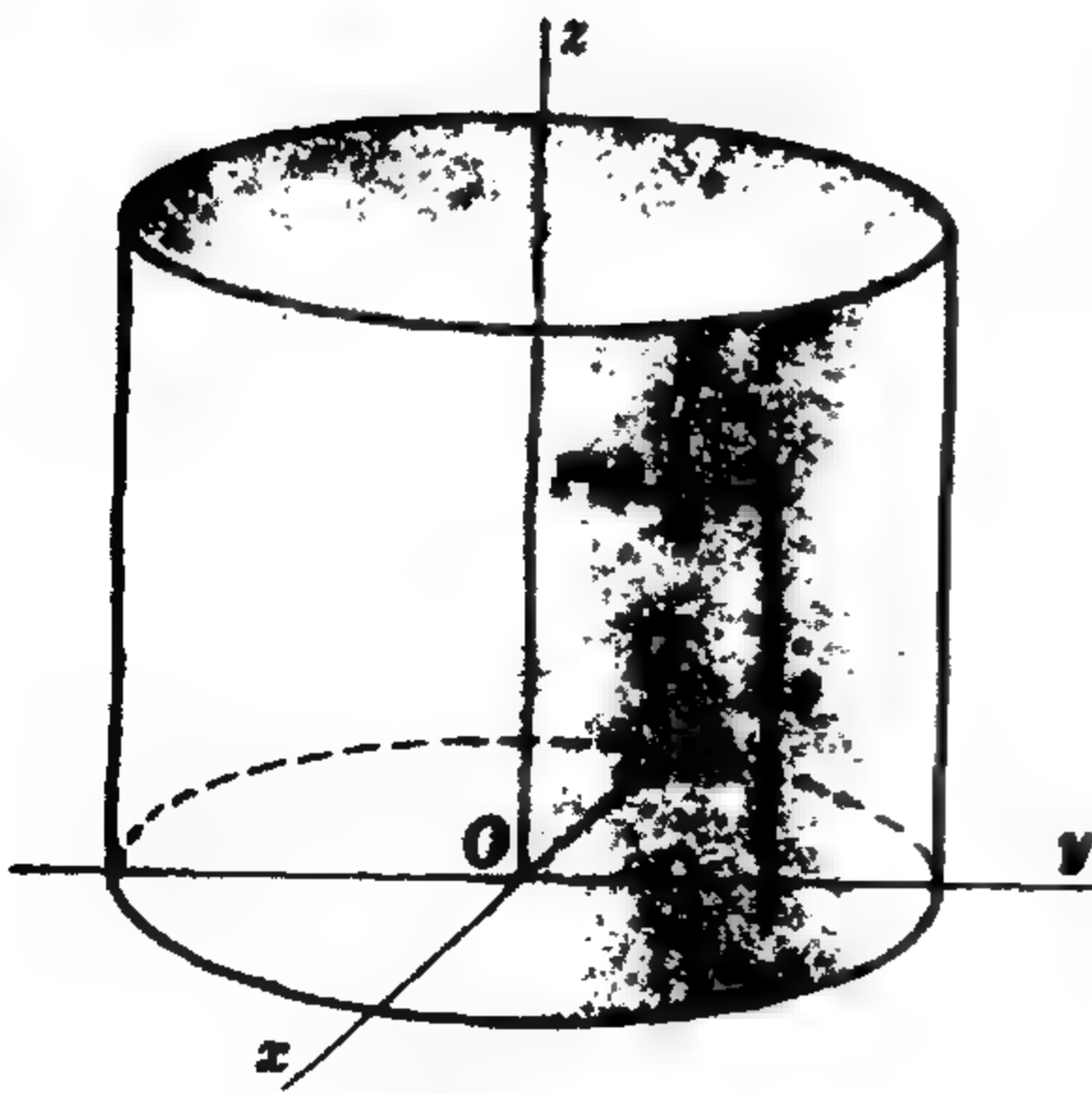
$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} ky dy dx = \frac{1}{2}k \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{4}k\pi$$

$$I_x = \iint_R \delta(x, y) y^2 dA = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} ky \cdot y^2 \cdot dy dx = \frac{1}{4}k \int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{3}{32}k\pi = \frac{3}{8}m$$

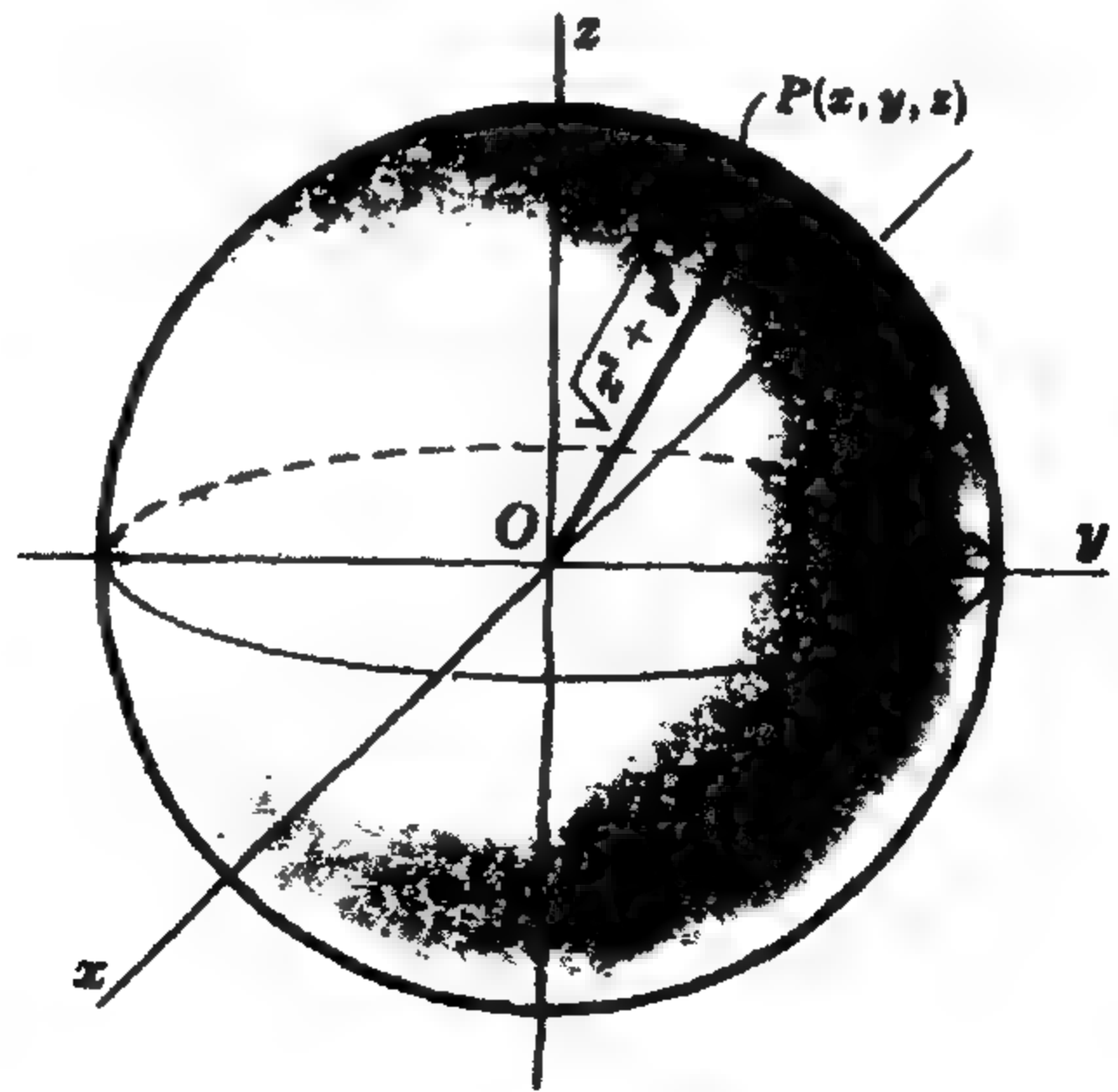
٧ - احسب كتلة كرة نصف قطرها r تتغير كثافتها كتغير مقلوب مربع البعد عن مركزها . انظر الشكل ٦٨ - ٧ .

لنأخذ الكرة كما في الشكل ٦٨ - ٧ فيكون $\delta(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k}{\rho^2}$ ومنه

$$\begin{aligned} m &= \iiint_R \delta(x, y, z) dV = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^r \frac{k}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 8kr \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi d\theta = 8kr \int_0^{\pi/2} d\theta = 4k\pi r \text{ units} \end{aligned}$$



شكل ٦٨ - ٨



شكل ٦٨ - ٧

٨ - عين مركز الكتلة لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h تتغير كثافتها كتغير البعد عن القاعدة .
انظر الشكل ٦٨ - ٨ .

لنأخذ الاسطوانة كما في الشكل ٦٨ - ٨ فتكون معادلتها $\rho = r$ ويكون الحجم الذي نحن بصدده هو ذلك الجزء من الاسطوانة الواقع بين المستويين $z = 0$ ، $z = h$.

من الواضح أن مركز الكتلة يقع على المحور z .

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \delta(z, \rho, \theta) dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_0^h kz \cdot \rho dz d\rho d\theta = 2kh^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \rho d\rho d\theta \\ &= kh^3 r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2} k\pi h^3 r^2, \\ M_{xy} &= \iiint_V \delta(z, \rho, \theta) z dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_0^h kz^2 \cdot \rho dz d\rho d\theta = \frac{4}{3} kh^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{3} kh^3 r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3} k\pi h^3 r^2, \quad z = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{3} h \end{aligned}$$

مركز الكتلة إذن هو النقطة $(0, 0, \frac{2}{3}h)$

مسائل إضافية

٩ - احسب كتلة :

(أ) قضيب مستقيم طوله a وتغير كثافته كتغير مربع البعد عن أحد طرفي القضيب .

ج : $\frac{1}{3}ka^3$ units وحدة

(ب) صفيحة على شكل مثلث قائم طولاً ضلعيه القائمين هما a و b إذا كانت الكثافة تتغير ك مجموع البعدين عن الضلعين القائمين .

ج : $\frac{1}{6}kab(a+b)$ units

(ج) صفيحة دائرية نصف قطرها a تتغير كثافتها كالبعد عن المركز .

ج : $\frac{2}{3}ka^3b$ units

(د) صفيحة على شكل قطع ناقص $h^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ إذا كانت كثافتها تتغير ك مجموع البعدين عن المحورين .

ج : $\frac{3}{4}kab(a+b)$ units وحدة

(هـ) اسطوانة دائرية ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها a إذا كانت الكثافة تتغير ك ربع البعد عن محور الاسطوانة .

ج : $\frac{1}{2}ka^4b\pi$ units

(و) كرة نصف قطرها a تتغير كثافتها كالبعد عن مستوى قطري ثابت .

ج : $\frac{1}{2}ka^4\pi$ units وحدة

(ز) مخروط دائري ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a تتغير كثافته كالبعد عن محور المخروط .
ج : $\frac{1}{6}La^3b\pi$ units .

(ح) سطح كروي تتغير كثافته كالبعد عن مستو قطري ثابت .
ج : $2ka^3\pi$ units .

١٠ - عين مركز الكتلة لـ :

(ا) مربع صفيحة المسألة ٩ (ج) ج : $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$

(ب) ربع صفيحة دائرية نصف قطرها a تتغير كثافتها كالبعد عن أحد نصفي القطرين اللذين يحدهما (المحور x) .
ج : $(3a/8, 3a\pi/16)$

(ج) مكعب طول ضلعه a تتغير كثافته ك مجموع الأبعاد عن ثلاثة من أضلاعه المتجاورة (المحاور الاحداثية)
ج : $(5a/8, 5a/9, 5a/9)$

(د) ثمن كرة نصف قطرها a إذا كانت الكثافة تتغير كالبعد عن أحد وجهيها المستوى .
ج : $(8a/15, 16a/15\pi, 16a/15\pi)$

(هـ) مخروط دائري قائم ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a وكثافته متغيرة كالبعد عن قاعدته .
ج : $(0, 2b/5)$

١١ - احسب عزم القصور الذاتي لـ :

(ا) صفيحة مربعة طول ضلعها a بالنسبة لأحد أضلاعها بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن أحد طرفي ذلك الضلع .
ج : $\frac{7}{15} a^2m$

(ب) صفيحة على شكل دائرة نصف قطرها a بالنسبة لمركزها بفرض أن كثافتها تتغير كربع البعد عن المركز .
ج : $\frac{2}{3} a^2m$

(ج) مكعب طول ضلعه a بالنسبة لأحد أضلاعه بفرض أن كتلة كثافته تتغير كربع البعد عن أحد طرفي ذلك الضلع .
ج : $\frac{38}{45} a^2m$

(د) مخروط دائري قائم ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a بالنسبة لمحوره بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن المحور .
ج : $\frac{2}{5} a^2m$

(هـ) مخروط (د) بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن القاعدة .
ج : $\frac{1}{5} a^2m$

الفصل التاسع والستون

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية • هي معادلة تحتوي على المشتقات أو التفاضلات ، مثلا :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad dy = (x + 2y) dx, \quad \dots$$

إن رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تظهر فيها . فالأولى من المعادلتين السابقتين من الرتبة الثانية ، والثانية من الرتبة الأولى والمعادلتان من الدرجة الأولى .

حل المعادلة التفاضلية هو أية علاقة بين المتغيرات خالية من المشتقات والتفاضلات وتحقق المعادلة وتجعلها مطابقة . والحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو ذلك الحل الذي يحتوي أكبر عدد (يساوي n) من الثوابت الاختيارية الأساسية .

انظر المسائل ١ - ٣

المعادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى : هي معادلة من الشكل $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

وإذا كان لهذه المعادلة الشكل الخاص $f_1(x) \cdot g_2(y) dx + f_2(x) \cdot g_1(y) dy = 0$ ، فإن متغيراتها قابلة للفصل وحلها العام هو :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = C$$

انظر المسائل ٤ - ٦

نقول عن دالة $f(x, y)$ إنها متجانسة من الدرجة n في متغيراتها إذا كان $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. ونقول

عن المعادلة $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ إنها متجانسة إذا كانت $M(x, y)$ ، $N(x, y)$ متجانستين من الدرجة نفسها وفي مثل هذه الحالة يحول التعويض :

$$y = vx, \quad dy = v dx + x dv$$

المعادلة المتجانسة إلى معادلة بالمتغيرين x و v القابلين للفصل .

انظر المسائل ٧ - ٩

بعض المعادلات التفاضلية يمكن حلها مباشرة إذا استفدنا من وجود تراكيبات من الحدود القابلة للتكامل .

وقد يتمتع أحيانا حل المعادلة مباشرة بالطريقة السابقة . ولكن إذا صرنا في دالة في x أو في y نختارها بشكل ملائم فإنها تصبح قابلة للحل . نسمي هذا المضروب العامل التكامل للمعادلة .

انظر المسائل ١٠ - ١٤

والمعادلة التفاضلية التي يقال عنها خطية من الرتبة الأولى $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ حيث P و Q دالتان في x فقط لها عامل تكامل مثل $\xi(x) = e^{\int P dx}$

انظر المسائل ١٥ - ١٧

تحول كل معادلة من الشكل $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ حيث $n \neq 0, 1$ و P, Q دالتان في x فقط ، إلى معادلة خطية بالتعويض :

$$y^{1-n} = z, \quad y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx}$$

انظر المسائل ١٨ - ١٩

مسائل محلولة

١ - بين أن (أ) $y = 2e^x$ (ب) $y = 3x$ (ج) $y = C_1 e^x + C_2 x$ حيث C_1 و C_2 ثابتان اختياريان ، هي حلول للمعادلة التفاضلية $y''(1-x) + y'x - y = 0$.

(أ) لنشتق $y' = 2e^x$ مرتين فنحصل على $y'' = 2e^x$ و $y'' = 2e^x$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة $2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x = 0$.

(ب) لنشتق $y' = 3x$ مرتين فنحصل على $y' = 3$ و $y'' = 0$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة $0(1-x) + 3x - 3x = 0$.

(ج) لنشتق $y = C_1 e^x + C_2 x$ مرتين فنحصل على $y' = C_1 e^x + C_2$ ، $y'' = C_1 e^x$ ، ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة $C_1 e^x(1-x) + (C_1 e^x + C_2)x - (C_1 e^x + C_2 x) = 0$.

إن الحل (ج) هو الحل العام للمعادلة التفاضلية لأنه يحقق المعادلة ويحتوى العدد الصحيح من الثوابت الاختيارية الأساسية . أما الحلان (أ) و (ب) فيسميان حلين خاصين لأنه يمكن الحصول على كل منهما بإعطاء قيم خاصة للثوابت الاختيارية .

٢ - شكل المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو :

$$y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3 \quad (ب) \quad \text{و} \quad y = Cx^2 - x \quad (أ)$$

(أ) لنشتق $y = Cx^2 - x$ مرة فنحصل على $y' = 2Cx - 1$ وبحل المعادلة بالنسبة لـ C نجد أن $C = \frac{1}{2} \left(\frac{y' + 1}{x} \right)$ وبالتعويض في العلاقة المفروضة (الحل العام) نحصل على $y = \frac{1}{2} \left(\frac{y' + 1}{x} \right) x^2 - x$ أو $y' x = 2y + x$.

(ب) لنشتق $y' = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$ ثلاث مرات فنحصل على $y'' = 3C_1 x^2 + C_2$ ، $y''' = 6C_1 x$ ، $y^{(4)} = 6C_1$ ومنه نجد أن $y''' = x y^{(4)}$ هي المعادلة المطلوبة . لاحظ أن العلاقة المفروضة هي حل للمعادلة $y^{(4)} = 0$ ولكنها ليست حلا عاما لأنها لا تحتوى سوى ثلاثة ثوابت اختيارية .

٣ - شكل المعادلة التفاضلية لجميع القطاعات المكافئة التي ينطبق محورها على المحور x .

إن لمجموعة القطاعات المكافئة المعادلة $y^2 = Ax + B$ حيث A و B ثابتان اختياريان . لنشتق مرتين فنحصل على $2yy' = A$ و $2yy'' + 2y'^2 = 0$. والمعادلة $2yy'' + 2y'^2 = 0$ هي المعادلة المطلوبة .

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{xy^2(1+x^2)} = 0. \quad \text{4 - حل المعادلة}$$

نكتب المعادلة بالشكل $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0$ أو بالشكل $\frac{y^2}{1+y^2}dy + \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$ المتغيرات قابلة للفصل . إذن

$$\begin{aligned} \frac{y^2 dy}{1+y^2} + \frac{dx}{x} - \frac{x dx}{1+x^2} &= 0, \\ \frac{1}{3} \ln |1+y^2| + \ln |x| - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) &= c, \\ 2 \ln |1+y^2| + 6 \ln |x| - 3 \ln (1+x^2) &= 6c, \\ \ln \frac{x^6(1+y^2)^2}{(1+x^2)^3} &= 6c \quad , \quad \frac{x^6(1+y^2)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C. \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}. \quad \text{5 - حل المعادلة}$$

لدينا الآن $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ ومنه $\arctan y = \arctan x + \arctan C$ إذن

$$y = \tan (\arctan x + \arctan C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}. \quad \text{6 - حل المعادلة}$$

$$\tan y = -\cot x + C \quad , \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\sin^2 x}, \quad \sec^2 y dy = \csc^2 x dx,$$

$$2xy dy = (x^2 - y^2) dx. \quad \text{7 - حل المعادلة}$$

إن المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وإذا أجرينا التحويل $y = vx$ نجد $dy = vdx + x dv$ وتصبح المعادلة

$$\frac{2v dv}{1-3v^2} = \frac{dx}{x}, \quad \text{أو} \quad 2x \cdot vx (v dx + x dv) = (x^2 - v^2 x^2) dx$$

$$C' |x^3(1-3v^2)| = 1. \quad \text{أو} \quad -\frac{1}{3} \ln |1-3v^2| = \ln |x| + \ln c, \quad \ln |1-3v^2| + 3 \ln |x| + \ln C' = 0 \quad \text{ومن}$$

$$C(x^3 - 3xy^2) = 1. \quad \text{نجد} \quad v = y/x, \quad \text{استخدام} \quad \pm C' x^3(1-3v^2) = Cx^3(1-3v^2) = 1 \quad \text{وأخيرا}$$

$$x \sin \frac{y}{x} (y dx + x dy) + y \cos \frac{y}{x} (x dy - y dx) = 0. \quad \text{8 - حل المعادلة}$$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وإذا أجريت التحويل $y = vx$ فإن $dy = vdx + x dv$ وتصبح

$$\begin{aligned} x \sin v (vx dx + x^2 dv + vx dx) + vx \cos v (x^2 dv + vx dx - vx dx) &= 0 \\ \sin v (2v dx + x dv) + xv \cos v dv &= 0, \quad \frac{\sin v + v \cos v}{v \sin v} dv + 2 \frac{dx}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$xy \sin \frac{y}{x} = C. \quad \text{وبالتالي} \quad \ln |v \sin v| + 2 \ln |x| = \ln C', \quad x^2 \cdot v \cdot \sin v = C, \quad \text{إذن}$$

$$9 - \text{حل المعادلة } (1 - 2v^2)(v dx + x dv) + 2v dx = 0,$$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وتؤول بعد إجراء التحويل النموذجي إلى :

$$\frac{1 - 2v^2}{v(3 - 2v^2)} dv + \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{dv}{3v} - \frac{4v dv}{3(3 - 2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{1}{3} \ln |v| + \frac{1}{3} \ln |3 - 2v^2| + \ln |x| = \ln c, \quad \ln |v| + \ln |3 - 2v^2| + 3 \ln |x| = \ln C'$$

$$\text{ومن ثم } vx^3(3 - 2v^2) = C. \quad \text{وبالتالي } y(3x^2 - 2y^2) = C.$$

$$10 - \text{حل المعادلة } (x^3 + y) dx + (y^3 + x) dy = 0.$$

$$\text{لتكامل } x^3 dx + (y dx + x dy) + y^3 dy = 0, \quad \text{حدا حدا فنحصل على : } \frac{x^4}{4} + xy + \frac{y^4}{4} = C.$$

$$11 - \text{حل المعادلة } (x + e^{-x} \sin y) dx - (y + e^{-x} \cos y) dy = 0.$$

$$\text{لتكامل } x dx - y dy - (e^{-x} \cos y dy - e^{-x} \sin y dx) = 0, \quad \text{حدا حدا فنحصل على}$$

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 - e^{-x} \sin y = C$$

$$12 - \text{حل المعادلة } x dy - y dx = 2x^2 dx.$$

إن التركيب $xdy - ydx$ يوحى إلينا بالعلاقة $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$. لذا نضرب المعادلة المفروضة

$$\text{بـ } \xi(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{فنجد } \frac{xdy - ydx}{x^2} = 2x dx, \quad \text{وبالتالي } \frac{y}{x} = x^2 + C \quad \text{أو } y = x^3 + Cx.$$

$$13 - \text{حل المعادلة } x dy + y dx = 2x^2 y dx.$$

إن التركيب $xdy + ydx$ يوحى إلينا بالعلاقة $d(\ln xy) = \frac{x dy + y dx}{xy}$. لذا نضرب المعادلة المفروضة بـ

$$\ln |xy| = x^2 + C. \quad \text{ومن ثم } \frac{xdy + ydx}{xy} = 2x dx \quad \text{فنجد } \xi(x, y) = \frac{1}{xy},$$

$$14 - \text{حل المعادلة } x dy + (3y - e^x) dx = 0.$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\xi(x) = x^2$ فنحصل على $x^3 dy + 3x^2 y dx = x^2 e^x dx$.

$$\text{ومن ثم } x^3 y = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

$$15 - \text{حل المعادلة } \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 6x^2.$$

$$\text{هنا } P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ومن ثم } \int P(x) dx = \ln x^2, \quad \text{وبالتالي } \xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2.$$

لذا نضرب المعادلة المفروضة بـ $\xi(x) = x^2$ فنحصل على $x^2 dy + 2xy dx = 6x^3 dx$ ومن ثم $x^3 y = x^6 + C$.

ملاحظة ١ : إن الحدود الواقعة في الطرف الأيسر من المعادلة بعد ضربها بالعامل التكامل تشكل تركيباً قابلاً للمكاملة.

ملاحظة ٢ - ليس العامل التكامل لمعادلة مفروضة جيدا ، في المسألة الحالية نجد أن الخ و $x^2, 3x^2, \frac{1}{2}x^2$ جميعها عوامل تكاملية ، ولذلك فإننا نختار أبسط التكاملات الخاصة لـ $P(x) dx$ بدلا من أن نختار التكامل العام

$$\ln x^2 + \ln C = \ln Cx^2.$$

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = \sec x. \quad \text{١٦- حل المعادلة}$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \csc x, \quad \int P(x) dx = \int \cot x dx = \ln |\sin x| \quad \text{بما أن}$$

$$\xi(x) = e^{\ln |\sin x|} = |\sin x|. \quad \text{وبالتالي}$$

$$\sin x \left(\frac{dy}{dx} + y \cot x \right) = \sin x \csc x, \quad \sin x dy + y \cos x dx = dx, \quad \text{ومن ثم}$$

$$y \sin x = x + C. \quad \text{ومن}$$

$$\frac{dy}{dx} - xy = x. \quad \text{١٧- حل المعادلة}$$

$$\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad \text{وبالتالي} \quad \int P(x) dx = -\frac{1}{2}x^2, \quad \text{هنا } P(x) = -x$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} dy - xye^{-\frac{1}{2}x^2} dx = xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C, \quad \text{إذن}$$

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1. \quad \text{ومن}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^2. \quad \text{١٨- حل المعادلة}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \quad \text{حيث } n = 2 \quad \text{إن المعادلة من الشكل}$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} = x. \quad \text{نستخدم التعويض } y^{-1} = y^{-1} = z, \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}. \quad \text{(نكتب المعادلة للسهولة بالشكل)}$$

$$\frac{dz}{dx} - z = -x. \quad \text{أو} \quad -\frac{dz}{dx} + z = x \quad \text{ومن}$$

$$e^{-x} dz - ze^{-x} dx = -xe^{-x} dx \quad \text{إذن} \quad \xi(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x} = e^{-x}. \quad \text{والعامل التكامل هو}$$

$$\frac{1}{y} = x + 1 + Ce^x. \quad \text{وبما أن } z = y^{-1} \text{ فإنه يكون أخيرا: } ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C.$$

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x. \quad \text{١٩- حل المعادلة}$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} \tan x = \sec x. \quad \text{نكتب المعادلة بالشكل}$$

$$\frac{dz}{dx} - 2z \tan x = -2 \sec x. \quad \text{ونأخذ المعادلة الشكل} \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} \quad \text{نستخدم التعويض } y^{-2} = z \text{ فيكون}$$

$$\xi(x) = e^{\int -2 \tan x dx} = \cos^2 x. \quad \text{إن العامل التكامل هو}$$

$$\cos^2 x dz - 2z \cos x \sin x dx = -2 \cos x dx, \quad z \cos^2 x = -2 \sin x + C,$$

$$\frac{\cos^2 x}{y^2} = -2 \sin x + C. \quad \text{ومن}$$

٢٠ - أطلقت رصاصة على كومة رمل . فإذا فرضنا أن تباطؤها يساوى الجذر التربيعى لسرعة اختراقها فإل متى تدخل فى الرمل قبل أن تتوقف إذا فرضنا أن سرعتها عند دخول الكومة تساوى 49 ms^{-1} م .
لتكن v سرعة الرصاصة بعد t ثانية من اصطدامها بالكومة .

$$\text{عندئذ يكون التباطؤ } -\frac{dv}{dt} = \sqrt{v} \text{ ومنه } \frac{dv}{\sqrt{v}} = -dt \text{ أى } 2\sqrt{v} = -t + C$$

$$\text{عندما } t = 0, v = 49, C = 2\sqrt{49} = 14 \text{ . وعلى هذا فإن } 2\sqrt{v} = -t + 14$$

وهذا هو القانون الذى يحكم حركة الرصاصة . فإذا جعلنا $v = 0$ نجد $t = 14$ والرصاصة تتقدم مدة 14 sec قبل أن تقف .

٢١ - يحتوى خزان 400 litres من الماء المالح مذاب فيها 100 kg من الملح فإذا انساب فيه ماء يحتوى $\frac{1}{8} \text{ kg}$ من الملح فى كل لتر بمعدل 12 litres/minute وجعلنا المزيج متجانسا بالتحريك الدائم وتركنا هذا المزيج ينسكب من الخزان بالمعدل السابق ذاته ، فما هى كمية الملح الموجودة فى الخزان بعد 90 minutes .

لنرمز بـ q لوزن الملح بالكيلوجرامات ، الموجودة فى الخزان فى نهاية اللحظة $t \text{ minutes}$. عندئذ يكون $\frac{dq}{dt}$ معدل تغير كمية الملح فى اللحظة t .

وبما أنه يدخل إلى الخزان خلال دقيقة واحدة $\frac{1}{2} \text{ kg}$ من الملح ويخرج $0.03q \text{ kg}$ فإن $\frac{dq}{dt} = 1.5 - 0.03q$

$$\text{ومنه } \frac{dq}{1.5 - 0.03q} = dt, \text{ وبالتالى } \frac{\ln(0.03q - 1.5)}{0.03} = -t + C.$$

$$\text{ولكن عند اللحظة } t = 0 \text{ فإن } q = 100 \text{ إذن } C = \frac{\ln 1.5}{0.03}$$

$$\text{وبالتالى } \ln(0.03q - 1.5) = -0.03t + \ln 1.5, 0.02q - 1 = e^{-0.03t}$$

$$\text{ومنه } q = 50 + 50e^{-0.03t} \text{ وعندما } t = 90 \text{ فنجد : } q = 50 + 50e^{-2.7} = 53.36 \text{ kg.}$$

٢٢ - يتحول سكر القصب فى الماء ، تحت شروط معينة ، إلى سكر العنب بمعدل يتناسب مع الكمية غير المحولة فى كل لحظة . فإذا تحول 8 grams من أصل 75 grams كانت موجودة عند اللحظة $t = 0$ ، وذلك خلال 30 minutes الأولى فأوجد الكمية المتحولة خلال $1 \frac{1}{2} \text{ hours}$.

لنرمز بـ q للكمية المحولة خلال $t \text{ minutes}$.

$$\text{عندئذ } \frac{dq}{dt} = k(75 - q) \text{ ومنه } \frac{dq}{75 - q} = k dt \text{ وبالتالى } (75 - q) = -kt + C$$

$$\text{عندما } t = 0 \text{ كانت } q = 8 \text{ ومنه } C = \ln 75 \text{ إذن } \ln(75 - q) = -kt + \ln 75.$$

$$\text{وعندما أصبحت } t = 30 \text{ كانت } q = 8 \text{ ومنه } 30k = \ln 75 - \ln 67 \text{ و } k = .0038 \text{ إذن } q = 75(1 - e^{-0.0038t})$$

$$\text{وعلى هذا إذا وضعنا } t = 90 \text{ نجد : } q = 75(1 - e^{-.34}) = 21.6 \text{ grams}$$

مسائل إضافية

٢٣ - أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$$\begin{aligned} (أ) \quad y &= C_1 + C_2x + C_3x^2 & (ب) \quad y &= Cx^2 + 1 & (ج) \quad y &= Cx^2 + C^2 & (د) \quad y &= C^2x + C \\ (هـ) \quad y &= C_1e^x + C_2e^{2x} & (و) \quad xy &= x^3 - C & (ز) \quad y &= C_1 \sin x + C_2 \cos x & (ح) \quad y &= C_1e^x \cos(3x + C_2) \end{aligned}$$

ح (١) $xy' = 2(y-1)$ (ج) $4x^2y = 2x^2y' + (y')^2$ (د) $xy' + y = 3x^2$ (هـ) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (و) $y'' - 2y' + 10y = 0$ (ز) $y''' = 0$ (ح) $y'' + y = 0$

٢٤ - حل المعادلات التفاضلية :

$y^2 = 4x^2 + C$: ج	$y dy - 4x dx = 0$	(١)
$2y^3 = 3x^6 + C$: ج	$y^2 dy - 3x^3 dx = 0$	(ب)
$x^2 - xy + 2y = Cx^2y$: ج	$x^2y' = y^2(x-4)$	(ج)
$xy - y^2 + 2x^2 = C$: ج	$(x-2y) dy + (y+4x) dx = 0$	(د)
$y^2 + \ln y = x^3 + C$: ج	$(2y^2+1)y' = 3x^2y$	(هـ)
$\ln xy = x + 2y + C$: ج	$xy'(2y-1) = y(1-x)$	(و)
$x^2 - y^2 = Cx$: ج	$(x^2+y^2) dx = 2xy dy$	(ز)
$x^2 - 2xy - y^2 = C$: ج	$(x+y) dy = (x-y) dx$	(ح)
$y = Ce^{-y/x}$: ج	$x(x+y) dy - y^2 dx = 0$	(ط)
$e^{y/x} + \ln Cx = 0$: ج	$x dy - y dx + xe^{-y/x} dx = 0$	(ى)
$y = (Ce^x - 1)e^{2x}$: ج	$dy = (3y + e^{2x}) dx$	(ك)
$2x^3y^3 = 3x^2 + C$: ج	$x^2y^2 dy = (1-xy^3) dx$	(ل)

٢٥ - يقابل المستقيم المماس والمستقيم العمودى لمنحنى عند النقطة $P(x, y)$ المحاور x في N و T على الترتيب المحاور y في S و M على الترتيب .

أوجد مجموعة المنحنيات التي تحقق الشرط

ج : (١) $TP = PS$ ، (ب) $NM = MP$ ، (ج) $TP = OP$ ، (د) $NP = OP$ ، (١) $xy = C$ ، (ب) $2x^2 + y^2 = C$ ، (ج) $xy = c, y = Cx$ ، (د) $x^2 \pm y^2 = C$.

٢٦ - حل المسألة ٢١ بفرض أن ماء نقيا ينسكب في الخزان بمعدل 12 litres/minute ويتدفق المزاج منه بالمعدل ذاته.

ج : 6.72 kg .

٢٧ - حل المسألة ٢٦ بفرض أن المزاج يتدفق من الخزان بمعدل 16 litres/minute .

إرشاد : $dq = - \frac{4q}{100-t} dt$ ج : 0.01 kg .

الفصل السبعون

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

اعتبر الأنواع التالية من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية :

$$\text{انظر المسألة ١} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad (١)$$

$$\text{انظر المسألتين ٢ - ٣} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (٢)$$

$$\text{انظر المسألتين ٤ - ٥} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \quad (٣)$$

$$\text{حيث } P \text{ و } Q \text{ ثابتان أو } R \text{ فهو إما ثابت أو دالة في } x \text{ فقط.} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R, \quad (٤)$$

إذا كان للمعادلة $m^2 + Pm + Q = 0$ جذران مختلفان m_1 و m_2 فإن $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ هو الحل العام للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$ أما إذا كان الجذران متطابقين فإن الحل العام هو $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$ يسمى الحل العام للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$ الدالة المتسمة للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R(x)$. وإذا حقق الشرط $y = f(x)$ المعادلة الأخيرة فإن الحل العام لهذه المعادلة يساوي مجموع الدالة المتسمة مع $f(x)$.

مسائل محلولة

$$١ - \text{حل المعادلة} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x.$$

$$\text{هنا} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x, \quad \text{إذن} \quad \frac{dy}{dx} = \int (xe^x + \cos x) dx = xe^x - e^x + \sin x + C_1, \quad \text{ومن ثم}$$

$$y = xe^x - 2e^x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$٢ - \text{حل المعادلة} \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = a.$$

$$\text{لنضع } p = \frac{dy}{dx} \text{ فيكون } \frac{dp}{dx} = \frac{dy^2}{dx^2} \text{ وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل } x^2 \frac{dp}{dx} + xp = a \text{ أو } x dp + p dx = \frac{a}{x} dx.$$

$$\text{ومن ثم، } dy = a \ln |x| \frac{dx}{x} + C_1 \frac{dx}{x}, \quad x p = a \ln |x| + C_1, \quad \text{و } y = \frac{1}{2} a \ln^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2.$$

٣- حل المعادلة $xy'' + y' + x = 0$.

لنضع $P = \frac{dy}{dx}$ فيكون $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$x dp + p dx = -x dx \quad \text{أو} \quad x \frac{dp}{dx} + p + x = 0$$

وبالتكامل نجد $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{C_1}{x}$, $xp = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$, وأخيرا $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 \ln|x| + C_2$.

٤- حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$.

بما أن $\frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$ فإننا نضرب المعادلة المفروضة في $2y'$ فنحصل على :

$$2y'y'' = 4yy', \quad y'^2 = 4 \int yy' dx = 4 \int y dy = 2y^2 + C_1$$

ومنه $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}$, $\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx$, $\ln|\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}x + \ln C_2$

وأخيرا $\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x}$

٥- حل المعادلة $y'' = -1/y^3$

لنضرب المعادلة في $2y'$ فنحصل على $2y'y'' = -\frac{2y'}{y^3}$ ومنه :

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}, \quad \frac{y dy}{\sqrt{1+C_1y^2}} = dx, \quad \sqrt{1+C_1y^2} = C_2x + C_3$$

وأخيرا $(C_2x + C_3)^2 - C_1y^2 = 1$

٦- حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$.

هنا $m^2 + 3m - 4 = 0$ و $m = 1, -4$ والحل العام هو $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

٧- حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$.

هنا $m^2 + 3m = 0$ و $m = 0, -3$ والحل العام هو $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

٨- حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$.

هنا $m^2 - 4m + 13 = 0$ والجذران هما $m_1 = 2 + 3i, m_2 = 2 - 3i$ والحل العام هو

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x} = e^{2x} (C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

وبما أن $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$, فإن $e^{-3ix} = \cos 3x - i \sin 3x$, $e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$

وبالتالي يمكن وضع الحل بالشكل

$$\begin{aligned} y &= e^{2x} \{C_1 (\cos 3x + i \sin 3x) + C_2 (\cos 3x - i \sin 3x)\} \\ &= e^{2x} \{(C_1 + C_2) \cos 3x + i(C_1 - C_2) \sin 3x\} \\ &= e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) \end{aligned}$$

$$9 - \text{حل المعادلة } \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

هنا $m^2 - 4m + 4 = 0$ و $m = 2, 2$ والحل العام هو $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

$$10 - \text{حل المعادلة } \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2.$$

إن الدالة المتبعة ، استنادا إلى المسألة ٦ ، هي $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

لإيجاد تكامل خاص للمعادلة نلاحظ أن الطرف الأيمن هو $R(x) = x^2$ ولهذا الشكل الطرف الأيمن فإننا نقترح حلا خاصا يحتوي حدا ب x^2 وربما حدودا أخرى تنتج بالاشتقاق المتتالي.

سنفرض أن الحل الخاص من الشكل $y = Ax^2 + Bx + C$ حيث A, B, C ثوابت ينبغي تعيينها ، لنفرض $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$,

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \quad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

وبما أن هذه متطابقة في x فإن $-4A = 1$, $6A - 4B = 0$, $2A + 3B - 4C = 0$.

ومنه $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = -\frac{13}{32}$ والحل الخاص هو $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$.

والحل العام إذن هو : $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$.

$$11 - \text{حل المعادلة } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x.$$

هنا $m^2 - 2m - 3 = 0$ والجذران هما $m = -1, 3$ والدالة المتبعة هي $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ وللحل الخاص

فن الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية نقترح الحل الخاص من الشكل $A \cos x + B \sin x$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية بـ $y = A \cos x + B \sin x$, $y' = -A \sin x + B \cos x$, $y'' = -A \cos x - B \sin x$ فنحصل على

$$(-A \cos x - B \sin x) - 2(B \cos x - A \sin x) - 3(A \cos x + B \sin x) = \cos x$$

$$-2(2A + B) \cos x + 2(A - 2B) \sin x = \cos x$$

ومنه $-2(2A + B) = 1$, $A - 2B = 0$ وبالتالي $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{10}$.

والحل العام هو : $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$.

١٢ - علق وزن بزنبرك يتحرك لأعلى ولأسفل . والمعادلة التفاضلية لهذه الحركة هي $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$ حيث s

هو مط الزنبرك عند اللحظة t

فإذا كان $s = 2$ و $\frac{ds}{dt} = 1$ في اللحظة $t = 0$ فأوجد s بدلالة t .

هنا $m^2 + 16 = 0$ و $m = \pm 4i$ والحل العام هو $s = A \cos 4t + B \sin 4t$.

وعند $t = 0$ فإن $s = 2 = A$ ومنه $s = 2 \cos 4t + B \sin 4t$.

وعند $t = 0$ فإن $ds/dt = 1 = -8 \sin 4t + 4B \cos 4t = 4B$ ومنه $B = 1/4$.

والحل المطلوب هو : $s = 2 \cos 4t + \frac{1}{4} \sin 4t$.

١٣ - لنفرض أن التيار الكهربائي في دائرة معينة يعطى $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2504I = 110$. فإذا فرض أن

$I = 0$ و $\frac{dI}{dt} = 0$ عندما $t = 0$ فأوجد I بدلالة t .

هنا $m^2 + 4m + 2504 = 0$ ومنه $m = -2 + 50i, -2 - 50i$ والدالة المتممة هي $e^{-2t}(A \cos 50t + B \sin 50t)$.

والمعادلة الحل الخاص $I = 110/2504 = .044$.

والحل العام هو $I = e^{-2t}(A \cos 50t + B \sin 50t) + .044$.

وعند $t = 0$ يكون $I = 0 = A + .044$ ومنه $A = -.044$.

كذلك عندما $t = 0$ يكون $\frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t} [(-2A + 50B) \cos 50t - (2B + 50A) \sin 50t] = -2A + 50B$.

ومنه $B = -.0018$ والملاقة المطلوبة هي : $I = -e^{-2t}(0.044 \cos 50t + 0.0018 \sin 50t) + 0.044$.

١٤ - نزلق سلسلة طولها 4 m من سقف منبسط مبدئية من وضع تكون فيه قطعة من السلسلة طولها 1 m مدلاة من طرف السقف . أوجد بإهمال الاحتكاك (أ) سرعة انزلاق السلسلة عندما تنفصل عن السقف (ب) الزمن اللازم لذلك .

لنرمز بـ s لطول جزء السلسلة المتدل من طرف السقف في اللحظة t .

(أ) إن القوة التي تسبب إنزلاق السلسلة من على السطح هو وزن الجزء المتدل وبما أن القوة تساوى حاصل ضرب

الكتلة في العجلة فإن $ms'' = \frac{1}{4}mgs$ ومنه $s'' = \frac{1}{4}gs$

وبالتالى $2s's'' = \frac{1}{2}gss'$ بالتكامل نجد $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + C_1$

وفي اللحظة $t = 0$ يكون $s = 1, s' = 0$ إذن $C_1 = -\frac{1}{4}g$ و $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}\sqrt{s^2-1}$.

وعندما يصبح $s = 4$ يكون $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$ ms⁻¹

(ب) إن $\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g} dt$ ومنه $\ln|s + \sqrt{s^2-1}| = \frac{1}{2}\sqrt{g}t + C_2$

وبما أن $s = 1$ عندما $t = 0$ فإن $C_2 = 0$ وبالتالى $\ln(s + \sqrt{s^2-1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}t$.

وإذا وضعنا $s = 4$ نجد : $t = \frac{2}{\sqrt{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$

١٥ - زورق كتلته 750 kg وسرعته عندما يتوقف محركه (في اللحظة $t = 0$) تساوى 6 ms⁻¹ . فإذا

فرضنا أن مقاومة الماء متناسبة مع سرعة الزورق وأنها 900 N عند اللحظة $t = 0$. فإلى المسافة التي يقطعها الزورق إلى أن تصبح سرعته 1.5 ms⁻¹ .

لنرمز بـ s للمسافة التي يقطعها الزورق بعد t sec بعد توقف المحرك .

$ms'' = -ks'$ أو $s'' = -ks'$

لتعيين k نلاحظ أن $s' = 6$ عندما $t = 0$ وأن s'' تساوى $\frac{\text{القوة}}{\text{الكتلة}}$ أى أنها تساوى $-\frac{900}{750}$ ومنه $k = 1/s$

وعلى هذا فإن $s'' = \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{5}$ وبالتكامل نجد $\ln v = -\frac{1}{5}t + C_1$ أى أن $v = C_1 e^{-t/5}$.

وعندما $t = 0$ فإن $v = 6$. إذن $v = \frac{ds}{dt} = 6e^{-t/5}$ و $C_1 = 6$

ومنه $s = -30e^{-t/5} + C_2$

وعند $t = 0$ فإن $s = 0$ و $C_2 = 30$ و $s = 30(1 - e^{-t/5})$.

وأخيرا عند $v = 1.5 = 6e^{-t/5}$ يكون : $s = 30(1 - \frac{1}{4}) = 22.5$

مسائل إضافية

$y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$	- ١٦
$y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$: ج	$e^{2x} \frac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$	- ١٧
$y = \sin 3x + C_1x + C_2$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} = -9 \sin 3x$	- ١٨
$y = x^3 + C_1x^4 + C_2$: ج	$x \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 4x = 0$	- ١٩
$y = x^3/3 + C_1e^x + C_2$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^3$	- ٢٠
$y = x^4 + C_1x^3 + C_2$: ج	$x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$	- ٢١
$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$	- ٢٢
$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$	- ٢٣
$y = C_1 + C_2e^x$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$	- ٢٤
$y = C_1xe^x + C_2e^x$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$	- ٢٥
$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$	- ٢٦
$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$	- ٢٧
$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$	- ٢٨
$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 2x + 5$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$	- ٢٩
$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + e^{2x}/13$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{2x}$	- ٣٠
$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{2x} + \frac{x}{9} + \frac{2}{27}$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$	- ٣١
$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x$: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2 \sin 2x$	- ٣٢

٣٣ - يتحرك جسم كتلته m في وسط تتناسب مقاومته مع سرعة الجسم . فإذا كان هذا الجسم يخضع كذلك إلى قوة جذب متناسبة مع الإزاحة فأوجد معادلة الحركة إذا كان $s = 0$ و $s' = v_0$ عند اللحظة $t = 0$

إرشاد : هنا $m \frac{d^2s}{dt^2} = -k_1 \frac{ds}{dt} - k_2s$ أو $\frac{d^2s}{dt^2} + 2b \frac{ds}{dt} + c^2s = 0$ بفرض $b > 0$

$$s = v_0 t e^{-bt}$$

ج : إذا كان $b^2 = c^2$ فإن

$$s = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}} e^{-bt} \sin \sqrt{c^2 - b^2} t$$

وإذا كان $b^2 < c^2$ فإن

$$s = \frac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}} (e^{(-b + \sqrt{b^2 - c^2})t} - e^{(-b - \sqrt{b^2 - c^2})t})$$

أما إذا كان $b^2 > c^2$ فإن

CALCULUS

Glossary

Chapter 1

Variable
Function
Set
Real
Real number
Rational
Rational number
Common fraction
Integer
Irrational number
Imaginary number
Absolute
Number scale
Finite Interval
Open interval
End point
Closed interval
Infinite interval
Inequalities
Dependent variable
Independent variable
Single - valued
Multi - valued
Double - valued
Domain of definition
Sequence
Deleted- neighbourhood

المصطلحات

الفصل الاول

متغير
دالة
مجموعة
حقيقي
عدد حقيقي
قياسي
عدد قياسي
كسر عادي
صحیح
عدد غير قياسي
عدد تخيل
مطلق
سلم عددي
فترة محددة
فترة مفتوحة
نقطة نهاية
فترة منغلقة
فترة غير محددة
متباينات
متغير مستقل
متغير غير مستقل
وحيد القيمة
متعدد القيمة
ثنائي القيمة
حيز (مجال) التعريف
متتابعة
جوار محذوف

Chapter 2

Limit
Exist
Infinity
Statement

الفصل الثاني

نهاية
موجود
اللانهاية
تعبير

Chapter 3

Continuous function
Discontinuous function
Polynomial
Denominator
Numerator

الفصل الثالث

دالة متصلة
دالة غير متصلة (منقطعة)
متعدد حدود
مقام
بسط

Chapter 4

Derivative
Increment
Instantaneous
Instantaneous rate of change

الفصل الرابع

مشتقة
تزايد
لحظي
معدل التغير اللحظي

Chapter 5

Algebraic function
Inverse function
Function of a function
Higher derivative

الفصل الخامس

دالة جبرية
دالة عكسية
دالة الدالة
مشتقات عليا

Chapter 6

Implicit differentiation
Implicit function

الفصل السادس

اشتقاق ضمني
دالة ضمنية

Chapter 7

Tangent
Normal
Angle of intersection
Subtangent
Subnormal

الفصل السابع

مماس
عمود
زاوية تقاطع
تحت المماس
تحت العمود

Chapter 8

Increasing function
Decreasing function

الفصل الثامن

دالة متزايدة
دالة متناقصة

Stationary function	دالة مستقرة
Bending	انحناء
Inflection	انعطاف
Chapter 9	الفصل التاسع
Chapter 10	الفصل العاشر
Rectilinear motion	الحركة المستقيمة
Circular motion	الحركة الدائرية
Acceleration	تسارع (عجلة)
Angular velocity	سرعة زاوية
Angular acceleration	تسارع زاوى
Chapter 11	الفصل الحادى عشر
Related rates	المعدلات المتعلقة ببعضها
Chapter 12	الفصل الثانى عشر
Trigonometric function	دوال مثلثية
Radian measure	المقياس الدائرى
sin	حـا
cos	حـتا
tan	طـا
sec	قـا
Cosec	قـحـا
Cotan	طـحـا
Chapter 13	الفصل الثالث عشر
Inverse trigonometric functions	دوال مثلثية مكية
Chapter 14	الفصل الرابع عشر
Exponential function	دالة أسية
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Chapter 15	الفصل الخامس عشر
Hyperbolic function	دالة زائدية
Inverse hyperbolic function	دالة زائدية مكية
Chapter 16	الفصل السادس عشر
Parametric equations	معادلات بارامترية

Chapter 17

Curvature
Radius of curvature
Circle of curvature
Evolute

Chapter 18

Plane vectors
Scalar
Speed
Scalar or Dot product

Chapter 19

Curvilinear motion

Chapter 20

Polar coordinates
Angle of inclination
Angle of intersection
Cardioid

Chapter 21

The law of the Mean
Generalized law
Extended law

Chapter 22

Indeterminate

Chapter 23**Chapter 24**

Curve Tracing
Extent
Asymtotes
Singular point
Node
Cusp
Tacnode
Isolated point

الفصل السابع عشر

انحناء (تقوس)
نصف قطر الانحناء
دائرة الانحناء
منشئ

الفصل الثامن عشر

متجهات مستوية
عددي
سرعة قياسية
ضرب عددي أو قياسي

الفصل التاسع عشر

الحركة الخطية الانحنائية

الفصل العشرون

احداثيات قطبية
زاوية الميل
زاوية التقاطع
منحنى القلب

الفصل الحادي والعشرون

قانون القيمة المتوسط
قانون عام
قانون موسع

الفصل الثاني والعشرون

غير محدد

الفصل الثالث والعشرون**الفصل الرابع والعشرون**

رسم المنحنيات
حيز
خط (مستقيم) مقارب
نقطة مفردة
عقدة
ناب
عقدة تماس
نقطة منزلة

Chapter 25

Integration

Indefinite integral

Chapter 26

Integration by parts

Reduction formulas

Chapter 27

Identities

Chapter 28**Chapter 29**

Integration by partial fractions

Real coefficient

Rational fraction

Proper

Distinct linear factors

Repeated linear factors

Quadratic

Quadratic factor

Chapter 30**Chapter 31****Chapter 32**

Indefinite integrals

Orthogonal trajectories

Chapter 33

Definite integrals

Chapter 34

Slicing

Horizontal slicing

Vertical slicing

Parabola

Cycloid

Loop

الفصل الخامس والعشرون

تكامل

تكامل غير محدد

الفصل السادس والعشرون

تكامل بالتجزئة

صيغ الاختزال

الفصل السابع والعشرون

متطابقات

الفصل الثامن والعشرون**الفصل التاسع والعشرون**

تكامل بالكسور الجزئية

معامل حقيقى

دالة جذرية

حقيقى

معاملات خطية متمايزة

معاملات خطية متكررة

تربيعى

معامل تربيعى

الفصل الثلاثون**الفصل الحادى والثلاثون****الفصل الثانى والثلاثون**

تكامل غير محدد

مسارات متعامدة

الفصل الثالث والثلاثون

تكامل محدد (محدد)

الفصل الرابع والثلاثون

شريحة

شريحة أفقية

شريحة رأسية

قطع مكافئ

منحنى دويرى (سيكلويد)

عروة

Chapter 35	الفصل الخامس والثلاثون
Shell	قشرة
Chapter 36	الفصل السادس والثلاثون
Ellipse	قطع ناقص
Chapter 37	الفصل السابع والثلاثون
Centroid	مركز متوسط
Moment	عزم
Hypocycloid	منحنى دويرى تنحى
Chapter 38	الفصل الثامن والثلاثون
Moment of inertia	عزم القصور الذاتي
Radius of gyration	نصف قطر الدوران
Chapter 39	الفصل التاسع والثلاثون
Fluid pressure	ضغط السائل
Submerged	مغمور
Chapter 40	الفصل الأربعون
Work	شغل
Variable force	قوة متغيرة
Modulus of spring	معامل الزنبرك
Chapter 41	الفصل الحادى والأربعون
Length of arc	طول قوس
Curve of prusuit	منحنى المطاردة
Chapter 42	الفصل الثانى والأربعون
Chapter 43	الفصل الثالث والأربعون
Chapter 44	الفصل الرابع والأربعون
Limacon	منحنى ليماسون
Cardioid	منحنى القلب
Spiral of Archmides	حلزون أرشميدس
Chapter 45	الفصل الخامس والأربعون
Chapter 46	الفصل السادس والأربعون
Improper Integrals	تكاملات معتلة

Chapter 47

Sequence
Series
Converge
Convergent sequence
Divergent sequence

الفصل السابع والأربعون

متوالية
متسلسلة
متقارب
متوالية متقاربة
متوالية متباعدة

Chapter 48**الفصل الثامن والأربعون****Chapter 49**

Alternating Series
Absolute convergence
Conditional convergence

الفصل التاسع والأربعون

متسلسلة متناوبة
تقارب مطلق
تقارب مشروط

Chapter 50**الفصل الخمسون****Chapter 51**

Power series
Interval of convergence
Uniform convergence
Remainder

الفصل الحادي والخمسون

متسلسلة قوى
فترة التقارب
تقارب منتظم
الباق

Chapter 52**الفصل الثاني والخمسون**

Expansion

فك أو مفكوك

Chapter 53**الفصل الثالث والخمسون****Chapter 54****الفصل الرابع والخمسون****Chapter 55****الفصل الخامس والخمسون**

Trapezoidal
Prismoidal

شبه المنحرف
شبه المنشور

Chapter 56**الفصل السادس والخمسون**

Partial Derivatives
Implicit

مشتقات جزئية
ضمني

Chapter 57**الفصل السابع والخمسون**

Total differential
Total derivatives

تفاضلات كلية
مشتقات كلية

Chain rule

قاعدة السلسلة

Power

قدرة

Chapter 58**الفصل الثامن والخمسون**

Implicit functions

دوال ضمنية

Chapter 59**الفصل التاسع والخمسون****Chapter 60****الفصل الستون**

Directional derivatives

مشتقات متجهة

Gradient

تدرج

Direction numbers

أعداد اتجاه

Direction cosines

جيوب تمام الاتجاه

Chapter 61**الفصل الحادى والستون**

Analytic geometry

هندسة تحليلية

Triple scalar product

حاصل الضرب الثلاثى العدى

Triple vector product

حاصل الضرب المتجه الثلاثى

Chapter 62**الفصل الثانى والستون**

Osculating plane

مستوى ملاصق

Normal plane

مستوى عمودى

Rectifying plane

مستوى مقوم

Operator

مؤثر

Divergence

التفرق

Curl

الدوران

Line integral

تكامل خطى

Chapter 63**الفصل الثالث والستون**

Iterated integrals

تكاملات مكررة

Double integrals

تكامل ثنائى

Chapter 64**الفصل الرابع والستون****Chapter 65****الفصل الخامس والستون**

Octant

ثمان $\frac{1}{8}$

Paraboloid

مجسم القطع المكافئ

Chapter 66

Conc

Elliptic cylinder

Lemniscate

Chapter 67

Chapter 68

Chapter 69

Differential equation

Order

Degree

Integrating factor

Chapter 70

الفصل السادس والستون

مخروط

اسطوانة ناقصة المقطع

منحنى ذو عروتين

الفصل السابع والستون

الفصل الثامن والستون

الفصل التاسع والستون

معادلة تفاضلية

رتبة

درجة

عامل تكامل

الفصل السبعون

الفهرس

٦٨	في الحركة المستقيمة	١٢٧	احداثيات قطبية
	تفاضل		احتجار
١٥٠	تقريب بـ	٢٩١	التقارب بالجذر
١٤٩	تعريف	٢٨٤	المقارنة
٣٣٦	جزئي	٢٨٤	النسبة
٣٣٦	كلي	٢٩١	متعددة الحدود للتقارب
٣٨١	مؤثر		اشتقاق
	تقارب المتسلسلات	٣٢٩	جزئي
٢٩٢	المشروط	٤٣	ضمني
٢٩٢	المطلق	٨٧	الدوال الرأسية
٣٠٢	المنتظم	٣٦٠٣٥	الدوال الجبرية
	تقريبات	٩٤	الدوال الزائدية
١٥٠	بالتفاضل	٩٤	الدوال الزائدية العكسية
١٥٠	بالجذور	٨٧	الدوال اللوغاريتمية
١٣٨	بنظرية القيمة المتوسطة	٧٦	الدوال المثلثية
٥٤	تقعر	٨٣	الدوال المثلثية العكسية
	تكامل	٨٧	لوغاريتمي
٢٨٤	اختبار تقارب بـ	٣٣٦	اشتقاق كلي
١٧٢	بالتجزئة	١٢٩٠١٠٢	انحناء
١٩١٠١٨٣	بالتعويضات	٢٥٧٠٢٢٨	با بوس ، نظرية
٣٢٤	بالتقريب	٢٠٤	بلس ، نظرية
١٩٥	بالدوال الزائدية	٣١٦	تايلور ، صيغة
١٨٦	بالكسور الجزئية	٣٠٩	تايلور ، متسلسلة
٢٠٢	تعريف	٤٦	تحت العمود
٤١٥	ثلاثي	٤٦	تحت المماس
٣٩٢	ثنائي	٢٨١٠٣٥٦	تدرج
١٦٢	صيغة قياسية لـ	٢٨	تزايد
١٦٢	غير محدد		تسارع (عجلة)
١٩١	الدوال الجذرية للجيب وجيب التمام	١٢١	المركبة العمودية لـ
١٧٩	الدوال المثلثية	١٢١	المركبة المماسية لـ
٢٧٠	معتل	١٢٠	في الحركة الخطية الانحنائية

	متكرر	٤١٥٠٣٩٣	سرعة
٦٨	تكامل خطي	٣٨٣	في حركة خطية
١٢٠	تكامل محدود	٢٠٢	في حركة دائرية خطية
٦٨	حجم		سرعة زاوية وتسارع
٣٢٥	تحت سطح	٤٠٦	محمسون ، قاعدة
٢٤٥	مجم دوران	٢١٩	شغل
١٤٣	مساحة مقطع مستعرض معطى	٢٢٤	صيغ غير محددة
٢٤٠	معطى بالتكامل المتكرر	٤١٥٠٤٠٦	ضغط سائل
	حركة		طول قوس
٢٦٦٠٢٤٩	خطية انحنائية	١٢٩٠١٢٠	بالتكامل
١٢٩٠١٠٢	دائرية	٦٨	مشتقة لـ
٤٣٠	مستقيمة	٦٨	عامل تكامل
	خط عمودي لسطح	٣٤٩	عزم قصور ذاتي
٢٣٩	خط عمودي لمنحنى فراغي	٣٤٩	قطبي
٤١٥٠٢٣٤	خط عمودي لمنحنى مستوى		لحجم
٢٥٧	معادلة	٤٦	لسطح دوران
٢٥٧	طول	٤٦	لقوس
٤٠٠٠٢٣٤	دالة		لمساحة مستوية
	تعريف الـ	٣٢٩	عقدة
١٥٦	ضمنية	٣٤٥٠٤٣	عقدة تماس
١٥٦	عكسية	٣٥	عمليات بالمتسلسلات
٢٩٦	غير متصلة	٢٣	فترات
٢	متزايدة	٥٣	قاعدة السلسلة
	متصلة	٣٢٩٠٢٣	للمشتقات الجزئية
٣٣٦	متناقصة	٥٣	للمشتقات العادية
٣٦	دائرة		قاعدة شبه المنحرف
٣٢٤	انحناء	١٠٣	قاعدة شبه المنشور
٣٢٤	تلاصق	١٠٣	قاعدة لوبيتال
١٤٣	دوال زائدية	٩٤	قانون القيمة المتوسطة
١٣٧٠١٣٦	تفاضل الـ	٩٤	قوة ، الشغل المبذول بـ
٢٤٥	تكامل الـ	١٩٥	قيمة متوسطة
٢١٨	عكسية	٩٤	قيمة مطلقة
١	دوران	٣٨٢	كتلة
٤٢٥٠٢٢٧	رسم منحنى	١٥٤	كسور جزئية
١٨٦	رول ، نظرية	١٣٦	لانهاية
١٢	زاوية		لوبيتال ، قاعدة
١٤٣	بين منحنين	١٢٨٠٤٦	ماكولورين ، صيغة
٣١٦	بين نصف قطر متجه ومماس	١٢٧	

٣٠٩	متسلسلة ماكلورين	٢	متباينات
٢٩٢	متسلسلة متناوية	٢٧٨٤ ٣	متتابعات لا نهاية
	متغيرات		متجه (متجهات)
٤٣٠	فصل الـ	٣٧٨٤١١٢	اشتقاق
٢	مدى الـ	٣٨٢	تقارب الـ
٢٤٣	مخاور متوازية ، نظرية	٣٨٣	تكامل الـ
٢	مدى متغير	٣٦٤٤١١٠	جمع
	مركبات	٣٦٥	جيوب تمام الـ
١٢١	للتسارع	٣٦٧	حاصل الضرب الثلاثى العدى
١٢٠	للسرعة	٣٦٨	حاصل الضرب الثلاثى المتجه
١١٠٤١٠٩	لمتجه	٣٦٤٤١١٢	حاصل الضرب العدى
١٠٣	مركز الانحناء	٣٦٦	حاصل الضرب المتجه
	مركز متوسط	٣٨٢	دوران
٤١٥٤٢٢٧	لحجم	١٢٠	عجلة
٢٥٧	لسطح دورانى	٣٦٤	فراغ
٢٦٦٤٢٥٧	لقوس	٣٦٤٤١١٠	ليمة الـ
٢٦٦١٤٢٢٧	لمساحة مستوية	١١٠	مركبات
٤٠٠		١٠٩	مستوى
	مساحة	١١٢	مسطط اتجاهى
٢٦١٤٢١٢	بالتكامل	١١٢	مسطط عدى
٤٠٠	بالتكامل المتكرر	٣٦٨	معادلة خط
٢٦١	فى الاحداثيات القطبية	٣٦٨	معادلة مستوى
٢٦٦٤٢٥٣	لسطح دورانى	١١٢	وحدة المماس
٤١٠	لسطح منحنى		متسلسلات
١٥٤	مستقيم مقارب	٣٠٣	اشتقاق الـ
٣٤٩	مستوى تماس لسطح	٣٠٩	تايلور
٣٥٦	مشتقات اتجاهية	٢٧٩	تباعد الـ
	مشتقة	٢٧٩	تقارب الـ
٢٨	تعريف	٣٠٣	تكامل الـ
٣٢٩	جزئية	٢٩٦	حسابات بـ
٣٣٦	كلية		متسلسلات (يتبع)
١٢٨٤١٠٢	لطول قوس	٢٧٩	غير منتهية
٣٥٦	متجه	٣٠٢	فترة تقارب الـ
٩٩	معادلات بارامترية	٣٠٩	ماكلورين
٤٣٧٤٤٣٠	معادلات تفاضلية	٢٩٢	متناوية
٧٢	معدلات متعلقة ببعضها	٢٨٤	موجب
		٣٠٢	متسلسلات قوسى

٢٣٤	نظرية المحاور المتوازية	٣٠٩	مفكوك متسلسلات دائري
٥٥	نقطة انعطاف	٧٦	مقياس دائري
١٥٦	نقطة ثنائية	٣٤	مماس لمنحنى فراغي
٥٤٤ ٥٣	نقطة حرجة		مماس لمنحنى مستوى
١٥٦	نقطة شاذة	٤٧	طول
١٥٦	نقطة منعزلة	٤٧	معادلة
	نهاية	٣٤٩	منحنى فراغي
١٠	دالة	١٠٣	منشوء منحنى
٢٧٨٤ ١٠	متتابعة	١٥٦	ناب
	نهاية صغرى وعظمى	١٠٣	نصف قطر
٦٣	تطبيقات	٢٣٤	انحناء
٥٣	لدالة ذات متغير واحد		دوران
٣٥٧	لدالة عديدة المتغيرات	٢٠٣	نظرية أساسية
			في حساب التكامل

مطابق
المكتبة المصرية الحديثة



07 094452 0